

ATTI
DELLA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLIX

1952

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XII

(1° semestre 1952)



ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1952

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 gennaio 1952

Presiede il Socio anziano G. LEVI

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati.* Nota I^(*) del Corrisp. RENATO CACCIOPOLI.

1. La teoria che espongo sommariamente in questa e nelle seguenti Note vuole essere un saggio di teoria generale dell'integrazione multipla in uno spazio ad un numero di dimensioni maggiore della molteplicità dell'integrale; un'estensione di quella elementare dell'integrazione curvilinea o superficiale: gli integrali considerati (assoluti o di forme differenziali) essendo estesi a insiemi *k*-dimensionali, generali al possibile, di uno spazio ad *n* dimensioni, con $k < n$. È alla base di questo studio una analisi delle nozioni di insieme *k*-dimensionalmente orientato, o insieme di elementi *k*-dimensionali, di misura *k*-dimensionale di un siffatto insieme, ecc. Istanza fondamentale ne è una trattazione generale delle forme differenziali esterne e della loro integrazione, paragonabile a quella classica dell'integrazione *n*^{pla} (secondo Lebesgue) del differenziale fdx_1, \dots, dx_n .

Non so di alcun tentativo in questa direzione, inteso cioè ad una *teoria generale*; abbondano per contro ricerche e risultati parziali, come definizioni proposte di misura *k*-dimensionale (assoluta)⁽¹⁾, estensioni della formola di Gauss-Green⁽²⁾, ecc.

(*) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) Da rilevare specialmente quelle di CARATHÉODORY («Göttinger Nachrichten», p. 404 (1914)); GROSS («Monatshefte f. Math. u. Phys.», 29, p. 145 (1918)); HAUSDORFF («Math. Annalen», 79, p. 163 (1919)); KOLMOGOROFF («Math. Annalen», 107, p. 351 (1932)). Per un raffronto critico ved. NÖBELING, «Math. Annalen», 118 (1943).

(2) SCHAUDER, «Fundamenta Math.», 8, p. 1 (1926); RANDOLPH, «Transactions Am. Math. Soc.», 38, p. 531 (1935); FEDERER, «Trans. Am. Math. Soc.», 58, p. 44 (1945) e 59, p. 441 (1946); LORENTZ, «Math. Zeitschrift», 51, p. 61 (1949).

Un cenno dei principî della teoria che qui imprendo a sviluppare ho dato in una comunicazione al recente congresso dell'U.M.I. ⁽³⁾. Riprenderò innanzi tutto, precisandola e parzialmente modificandola, questa prima esposizione.

2. Punto di partenza è (esemplificando sul caso $n = 3$, $k = 2$) la considerazione di un generico poliedro Π , non necessariamente finito nè connesso, ma di frontiera limitata. Diciamo Σ questa frontiera o superficie quando *orientata*, per esempio come faccia esterna, ed indichiamone con $S = A\Sigma$ la porzione staccata da un qualunque insieme aperto A . Assegnato poi un piano orientato π , consideriamo la misura o area *relativa*, elementarmente definita, della proiezione ortogonale di S su π : per tale misura adopereremo una delle notazioni $\varphi(S) = \varphi(A\Sigma)$, $\varphi(A, \Pi)$; in particolare $\varphi(\Sigma) = 0$.

Come funzione di A , φ è completamente additiva e si prolunga in una funzione $\varphi(I\Sigma) = \varphi(I, \Pi)$ di insiemi di Borel. Come funzione di Π , invece, φ è semplicemente additiva, per addendi Π in numero finito, a due a due privi di punti *interni* comuni.

Posto successivamente $\pi \equiv yz, zx, xy$ otterremo tre funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, componenti di un vettore Φ : i *differenziali* $d\varphi_1, d\varphi_2, d\varphi_3$ definiscono l'*elemento* di Σ , con l'area $|d\Phi| = \sqrt{d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + d\varphi_3^2}$; e le *variazioni totali*

$$\int_A |d\varphi_1|, \quad \int_A |d\varphi_2|, \quad \int_A |d\varphi_3|, \quad \int_A |d\Phi|$$

sono rispettivamente le aree *assolute* delle proiezioni di $S = A\Sigma$ sui piani coordinati, e l'area della S stessa ⁽⁴⁾.

Il nostro problema fondamentale è quello di prolungare la definizione di φ come funzione di Π , subordinando la proprietà additiva ad altra più generale - relativa anche ad infiniti addendi -, ed ampliando in tal modo la classe dei poliedri Π in altra, estesa al possibile, di *domini* ⁽⁵⁾ D a frontiera limitata. Alle frontiere *orientate* F di questi domini si estenderà così la precedente definizione dell'*elemento orientato*, e ne seguiranno senz'altro le definizioni di area, di integrale, ecc.

3. Faremo nel seguito uso essenziale delle seguenti definizioni e notazioni, relative a operazioni su domini ed a funzioni additive d'insieme.

Denotiamo in generale con $\mathfrak{F}D$ la frontiera di un dominio D e con $\mathfrak{I}D$ il suo *interno*.

Dati due domini D_1 e D_2 , indicheremo con $D_1 \cdot D_2$ il dominio *involucro* (*Hülle*, *fermeture*) dell'interno del prodotto ordinario $D_1 D_2$; analogamente definiremo la differenza $D_1 \dot{-} D_2$ ($D_1 \supset D_2$) ed il *dominio* complementare \mathcal{C}^*D ; e secondo la stessa convenzione si avrà $D_1 \dot{+} D_2 = D_1 + D_2$.

(3) IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana, ottobre 1951.

(4) È questa sostanzialmente la definizione di area proposta (per superficie curve qualunque) da PEANO (questi « Rendiconti », IV, 6, p. 54 (1890)).

(5) Cioè insiemi perfetti ogni cui punto sia di accumulazione per i punti interni.

Analogamente ancora considereremo, contrassegnandone i simboli con un punto *, somme e prodotti infiniti $\sum_i^* D_n, \prod_i^* D_n$, sotto la condizione che sussistano le proprietà

$$(a) \quad \mathfrak{J}\Sigma^* D_n = \mathfrak{J}\Sigma D_n, \quad (b) \quad \mathfrak{J}\Sigma^* \mathfrak{C}^* D_n = \mathfrak{J}\Sigma \mathfrak{C}^* D_n^{(6)},$$

ovviamente verificate per somme e prodotti finiti. Dopo ciò vi sarà luogo eventualmente a definire i limiti d'indeterminazione (minimo e massimo, o anche ristretto e completo)

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^* D_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}^* D_n,$$

che potranno coincidere nel limite unico $\lim_{n \rightarrow \infty}^* D_n$.

Dalle proprietà (a) e (b) segue facilmente che se esiste $\lim^* D_n$ (e quindi $\lim^* \mathfrak{C}^* D_n$) si ha, per i limiti d'indeterminazione ordinari,

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} D_n - \lim_{n \rightarrow \infty} D_n \subset \mathfrak{F} \lim_{n \rightarrow \infty}^* D_n.$$

4. Diremo che una successione di domini $\{D_n\}$ tende *in media* al dominio D , e scriveremo

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty}^* D_n,$$

se la misura $\text{mis } \Delta_n$ della differenza assoluta fra D e D_n ,

$$\Delta_n = (D - DD_n) + (D_n - DD_n)$$

tende a zero per $n \rightarrow \infty$, cioè se la funzione caratteristica di D_n tende in media a quella di D . Più generalmente potremo considerare insiemi misurabili piani o spaziali.

Siano in generale $E_1^{(\xi)}, E_2^{(\eta)}, E_3^{(\zeta)}$ le sezioni di D con i piani $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$: da note proprietà della convergenza in media segue che dalla data successione se ne può estrarre un'altra $\{\bar{D}_n\}$ tale che le successioni

$$\{\bar{E}_{n1}^{(x)}\}, \quad \{\bar{E}_{n2}^{(y)}\}, \quad \{\bar{E}_{n3}^{(z)}\}$$

tendano in media rispettivamente a $E_1^{(x)}, E_2^{(y)}, E_3^{(z)}$ per quasi tutti i valori di x, y, z .

Convergenza in media si ha in particolare quando

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty}^* D_n,$$

sempre che le frontiere si mantengano equilimitate e $\mathfrak{F}D$ abbia inoltre misura (spaziale) nulla. La (1) ci dice anzi di più; cioè che già per le successioni

$$\{E_{n1}^{(x)}\}, \quad \{E_{n2}^{(y)}\}, \quad \{E_{n3}^{(z)}\}$$

si presenta la convergenza in media per quasi tutti i valori di x, y, z .

(6) Le somme nei secondi membri vanno intese nel senso ordinario.

5. Siano $\varphi(I)$, $\varphi_n(I)$ funzioni di insieme di Borel completamente additive, e ne indichino $V(I)$, $V_n(I)$ le variazioni totali. Diremo che la successione $\{\varphi_n(I)\}$ è *quasi-convergente* verso $\varphi(I)$, e scriveremo

$$\varphi(I) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(I),$$

se la relazione di limite $\varphi(I) = \lim \varphi_n(I)$ ha luogo *su quasi tutti i domini rettangolari o parallelepipedi*. Il seguente teorema è conseguenza immediata di risultati noti ⁽⁷⁾: *La successione $\{\varphi_n(I)\}$ è compatta rispetto alla quasi-convergenza ⁽⁸⁾ sempre che le variazioni totali V_n delle funzioni φ_n siano equilimitate.*

Se la successione $\{\varphi_n(I)\}$ è compatta rispetto alla quasi-convergenza ed ammette un'unica funzione limite $\varphi(I)$, diremo che φ_n tende *in misura* a $\varphi(I)$, e scriveremo

$$\varphi(I) = \lim_{n \rightarrow \infty}^* \varphi_n(I).$$

La convergenza in misura è più generale della quasi-convergenza; così come per le funzioni di punto la convergenza quasi-ovunque non è che un caso particolare della convergenza in misura.

6. Considereremo ora domini D a frontiera $\mathfrak{F}D$ limitata e di misura (spaziale) nulla: e diremo di classe Ω quelli suscettibili di un'approssimazione poliedrica mediante una successione di poliedri $\{\Pi_n\}$ tale che

$$(2) \quad D = \lim_{n \rightarrow \infty}^* \Pi_n,$$

conservandosi equilimitate le aree delle relative superficie Σ_n (e, come è ovviamente lecito ammettere, queste superficie stesse).

Definiamo come al n. 2 la funzione $\varphi(I \Sigma_n) = \varphi(I, \Pi_n)$ relativa al poliedro Π_n ed al piano orientato π . Le variazioni totali $V_n(I)$ delle funzioni $\varphi(I, \Pi_n)$ essendo equilimitate risulterà compatta rispetto alla quasi-convergenza, in virtù del teorema precedente, la successione $\{\varphi(I, \Pi_n)\}$ per ogni approssimazione poliedrica di un dominio D di classe Ω : dippiù, come dimostreremo, vi sarà convergenza in misura, cioè unicità della funzione limite.

Siano invero $\{\Pi_n\}$, $\{\Pi'_n\}$ due diverse successioni poliedriche approssimanti, per le quali le funzioni φ presentino quasi-convergenza. I poliedri differenze assolute

$$\Pi''_n = (\Pi_n \div \Pi_n \cdot \Pi'_n) + (\Pi'_n \div \Pi_n \cdot \Pi'_n)$$

tendono a zero in media, cioè in volume: si può dunque supporre, riferendosi ove occorra ad una successione estratta, che tendano a zero in media le sezioni di Π''_n con quasi tutti i piani paralleli ai piani coordinati.

(7) Ved. LA VALLÉE-POUSSIN, « Annales de l'Institut H. Poincaré », 17, p. 221 (1932); « Actualités scientifiques et industrielles » (Publications Inst. Math. Un. Strasbourg) 578, pp. 7-9 (1937). Nel secondo lavoro peraltro, l'enunciato del teorema per funzioni di segno variabile è troppo generale.

(8) Cioè ogni successione da essa estratta ne contiene un'altra quasi-convergente. Più precisamente, per il dominio rettangolare $R: a \leq x \leq a', b \leq y \leq b', c \leq z \leq c'$ vanno esclusi valori di a, b, c, a', b', c' in infinità numerabile.

Si avrà quindi, per quasi tutti i domini rettangolari R ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(R, \Pi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(R, \Pi'_n),$$

tendendo a zero l'area delle sezioni del contorno di R con Π''_n , ed essendo d'altra parte nulla φ sulla superficie orientata di $R \Pi''_n$; donde la coincidenza delle funzioni limiti per $\{\varphi(I, \Pi_n)\}$ e $\{\varphi(I, \Pi'_n)\}$.

Dopo ciò definiremo la funzione $\varphi(I, D)$ ponendo

$$\varphi(I, D) = \lim_{n \rightarrow \infty}^* \varphi(I, \Pi_n).$$

Se in particolare

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty}^* \Pi_n,$$

segue da quanto detto al n. 4 che la successione $\{\varphi(I, \Pi_n)\}$ è già quasi-convergente, sicchè

$$\varphi(I, D) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(I, \Pi_n)^{(9)}.$$

7. La funzione $\varphi(I, D)$, completamente additiva rispetto a I , gode rispetto a D dell'additività semplice in quanto si ha

$$\varphi(I, D_1 + D_2) = \varphi(I, D_1) + \varphi(I, D_2) - \varphi(I, D_1 \cdot D_2),$$

$$\varphi(I, D_1 \div D_2) = \varphi(I, D_1) - \varphi(I, D_2);$$

in particolare $\varphi(I, D) = -\varphi(I, \mathcal{C}^*D)$.

Ma più generalmente si presenta per φ una proprietà additiva relativa a somme (anche algebriche) infinite, cioè di *continuità*, nel senso che sussiste la relazione di limite

$$(3) \quad \varphi(I, D) = \lim_{n \rightarrow \infty}^* \varphi(I, D_n),$$

sempre che

$$(4) \quad D = \lim_{n \rightarrow \infty}^* D_n,$$

sotto la condizione che le variazioni totali $V_n(I)$ delle funzioni $\varphi(I, D_n)$ si mantengano equilimitate.

Consideriamo infatti le successioni poliedriche $\{\Pi_{mn}\}$ approssimanti i domini D_m ; possiamo supporre che la convergenza in media abbia luogo per quasi tutte le sezioni, con piani paralleli ai piani coordinati, tanto di $\{\Pi_{mn}\}$ quanto di $\{D_n\}$ (riferendosi ad una successione estratta), e infine che

$$D = \lim_{m, n \rightarrow \infty}^* \Pi_{mn},$$

ed altrettanto ancora per quasi tutte le sezioni.

Se allora le successioni $\{D'_n\}$, $\{\Pi'_{mn}\}$ hanno proprietà analoghe, risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(R, D_n) - \varphi(R, D'_n)] = 0$$

(9) Nella mia comunicazione citata in (3) non avevo considerato per i domini che la convergenza espressa dal simbolo \lim^* ; e per contro delle corrispondenti funzioni additive che la sola convergenza in misura.

per quasi tutti i domini rettangolari R ; donde la coincidenza di $\varphi(I, D)$ con tutte le funzioni limiti per quasi-convergenza definite dalla successione $\{\varphi(I, D_n)\}$.

Se in particolare

$$(5) \quad D = \lim_{n \rightarrow \infty}^* D_n$$

si ha addirittura

$$(6) \quad \varphi(I, D) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(I, D_n).$$

Facciamo notare che volendo limitare le precedenti deduzioni ad un particolare piano di proiezione π basta supporre che i domini considerati siano di classe Ω rispetto al piano (giacitura) π ; cioè approssimabili mediante poliedri le cui superficie abbiano su π proiezioni di aree equilimitate.

8. L'analisi fatta mette bene in luce la genesi della funzione $\varphi(I, D)$, in dipendenza da D , mediante prolungamento dalla classe dei poliedri alla classe Ω ; i relativi teoremi del passaggio al limite sono espressi dalla (3) sotto la condizione (4), e più restrittivamente dalla (6) sotto la condizione (5). Ma si scorge ora subito una definizione *diretta* di $\varphi(I, D)$.

$\mathfrak{F}D$ avendo misura spaziale nulla, per quasi tutti i domini rettangolari R l'insieme $\mathfrak{F}D \mathfrak{F}R$ avrà misura nulla su $\mathfrak{F}R$; e si potrà porre, indicando con K la frontiera *orientata* di R ,

$$\varphi(R, D) = -\varphi(D, R) = -\varphi(DK).$$

La funzione di R così definita quasi ovunque si prolungherà in una funzione completamente additiva $\varphi(I, D)$ sempre che sia a variazione limitata; è quanto assicura l'appartenenza di D alla classe Ω ⁽¹⁰⁾.

Questa definizione fornisce per la nostra teoria un altro punto di partenza, sostanzialmente equivalente al primo, per certi rispetti se si vuole più semplice: anzichè ricavare $\varphi(I, D)$ da $\varphi(I, \Pi)$ mediante passaggio al limite, si prolunga $\varphi(R, D)$, inizialmente definita per quasi tutti gli R , nella funzione completamente additiva $\varphi(I, D)$, verificate le necessarie condizioni di continuità ⁽¹¹⁾.

La prima impostazione suggerisce peraltro nel modo più naturale una notevole generalizzazione. Abbandonando l'ipotesi che sia nulla la misura di $\mathfrak{F}D$, si sostituisca alla (2) l'altra relazione di limite

$$(7) \quad \mathfrak{F}D = \lim_{n \rightarrow \infty}^* \Pi_n,$$

(10) È una presunzione ovvia che le due condizioni si equivalgano; cercandone una dimostrazione semplice, si potrebbe ricorrere a successive decomposizioni rettangolari dello spazio, e per ognuna di esse considerare i domini plurirettangolari i cui contorni abbiano area minima sotto la condizione di cadere in un intorno (ε) di $\mathfrak{F}D$, con $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ne seguirebbe che è di classe Ω un dominio che sia tale rispetto ai tre piani coordinati.

(11) Al lemma di compattezza del n. 5 si sostituisce allora l'altro lemma, enunciato nella mia comunicazione citata, relativo al prolungamento di una funzione additiva.

cioè si considerino successioni approssimanti che tendano in media all'interno di D ; le aree delle superficie Σ_n conservandosi sempre equilimitate. Si conseguirà così la definizione di $\varphi(I, D)$ per i domini di una classe più ampia di Ω .

Sussisterà sempre la (3), alla condizione (4) subentrando l'altra

$$\mathfrak{J}D = \lim_{n \rightarrow \infty}^* \mathfrak{J}D_n;$$

ma l'additività semplice viene a mancare.

Dà questo punto di vista, più generale ma forse meno semplice e immediato del primo, ai domini D di classe Ω si sostituiscono gli insiemi aperti A di una classe Ω contenente gli $\mathfrak{J}D$. L'additività ordinaria sussiste in Ω' rispetto a somme finite, ma le operazioni di differenza (e di complementare) vanno generalmente escluse ⁽¹²⁾.

9. Siamo ora in grado di estendere ai domini D della classe Ω le considerazioni, elementari per i poliedri, del n. 2.

Siano F la frontiera *orientata* di D , e $S = IF$ la porzione staccata su F da un qualunque insieme di Borel I : la funzione

$$\varphi(S) = \varphi(IF) = \varphi(I, D)$$

misurerà per definizione l'*area relativa* della proiezione di S su π ; e la variazione totale

$$V(S) = V(IF) = V(I, D) = \int_I |d\varphi|$$

darà l'*area assoluta*. In particolare $\varphi(F) = 0$.

Scegliendo come piano π successivamente i tre piani coordinati si ottengono tre funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, e si ha

$$\varphi = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3,$$

α, β, γ essendo i coseni direttori dell'asse normale a π .

Indicheremo con $\sigma_1(S), \sigma_2(S), \sigma_3(S)$ le variazioni totali di $\varphi_1(S), \varphi_2(S), \varphi_3(S)$, e con $\sigma(S)$ la *variazione totale del vettore*

$$\Phi(S) \equiv [\varphi_1(S), \varphi_2(S), \varphi_3(S)];$$

porremo cioè

$$\sigma(S) = \sigma(IF) = \int_I |d\Phi| = \int_I \sqrt{d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + d\varphi_3^2} \quad \stackrel{(13)}{=} \quad \left(= \int_I \sqrt{d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2 + d\sigma_3^2} \right),$$

e chiameremo $\sigma(S)$ l'*area*, o *misura 2-dimensionale*, di S .

(12) Affatto in generale, v'ha luogo a considerare tutti gli insiemi dello spazio approssimabili in media con poliedri a superficie di aree equilimitate.

(13) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_k \sqrt{\varphi_1^2(I_k) + \varphi_2^2(I_k) + \varphi_3^2(I_k)}$, con $I_1 + I_2 + \dots = I$, δ essendo il massimo fra i diametri degli I_k .

Quasi ovunque su S significherà: a prescindere da una porzione di S avente area nulla.

Consideriamo ora le derivate

$$\frac{d\varphi_1}{d\sigma} = \alpha, \quad \frac{d\varphi_2}{d\sigma} = \beta, \quad \frac{d\varphi_3}{d\sigma} = \gamma$$

delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rispetto a σ : come è ben noto, queste derivate si possono definire mediante i limiti dei rapporti incrementali sulle maglie di un reticolo (procedimento di La Vallée Poussin). Quasi ovunque rispetto a σ , e però quasi ovunque su F , risultano definite α, β, γ , verificando la relazione $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. L'asse v di coseni direttori $\alpha(P), \beta(P), \gamma(P)$, si dirà l'asse normale ad F in P : P essendo un qualunque punto di $\mathfrak{F}D$, a prescindere da un insieme E per cui $\sigma(EF) = 0$ ⁽¹⁴⁾.

10. Abbiamo indicato con F la frontiera *orientata* di D , distinguendola così anche nella notazione dall'insieme $\mathfrak{F}D$ dei punti di frontiera. In generale chiameremo $S = IF$ un *insieme superficialmente* o *2-dimensionalmente orientato*, distinguendolo dall'insieme di punti $I\mathfrak{F}D$ che ne diremo il *sostegno*, e che denoteremo brevemente con $\|S\|$.

S non è individuato dal proprio sostegno $\|S\|$, bensì da questo *e dal dominio* D , ossia da ogni coppia (I, D) con $I\mathfrak{F}D = \|S\|$; o se si vuole dalle tre funzioni additive $\varphi_1(IS), \varphi_2(IS), \varphi_3(IS)$, cioè

$$\varphi_1(I \|S\|, D), \quad \varphi_2(I \|S\|, D), \quad \varphi_3(I \|S\|, D),$$

dove a $\|S\|$ può sostituirsi ogni insieme H per cui $H\mathfrak{F}D = \|S\|$.

Ad ogni S si associa un *opposto* $-S$, con lo stesso sostegno, che si ottiene cambiando D in $\mathcal{C}'D$, cioè $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ in $-\varphi_1, -\varphi_2, -\varphi_3$; si può dire che con ciò S cambia di lato o *faccia*.

Quasi ovunque su S è definito l'asse normale v , e corrispondentemente su $-S$ l'asse opposto $-v$.

L'insieme superficialmente orientato S appare così come un *insieme di elementi superficiali raccordati*, definiti dai punti del sostegno cui si associa un asse normale. Parleremo d'altronde, con lieve improprietà accettabile per comodità di linguaggio, di *punti di* S ; e chiameremo *ordinari* i punti *centri di elementi*, cioè in cui è definita la normale, *neutri* i rimanenti. Questi ultimi costituiscono un insieme di area nulla *su* S , trascurabile ai fini della misura e dell'integrazione.

Definiremo il più generale insieme superficialmente orientato S come *somma* di insiemi $I_1 F_1, I_1 F_2, \dots$, anche in infinità numerabile, a due a due

(14) A rigore questo insieme eccettuato dipende dal reticolo di derivazione. Ciò in fondo non ha importanza, poichè due reticoli diversi danno luogo quasi ovunque simultaneamente ad una normale, la medesima: la normale è una funzione di P soltanto quasi ovunque definita. Comunque non sarebbe difficile, ciò che per brevità tralascieremo qui di fare, caratterizzare intrinsecamente su F una porzione, di eguale area, su cui esistesse la normale.

privi di punti comuni; l'operazione di somma includendo quella di differenza definita ponendo $S - S' = S + (-S')$.

Gli insiemi $S = S^{(1)} + S^{(2)} + \dots$ di area complessiva $\sigma(S) = \sigma(S^{(1)}) + \sigma(S^{(2)}) + \dots$ finita costituiscono la più generale classe $\{S\}$, per cui le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ si definiscono ponendo

$$\varphi_i(IS) = \varphi_i(IS^{(1)}) + \varphi_i(IS^{(2)}) + \dots \quad (i = 1, 2, 3)^{(15)}$$

Le funzioni $\varphi_i, \sigma_i, \sigma$ sono completamente additive in $\{S\}$; e per le φ v' ha luogo a considerare anche l'operazione di differenza: $\varphi(S - S') = \varphi(S) - \varphi(S')$.

Si possono peraltro definire somme, *assolute* per dir così, fra insiemi S dotati di punti comuni. Una siffatta somma, da indicarsi per esempio con

$$\bar{S} = S^{(1)} \cup S^{(2)} \cup S^{(3)} \cup \dots$$

è definita non dalle somme $\sum_n \varphi_i(I S^{(n)})$, ma dalle *successioni* $\{\varphi_i(IS^{(n)})\}$, ed

un punto del sostegno può essere centro di più elementi ⁽¹⁶⁾.

Nella generalizzazione di cui al n. 8, subentrando ai domini di classe Ω gli insiemi aperti di classe Ω' , le considerazioni precedenti sussistono inalterate, tranne la definizione dell'insieme opposto mediante il campo complementare.

11. Consideriamo ora due esempi.

Siano D_1, D_2, \dots cilindri circolari retti con basi (prive di punti comuni) sul piano xy ed altezza 1; supponiamo che i raggi formino una serie convergente, e che le basi si accumulino intorno ad una curva c . Posto $D = \sum D_n$, F risulta costituita dalle superficie totali dei cilindri, nonché dalla superficie cilindrica Γ di direttrice c e generatrice 1. D è di classe Ω se c ha misura piana nulla; $A = \mathcal{J}D$ è in ogni caso di classe Ω' (ma non $\mathcal{J}\mathcal{C}D$). Γ è neutra, cioè luogo di punti neutri (su F), e l'area di F è la somma delle aree delle superficie dei cilindri.

Sia poi D il dominio $|z| \leq f(x, y)$, dove è una funzione non negativa in un dominio del piano xy limitato da una curva di Jordan c ; supponiamo f continua con le sue derivate prime, e con queste nulla su c . Su F la curva c è neutra e però (sostegno di un insieme) di area nulla anche se ha misura piana positiva; la porzione S di F su cui $z \geq 0$ ha per area quella della superficie $z \geq f(x, y)$ aperta, cioè privata del contorno. Aggiungendo a D la metà inferiore di una sfera con centro nell'origine e contenente c si ottiene un dominio D' sulla cui frontiera orientata F' il sostegno $\parallel S$ definisce un insieme S' la cui area differisce da quella di S per la misura piana di c .

(15) Considerando separatamente i tre piani coordinati, i domini di classe Ω rispetto a questi (n. 7), e le relative funzioni φ_i , si definiscono poi tre classi $\{U_i\}$ di insiemi *parzialmente orientati*, con una proiezione di area finita. $\{S\}$ è delle classi $\{U_i\}$ la sottoclasse comune, secondo la considerazione della nota (10).

(16) Si può dire che in \bar{S} elementi opposti non si elidono.

Cosmogonia. — *Sulla espansione dell'Universo.* Nota I ^(*) del
Corrisp. FRANCESCO ZAGAR.

1. Uno degli aspetti più suggestivi del fenomeno della espansione del mondo degli universi galattici è senza dubbio quello basato sul punto di vista della meccanica newtoniana, secondo cui l'attuale stato dell'Universo accessibile sarebbe conseguenza di una immane esplosione avvenuta quando tutta la materia era condensata in uno spazio piccolissimo, ad un'epoca che può essere calcolata facilmente in base ai dati dell'osservazione, e che fornirebbe quindi uno dei dati più fondamentali dell'Astronomia moderna, e cioè l'età dell'Universo.

Ma un esame più minuto della questione porta a conclusioni che fanno apparire come molto dubbiosa tale interpretazione. Vedremo infatti che, ammessa la realtà del fenomeno di allontanamento delle nebulose con la nota legge espansionistica, si è condotti ad ammettere l'esistenza, in passato, di velocità di fuga che superano di molto quelle massime attualmente conosciute, che pur arrivano a $1/7$ della velocità della luce; si arriva cioè, con ammissioni del tutto plausibili, a velocità che addirittura superano quella della luce. Un tale risultato inatteso, allo stato delle nostre conoscenze odierne, deve condurre alla rinuncia alle premesse, con che diviene pressochè insostenibile anche la conclusione circa la cosiddetta scala dei tempi, che assegna all'esistenza dell'Universo una durata di non più di alcuni miliardi di anni, durata sfruttata per vari altri problemi di natura astrofisica e cosmogonica.

2. L'età dell'Universo si usa calcolare in base alle velocità radiali delle nebulose spirali conosciute, supponendo che queste siano state sempre le attuali ⁽¹⁾, ottenendosi, col fattore di proporzionalità tra velocità e distanza $\alpha = 1,9 \times 10^{-17}$ (sec⁻¹), l'intervallo $T = 1/\alpha = 1,7 \times 10^9$ anni. La detta supposizione è però un'assurdità meccanica, poichè non è possibile ignorare e trascurare l'azione dell'attrazione reciproca di queste masse in fuga. Se effettivamente è avvenuta al tempo iniziale t_0 una esplosione, dobbiamo pensare che su un elemento esterno (cioè su una di quelle galassie che si allontanarono dal nucleo con la velocità massima) ha agito fin dal momento dell'esplosione l'attrazione dell'intero nucleo, e su un elemento qualunque ha agito sempre la massa contenuta entro il raggio di questo elemento (nelle condizioni che fra poco stabiliremo). Questa massa, che diremo del nucleo, è per un determinato elemento dell'insieme sempre la stessa, poichè aumentando tutte le distanze con la legge ora

(*) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) Metodo della cinematica classica.

ricordata (velocità crescente con la distanza), la sfera determinata dall'elemento in questione si dilata con tutte le galassie interne senza che alcuna di queste ne possa uscire.

Se, per semplificare il problema, supponiamo che l'insieme delle galassie abbia sempre mantenuto una forma esterna sferoidica, e supponiamo una distribuzione omogenea della materia nello spazio, per la legge ricordata, pur variando la densità col tempo, l'insieme rimarrà omogeneo; ogni nebulosa è allora evidentemente soggetta ad una attrazione centrale dovuta ad una massa costante, e il problema analitico diviene quello dei due corpi nel caso semplicissimo del moto rettilineo. Si ha quindi per la velocità di un elemento qualsiasi alla distanza r dal centro dell'insieme

$$(1) \quad V^2 = \frac{2 k^2 \mathfrak{M}}{r} + h,$$

essendo k^2 la costante dell'attrazione newtoniana, h la costante dell'energia, ed \mathfrak{M} la somma della massa del nucleo e della galassia in esame, ossia, indicando con ρ la densità dell'insieme (trascurando il singolo elemento di fronte al nucleo), $\mathfrak{M} = 4/3 \pi r^3 \rho$, cosicchè si può anche scrivere

$$(1') \quad V^2 = \kappa r^2 + h, \quad \text{con} \quad \kappa = \frac{8}{3} \pi k^2 \rho.$$

Queste relazioni valgono in generale per la velocità relativa al centro dello sferoide, ma nel caso presente dei moti puramente radiali si dimostra facilmente che esse valgono per la velocità relativa di una galassia rispetto a *qualunque* altra alla distanza r . Infatti si ha per due galassie qualsiasi, in un determinato istante,

$$V_1^2 = \kappa r_1^2 + h_1, \quad V_2^2 = \kappa r_2^2 + h_2,$$

ed essendo

$$(2) \quad V_1 = \alpha r_1, \quad V_2 = \alpha r_2$$

segue facilmente

$$(2') \quad h_1 : h_2 = r_1^2 : r_2^2, \quad h_1 r_2^2 + h_2 r_1^2 = 2 r_1 r_2 \sqrt{h_1 h_2};$$

quindi per la velocità relativa della seconda rispetto alla prima, chiamando ϑ l'angolo (costante) tra le due direzioni dal centro e perciò anche tra le due velocità predette,

$$\begin{aligned} V^2 &= V_1^2 + V_2^2 - 2 V_1 V_2 \cos \vartheta = \\ &= \kappa (r_1^2 + r_2^2) + h_1 + h_2 - 2 \cos \vartheta \sqrt{\kappa r_1^2 + h_1} (\kappa r_2^2 + h_2); \end{aligned}$$

avendosi per la seconda delle (2')

$$(\kappa r_1^2 + h_1) (\kappa r_2^2 + h_2) = (\kappa r_1 r_2 + \sqrt{h_1 h_2})^2,$$

segue

$$V^2 = \kappa (r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \vartheta) + (\hbar_1 + \hbar_2 - 2 \hbar_1 \hbar_2 \cos \vartheta)$$

ossia infine

$$V^2 = \kappa r^2 + \hbar = \frac{2 k^2 \mathfrak{M}}{r} + \hbar^{(2)}.$$

Essendo la velocità tutta radiale e positiva, la precedente può scriversi

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2 k^2 \mathfrak{M}}{r} + \hbar}$$

e con la separazione delle variabili fornisce per $\hbar > 0$ l'integrale

$$(3) \quad T = t - t_0 = \frac{1}{\hbar} \left\{ \sqrt{\hbar r^2 + 2 k^2 \mathfrak{M} r} - \right. \\ \left. - \frac{k^2 \mathfrak{M}}{\sqrt{\hbar}} \log \left[\frac{\hbar r + k^2 \mathfrak{M}}{\sqrt{\hbar}} + \sqrt{\hbar r^2 + 2 k^2 \mathfrak{M} r} \right] + \frac{k^2 \mathfrak{M}}{\sqrt{\hbar}} \log \frac{k^2 \mathfrak{M}}{\sqrt{\hbar}} \right\},$$

avendo indicato t_0 l'istante corrispondente ad $r = 0$.

3. Per semplicità dei calcoli ci riferiremo al caso della nebulosa spirale estrema di cui si conosce la velocità radiale, e cioè prendendo in cifre tonde

$$(4) \quad r = 72 \times 10^6 \text{ parsec} \quad , \quad V = 42000 \text{ km/sec} ,$$

con le quali si ottiene subito la costante \hbar se conosciamo anche la massa \mathfrak{M} che in questo esempio è la massa di tutte le galassie che oggi si trovano entro la sfera di raggio r ora detto. Per valutare questa massa ricordiamo che nel nostro sistema galattico ci sono in cifra tonda 10^{11} stelle che supporremo di massa uguale a quella del Sole, e che il numero delle nebulose contenute in una sfera di raggio $R = 150 \times 10^6$ parsec ⁽³⁾ assomma a circa 10^8 , quindi nella sfera di 72×10^6 parsec in cifra tonda 10^7 nebulose. La massa totale per il nostro problema sarebbe dunque di 10^{18} masse solari, e con questo dato risulta per la galassia presa in esame

$$(5) \quad \hbar = + 545 \text{ (unità: le unità astronomiche di } k^2).$$

La (3) fornisce allora coi valori (4) e (5)

$$T = 1,5 \times 10^9 \text{ anni},$$

(2) È noto che nelle cosmologie dinamiche questa proprietà viene premessa come postulato fondamentale (ved. ad esempio O. HECKMANN, *Theorien der Kosmologie*. Springer, 1942).

(3) I dati qui assunti risultano dalla consultazione degli autori più moderni, e cioè: R. H. BAKER, *Astronomy*, D. Van Nostrand, New-York 1946 (pp. 418-440); F. W. BECKER, *Sterne und Sternsysteme*. Steinkopff, Dresden und Leipzig, 1950 (pp. 334, 354, 384, 388-89); H. SIEDENTOPF, *Grundriss der Astrophysik*. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft Stuttgart 1950 (pp. 115-117, 277-279 e 285); P. ten BRUGGENCATE, *Astronomie Astrophysik und Kosmogonie*. Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1948 (pp. 413-416); H. SHAPLEY, *Galaxies*. *Harvard Books on Astronomy*, Blakiston Comp. Philadelphia 1945.

dunque una sensibile diminuzione del valore dell'età dell'Universo, che rende già molto problematica ogni conclusione basata sul valore di T , e rende più forte il contrasto già rilevato in altre occasioni coi risultati geologici conosciuti (3-4 miliardi di anni). Notiamo che questo risultato è anche più eloquente di quello ottenuto recentemente da G. Armellini ⁽⁴⁾, e cioè $1,6 \times 10^9$ anni, basandosi su considerazioni riguardanti la densità della materia nello spazio e sul coefficiente di proporzionalità α .

Se poi si pensa che il dato \mathcal{M} utilizzato in precedenza può considerarsi come quello minimo ammissibile, non avendo avuto riguardo nè ai corpi oscuri o invisibili nel sistema galattico, nè alla materia interstellare, la cui massa è dell'ordine della massa condensata in stelle, nè infine al fatto che la massa media delle stelle non è quella del Sole, come si è qui supposto, ma circa 2,5 volte tanto, si riconosce che l'età dell'Universo T risulta ancora minore e quindi scende a un minimo dell'ordine di 1 miliardo di anni, dato indubbiamente in aperto contrasto con quanto deve ammettersi per altre ragioni.

4. Ma ad una conclusione anche più significativa in questo problema porta però il calcolo molto semplice della velocità che la nebulosa dianzi considerata doveva avere in passato, se si ammette l'espansione dell'Universo. La formola (1) mostra già che la velocità di recessione delle galassie non è costante, e solo approssimativamente potrebbe essere ritenuta tale se h fosse fortemente preponderante sul primo termine, ciò che in realtà non si verifica. Senza andare a distanze troppo piccole, che la supposta fortissima condensazione originaria potrebbe anche giustificare, vediamo nella tabellina che segue i valori della velocità radiale per tre distanze del passato, calcolate in base alla (1) col valore (5) di h : L'ultima di queste essendo già superiore alla velocità della luce, e valendo per le nebulose più lontane di quella qui considerata a più forte ragione questo risultato, non si può fare a meno di concludere che subito dopo la esplosione originaria le velocità delle galassie dovevano essere superiori a quella della luce, conclusione che appare inconciliabile con le attuali vedute.

r	V
1.0 = 72 Mpc	42.000 km sec ⁻¹
0.1	53.000
0.01	117.000
0.001 = 72 Kpc	350.000

5. Se le considerazioni precedenti mettono chiaramente in luce sfavorevole la concezione espansionistica nel campo newtoniano coll'idea di una

(4) G. ARMELLINI, *L'espansione dell'Universo nella meccanica classica*. « Rendiconti Accademia nazionale dei Lincei », vol. VIII, fasc. I (1950).

catastrofe originaria, l'ipotesi più recente della densità costante nell'Universo - a parte la premessa rivoluzionaria della creazione continua della materia - porta l'argomento in campo incontrollabile e più che mai incerto.

Nel caso della densità costante si può avere *per determinate condizioni iniziali* una espansione generale dell'insieme ⁽⁵⁾, ma se la costanza della densità fosse dovuta alla creazione continua della materia, e quindi anche delle galassie entro l'insieme che si espande, il fenomeno dell'espansione diventerebbe estremamente improbabile. Bisogna infatti ammettere, oltre al concetto già troppo ardito della creazione continua, anche un meccanismo complicatissimo, secondo il quale ogni galassia, ovunque sia generata, venga dotata di quella determinata velocità diretta radialmente che compete al punto in cui è nata nel moto generale di espansione ⁽⁶⁾. E ancor più inestricabili si presentano le condizioni se si ammette che le galassie si producano in uno stesso punto, per esempio nel centro dell'insieme. Nessuna deduzione sarebbe poi possibile per l'età dell'Universo; il Sole (e il sistema planetario) non potrebbe avere alcun riferimento con l'origine dell'Universo, poichè potrebbe essere stato creato in tempi recenti rispetto all'età delle galassie, ed i 3-4 miliardi di anni determinati per la Terra potrebbero essere una frazione anche minima dell'età degli altri membri dell'Universo.

Infine, anche prescindendo dalle obiezioni precedenti, possiamo avere da un dato quantitativo abbastanza sicuro un giudizio non meno eloquente. Se teniamo presente che la sfera di raggio massimo oggi accessibile $R = 0,5 \times 10^{27}$ cm si espande aumentando in ogni secondo il suo volume di 3×10^{64} cm³, risulta facilmente che per mantenere l'attuale densità di $\rho = 10^{-28}$ gr cm⁻³ [densità calcolata senza la materia interstellare ⁽⁷⁾] occorre un aumento di massa di 3×10^{36} gr sec⁻¹, ossia di circa 1000 masse solari al secondo entro l'Universo visibile, ciò che equivale a circa 300 masse solari all'anno entro la nostra galassia. Se, come ammettono gli autori di questa ipotesi, la fonte delle nuove creazioni deve ricercarsi nelle stelle nuove, il numero ora detto, per quanto incerto, non può mettersi a confronto con quello delle nuove scoperte fino ad oggi nella nostra galassia o nelle altre galassie (1-2 all'anno), nè col numero massimo delle nuove stimato statisticamente (20-25 all'anno).

(5) F. ZAGAR, *Un caso particolare del problema dei più corpi*. « Rendiconti Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », 1951.

(6) H. BONDI and T. GOLD, *The Steady-State Theory of the Expanding Universe*. « M. N. », 108, 252 (1948)

(7) H. SIEDENTOPF, loc. cit., p. 279. Gli autori di questa teoria ammettono una densità 5-6 volte superiore, che aumenta di questo fattore il risultato qui dedotto [ved. ad esempio F. HOYLE, « M. N. », 108, 374 (1948) e M. MC CREA, « Endeavour », IX, 33, 7 (1950)].

Fisica. — *Determinazione sperimentale della forza magnetomotrice esercitata da una corrente di spostamento dielettrico.* Nota (*) del Socio GIANCARLO VALLAURI.

1. Nella prima delle due equazioni di Maxwell si eguaglia la circuitazione del vettore campo magnetico lungo una linea chiusa all'intensità della corrente elettrica, che attraversa quella linea; e si ammette, che l'effetto resti invariato, qualora la corrente magnetizzante, anzi che corrente di conduzione, sia, in tutto od in parte, corrente di spostamento dielettrico.

Questa ipotesi, che è alla base della teoria maxwelliana, non sembra sia stata finora convalidata da una riprova sperimentale diretta. Ciò può attribuirsi, sia al fatto che tale conferma è sostanzialmente superflua, perchè l'ipotesi risulta appieno giustificata dalle mirabili deduzioni di quella teoria, sia alle difficoltà sperimentali che, per effettuare la diretta riprova, debbono essere superate. Queste ultime dipendono dalla tenuità degli effetti da rilevare, in confronto con la sensibilità dei procedimenti di misura e con le cause perturbatrici inevitabilmente presenti.

È parso tuttavia che, con i mezzi di laboratorio sviluppati negli ultimi decenni, ed in particolare con l'uso di amplificatori elettronici, la prova si potesse tentare e presentasse un qualche interesse.

2. In un mezzo dielettrico la sola corrente elettrica, che si può produrre, è la corrente di spostamento $i = dQ/dt$, intesa come variazione nel tempo del flusso di induzione $Q = \int D \cdot dS$, determinato, attraverso la superficie S , dal vettore induzione elettrica $D = \epsilon \cdot E$, generato a sua volta dal vettore campo elettrico E , quando sia ϵ la permeabilità elettrica del mezzo. D'altro canto la corrente di spostamento si identifica, nel sistema razionalizzato, con la f. m. m., che si manifesta lungo il contorno l della superficie S ed è espressa da $i = \oint H \cdot dl$.

Definito così il significato dei simboli usati, la relazione:

$$(1) \quad i = \frac{dQ}{dt}$$

esprime la legge dell'induzione magnetoelettrica; e questa è pienamente simmetrica (la simmetria è confermata anche dallo scambio fra $+$ e $-$) alla legge dell'induzione elettromagnetica

$$(2) \quad v = - \frac{d\Phi}{dt},$$

(*) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1952.

che lega la f. e. m. $v = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ alla variazione del flusso di induzione $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, determinato da $\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}$, essendo \mathbf{B} ed \mathbf{H} rispettivamente i vettori induzione magnetica e campo magnetico, e μ la permeabilità magnetica del mezzo.

È noto altresì, che i flussi Q e Φ di induzione elettrica e di induzione magnetica si identificano con le masse coulombiane corrispondenti; e che le equazioni (1) e (2), riferite all'unità di superficie ed al suo contorno, si trasformano nelle equazioni di Maxwell:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

3. Il procedimento di misura, atto a fornire la riprova diretta della legge di induzione magnetoelettrica, è illustrato schematicamente dalla fig. 1:

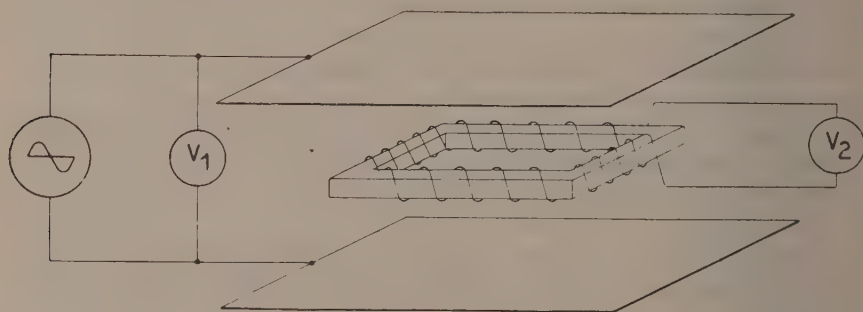


Fig. 1.

Un generatore di corrente alternata mantiene una d. d. p. V_1 fra due ampi elettrodi e determina quindi fra di essi un flusso alternativo di induzione elettrica. Lungo un contorno chiuso, che delimita un'area S ed è attraversato da una porzione Q di detto flusso, deve manifestarsi la f. e. m. $i = dQ/dt$. Per metterla in rilievo e per misurarla si fa ricorso ad una applicazione della legge dell'induzione elettromagnetica, disponendo lungo il contorno un corpo di prova in forma di circuito di materiale ferromagnetico ed avvolgendo su di esso un circuito elettrico, che diventa sede di f. e. m. $v = -d\Phi/dt$.

Se si ammette:

che \mathbf{E} , e quindi \mathbf{D} , abbiano distribuzione uniforme nello spazio compreso fra gli elettrodi, posti fra loro a distanza d , ed in particolare attraverso l'area S contornata dal corpo di prova, così che sia $Q = S \cdot D = S \epsilon E = S \epsilon \cdot V_1/d$;

che \mathbf{H} , e quindi \mathbf{B} , abbiano distribuzione uniforme lungo il contorno l del circuito magnetico ed attraverso la sua sezione s ;

che infine tutte le grandezze periodiche variano armonicamente con pulsazione ω e siano espresse mediante i rispettivi valori efficaci,

si deduce, in virtù di ambedue le leggi dell'induzione, che la f. e. m. indotta nel circuito di misura, costituito da N spire, risulta espressa da:

$$(3) \quad V_2 = \frac{NsS}{ld} \omega^2 \epsilon \mu V_1.$$

4. La definizione delle caratteristiche geometriche e fisiche di tutta l'apparecchiatura e la scelta della pulsazione ω e di tutti gli altri particolari del procedimento sperimentale dipendono, come sempre accade, da un compromesso fra molteplici esigenze.

Attuato il dispositivo con $N = 9120$, $s = 8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$, $S = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, $l = 4,4 \cdot 10^{-1} \text{ m}$, $d = 10^{-1} \text{ m}$, $\epsilon = \epsilon_0$ (salvo il caso di alcune serie di esperienze, efficacemente probative, eseguite con dielettrico di ebanite o di vetro), $\mu = 300 \epsilon_0$, è stato possibile applicare tensioni $V_1 = 10^4 \text{ V}$ ed oltre, ed è risultato conveniente operare a frequenze comprese fra 500 e 1500 Hz.

Pur facendo ricorso alla risonanza del circuito indotto per elevare la tensione disponibile al valore $V'_2 = \frac{\omega L}{R} V_2$ (L ed R , induttanza e resistenza di detto circuito), si rileva che occorre misurare tensioni dell'ordine di 1 mV, mentre agli elettrodi, immediatamente vicini, viene applicata una tensione di eguale frequenza e di ampiezza 10^6 volte maggiore. Ciò impone di usare per il rilievo di V'_2 un dispositivo amplificatore di sensibile efficacia e sopra tutto di adottare un insieme non semplice di disposizioni e di accorgimenti sperimentali (specialmente schermature e distanziamenti), allo scopo di ottenere che le misure non siano influenzate da alcuna delle molteplici cause perturbatrici, suscettibili di esercitare azione notevole e in molti casi affatto preponderante.

5. Con l'assetto sperimentale in fine adottato è stato possibile accertare l'eliminazione delle influenze perturbatrici, compiere le necessarie tarature ed effettuare numerose serie di misurazioni, concordi e conclusive. Queste confermano, per ciascuna delle disposizioni provate, la relazione di proporzionalità tra la tensione V_1 applicata agli elettrodi e la f. m. m.

$I_1 = \oint H \cdot dl = \omega \epsilon \int E \cdot dS$, esercitata sul circuito magnetico dalla corrente di spostamento, che attraversa la sezione S del corpo di prova.

Il rapporto I_1/V_1 , così misurato (che è dell'ordine di 10^{-9} siemens, per distanze fra gli elettrodi di 10^{-1} m) assume valori, che risultano pienamente concordi, nei limiti delle approssimazioni sperimentali, con quelli previsti in base alle leggi dell'induzione, mettendo a calcolo i dati caratteristici (geometrici e fisici) del dispositivo adoperato nella corrispondente serie di misure.

Si ritiene, che ciò possa considerarsi come diretta riprova sperimentale di validità per la legge dell'induzione magnetoelettrica e quindi anche per la prima equazione di Maxwell.

Geologia. — *Qualche nuovo dato sul Glaciale della Valle Brembana e della Valle Seriana in Lombardia.* Nota (*) del Corrisp. ARDITO DESIO.

Dopo la pubblicazione di due mie Note preliminari sul Glaciale delle valli Brembana, Seriana e Cavallina ⁽¹⁾, ho avuto occasione di ritornare in quelle valli se non per eseguire uno studio sistematico del Quaternario, per effettuare una nuova raccolta di dati necessari per il completamento del foglio geologico al 100. 000 « Bergamo ». È stato così che mi è capitato di trovare depositi morenici prewürmiani qualche chilometro più a valle dei più bassi da me precedentemente segnalati, per cui credo utile darne notizia qui almeno in via preliminare ripromettendomi di trattarne più ampiamente in una prossima occasione.

Uno dei depositi morenici suddetti si trova nei dintorni di S. Giovanni Bianco, 5 km. a valle della morena di La Goggia, e precisamente sulla scarpata orientale del terrazzo di Cornalita. Si tratta di una morena di fondo, ricchissima di limo composta da ciottoli di rocce cristalline della Catena Orobica, di Verrucano, di porfidi quarziferi e di calcari e dolomie triassiche. I ciottoli calcarei sono tipicamente striati per cui non vi può essere il minimo dubbio che si tratti di un deposito morenico. La morena, che poggia direttamente su roccia in posto (arenarie e marne del Raibliano sup.), ha la base a 452 m. sul livello del mare ed a circa 67 m. sul livello attuale del fiume. È formata da un'alternanza di strati di limo con ciottoli e di conglomerato poligenico, spesso molto minuto, con ciottolini dell'alto bacino del Brembo. Superiormente il terrazzo è composto per circa 15 m. da un deposito di ciottoli (di rocce dell'alto Brembo) coperti da circa 3 m. di ferretto. Il ciglio del terrazzo giace a 520-530 m. sul livello del mare, ossia a 130-140 m. sull'alveo attuale del Brembo. I 67 m. inferiori della scarpata del terrazzo sono composti da roccia in posto (Raibl sup.).

Il medesimo sistema di terrazzi si ritrova anche più a monte e nei dintorni di Darco e di La Costa, sopra Camerata Cornello, presenta grossi erratici rivelando anche là la presenza di materiale morenico ⁽²⁾.

La mancanza di tagli freschi nelle vicinanze non mi ha permesso di esaminare con sufficiente precisione la struttura. Sulla scarpata sottostante

(*) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) A. DESIO, *Appunti ed osservazioni sul Glaciale della Valle Brembana (Bergamo)*. « Riv. Geografica Italiana », anno LI, fasc. 1-3, Firenze 1944. ID., *Appunti ed osservazioni sul Glaciale della Valle Seriana e della Valle Cavallina (Bergamo)*. Ibidem, vol. LII, fasc. 1-4, Firenze 1945.

(2) Fu il collega prof. Nangeroni a segnalarmi per primo la presenza di un grosso erratico nei dintorni di Cornello, di cui mi inviò anche una fotografia.

è però bene visibile un conglomerato poligenico, relativamente ricco di calcari e dolomie, potente quasi un centinaio di metri di cui si trovano vari lembi anche più a monte sino a Lenna. In questo conglomerato sono pure contenuti presso la base ciottoli striati, come ho avuto occasione di segnalare in una delle mie Note precedenti. Sembra, in complesso, che si tratti di un deposito dello stesso tipo, che stava in relazione con uno sbarramento morenico esistente appena a valle di S. Giovanni Bianco – ossia quasi 9 chilometri a valle delle morene würmiane – che ha causato l'interramento della valle e per qualche tempo un certo ristagno d'acqua. Va ricordato infatti che un deposito di limo, che copre la roccia in posto, si trova sulla riva sinistra del Brembo presso Scalvino, deposito che occupa una posizione stratigrafica del tutto corrispondente a quello morenico di S. Giovanni Bianco, in quanto esso pure è coperto da un bancone di conglomerato poligenico che rappresenta la prosecuzione verso monte di quello di Camerata-Cornello.

Un altro deposito morenico con ciottoli striati, che prima d'ora non avevo segnalato, è visibile presso la base della scarpata del terrazzo di Parre in Val Seriana. Lo si vede lungo la rotabile che sale da Ponte della Selva a Nossà: i ciottoli striati sono abbondanti ed associati con essi sono ciottoli di rocce dell'alto bacino del Serio fra cui numerosi quelli di Verrucano. Il grande terrazzo di Nossà è composto per la parte rimanente da un conglomerato poligenico che presenta tracce di stratificazione, ma che contiene ciottoli striati anche più in alto di quelli indicati. Nella parte più alta il conglomerato è coperto da uno strato di breccia calcarea di origine locale, rivestita superiormente da un manto di ferretto potente qualche metro. Il ciglio del terrazzo di Parre giace a 575–580 m., ossia 120–125 m. sopra il fondovalle attuale. Lo stesso tipo di deposito del terrazzo di Nossà compone anche i terrazzi ferrettizzati di Premolo e di Pradello, ove si può distinguere abbastanza chiaramente una serie di rilievi superiori che salgono sul fianco vallivo sin oltre 600 m. d'altezza, con direzione trasversale all'asse della valle, che attribuirei a resti di cordoni morenici frontali.

Osservato da questi cordoni, il terrazzo di Nossà appare come un lembo dell'antico bacino a lingua dell'antico ghiacciaio cui si deve la costruzione dei cordoni suddetti. I quali distano circa 2,5 km. dai cordoni morenici würmiani della Selva di Clusone.

I due sistemi glaciali prewürmiani sopra ricordati presentano varie caratteristiche comuni e per il momento ho motivi per ritenerli contemporanei, anche se la loro distanza dagli apparati morenici frontali würmiani è molto diversa.

Tracce di resti glaciali meno chiari dei precedenti ho rinvenuto in Valle Seriana, sul fondo di una vallecola dei pressi di Gazzaniga ove a 412 m. sul livello del mare esiste un masso di oltre 1 m³ di volume composto da Verrucano, il quale potrebbe essere di trasporto glaciale.

Il terrazzo immediatamente soprastante alla vallecola suddetta ha il ciglio a 440 m. sul livello del mare ed a 70 m. sull'alveo del Serio. È composto da un conglomerato poligenico con molti ciottoli appiattiti di Verru-

cano e di altre rocce dell'alto Serio, ferrettizzato superiormente per qualche metro.

Un deposito morenico di fondo molto simile a quello di S. Giovanni Bianco per l'abbondanza dell'argilla era stato da me trovato alcuni anni fa anche in Valsassina a 685 m. sul livello del mare sul fondo di una vallecola, presso il Ponte della Vittoria di Maggio a contatto diretto con la roccia in posto (Raibliano sup.). Anche qui nell'argilla avevo trovato ciottoli striati. L'affioramento morenico giace alla base di un terrazzo che ha il ciglio a 750 m. sul livello del mare. Più a valle il banco di limo si fa più potente e costituisce un livello continuo che si può seguire lungo le pendici montane fra il Ponte della rotabile Balisio-Barzio a q. 630 fin presso Baite Moncucco con l'aspetto di un deposito lacustre.

Questo giacimento è descritto in una Nota di Nangeroni ⁽³⁾, il quale lo attribuisce alla glaciazione günziana.

Rimane ora da accennare al problema dell'età degli apparati morenici di cui ho detto sopra.

Sia quello di S. Giovanni Bianco, sia quello di Parre sono situati vari chilometri a valle degli anfiteatri morenici freschissimi di S. Martino dei Calvi in Val Brembana e della Selva di Clusone in Valle Seriana. Le condizioni di alterazione dei terreni soprastanti con 3 o più metri di ferretto farebbero pensare a depositi per lo meno di età mindeliana. Ma ci si domanda allora come mai nulla è rimasto degli apparati morenici rissiani? D'altra parte l'imponenza dei depositi morenici della zona Premolo-Nossa e la loro relativa vicinanza all'anfiteatro morenico würmiano della Selva indurrebbe ad attribuire il giacimento al Rissiano piuttosto che al Mindeliano. Quanto a quello della Val Brembana possono rimanere dubbi fra Rissiano e Mindeliano. Escluderei al momento il Günstiano che non trova giustificazioni. I conglomerati che comunemente vengono chiamati localmente « ceppo » hanno età diverse e la presenza di morene alla base di essi non è sufficiente per riferirle a tale età.

L'alterazione superficiale del deposito di Cornalita è un po' diversa da quello di Parre, e così pure l'altezza sul fondovalle attuale. La differenza principale però consiste nella maggiore distanza dalla fronte würmiana del primo. Tutto ciò può essere sufficiente a giustificare il riferimento dei giacimenti a due glaciazioni diverse?

Al presente non ho elementi sufficientemente sicuri per dare una risposta. Mio proposito, per il momento, è soltanto quello di segnalare alcuni nuovi dati di fatto. L'interpretazione dei dati stessi va fatta con cautela e soltanto quando ne sarà stata esaurita la raccolta e non senza prima averli messi a confronto con quelli di altri giacimenti glaciali analoghi.

(3) G. NANGERONI, *Tre nuovi lembi di morenico günstiano nelle Prealpi Lombarde*. « Rend. Ist. Lombardo di Sc. e Lettere », vol. LXXXIII, p. 219, Milano 1950.

Mineralogia. — *Ralstonite e bisolfato sodico (matteuccite) fra i prodotti delle fumarole vesuviane.* Nota del Socio GUIDO CAROBBI e di CURZIO CIPRIANI, presentata (*) dal Socio G. CAROBBI.

I miscugli salini della grotta cunicolo formata dalle lave nel quadrante NE del fondo del cratere vesuviano nel dicembre 1933 contenevano dei bisolfati associati a fluoruri. Uno di noi stabilì l'esistenza in essi di mercallite, di bisolfato sodico e di un fluoruro di alluminio, magnesio e sodio (calcio) non separabile allo stato di purezza (1).

Adesso nuove ricerche su altri campioni delle stesse stalattiti (raccolti il 7 febbraio 1934) hanno permesso di identificare tale fluoruro con la ralstonite, minerale molto raro finora mai trovato al Vesuvio, e neanche in Italia. Inoltre ulteriori indagini chimiche confermate dai fotogrammi delle polveri hanno convalidato l'esistenza nel prodotto vesuviano del bisolfato sodico monoidrato, nuovo minerale, per il quale si propone il nome di matteuccite per onorare la memoria di Vittorio Matteucci (2), il direttore dell'osservatorio vesuviano che seguì il grande incendio dell'aprile 1906 tenacemente attaccato alle sue ricerche nonostante i pericoli dell'eruzione.

Le stalattiti in esame, di circa 5-6 cm di lunghezza, erano costituite da tre strati successivi di sali, depositatisi in tempi diversi, che in parte si erano mescolati ed avevano reagito fra loro. Lo strato esterno (A) è una polvere grigio-verde facilmente separabile con una spazzola, la parte mediana (B) è di colore giallo e di maggiore consistenza, l'interno (C) è costituito da un miscuglio salino bianco e molto compatto.

Per l'analisi una porzione di ognuno degli strati veniva fusa con carbonato sodico; dalla soluzione acquosa del prodotto della fusione si separava la silice con carbonato ammonico, poi si precipitava il fluoro come CaF_2 ed infine il radicale solforico con cloruro di bario. Per la determinazione dei cationi nel residuo della soluzione acquosa del prodotto della fusione sono stati usati i soliti metodi. Gli alcali sono stati determinati su altre porzioni dei miscugli attaccate con HF ed H_2SO_4 . L'acidità è stata determinata titolando con potassa $\text{N}/10$.

L'acqua veniva pesata direttamente facendola assorbire da cloruro di calcio. La calcinazione del minerale veniva fatta in corrente di aria secca in un tubo di porcellana posto in un forno elettrico. I vapori acidi venivano trattieneuti da un forte strato di ossido di bario racchiuso in reticelle di ottone;

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) G. CAROBBI, *Fluoruro di alluminio, magnesio e calcio, bisolfato sodico, mercallite ed hieratite fra i prodotti dell'attività vesuviana del 1934*. «Atti della R. Accademia di scienze, lettere ed arti». Modena. Vol. I, serie V, 1936.

(2) VITTORIO MATTEUCCI nacque a Sinigaglia il 15 ottobre 1862 e morì all'osservatorio vesuviano il 16 luglio 1909.

per spostamento del forno elettrico lungo il tubo l'ossido di bario poteva poi essere nuovamente riscaldato dopo avvenuta la decomposizione del minerale. Il pH è stato determinato per via colorimetrica e anche potenziometrica ⁽³⁾. I risultati delle analisi sono riuniti nella seguente tabella.

TABELLA I.

	A	B	C
SiO ₂	2.46	1.18	tracce
TiO ₂	—	—	0.22
Fe ₂ O ₃	1.63	3.90	6.89
Al ₂ O ₃	1.80	23.36	21.79
CaO	0.32	6.49	4.32
MnO	—	—	0.06
MgO	0.18	5.12	4.44
CuO	0.27	—	—
Na ₂ O	9.08	5.50	6.39
K ₂ O	20.58	10.41	11.99
SO ₃	36.10	13.76	20.10
Cl	6.10	2.49	1.12
F	10.93	22.70	18.83
H ₂ O	16.29	15.08	11.84
	<hr/> 105.74	<hr/> 109.99	<hr/> 107.99
O per F ₂ e Cl ₂	5.88	9.90	8.18
	<hr/> 99.86	<hr/> 100.09	<hr/> 99.81

Esprimendo l'analisi in ioni e l'acidità trovata in idrogenioni e detraendo dall'acqua gli ossidrilari necessari per saturare i cationi del miscuglio salino si hanno i risultati riuniti nella tabella II.

L'esame microscopico della parte A, più esterna, ha mostrato l'esistenza nel miscuglio di cristalli minutissimi rombici positivi di mercurite. Col metodo dell'immersione sono stati determinati i due indici $\alpha = 1.445$ e $\gamma = 1.491$; col tavolino universale è stato misurato l'angolo degli assi ottici $2V_{\gamma} = 56^{\circ}$. Lo stesso minerale già trovato nei prodotti delle stesse fumarole da uno di noi ⁽⁴⁾ è stato identificato anche nei miscugli B e C.

Dettagliate ricerche microscopiche hanno permesso di constatare che oltre al bisolfato potassico sono presenti dei cristallini del bisolfato sodico monoidrato identificabili per il loro grande angolo degli assi ottici. Mentre

(3) Soluzione acquosa a 0.5 %.

(4) G. CAROBBI, « *Mercallite* », nuovo minerale fra i prodotti dell'attività fumarolica vesuviana del 1933. « Rend. R. Accademia dei Lincei », ser. 6^a, vol. 21, p. 385 (1935).

	A			B			C		
	%	R.M.	R.E.	%	R.M.	R.E.	%	R.M.	R.E.
Si ⁴⁺	1.15	0.041	0.164	0.55	0.020	0.080	—	—	—
Ti ⁴⁺	—	—	—	—	—	—	0.13	0.003	0.011
Fe ³⁺	1.14	0.020	0.060	2.73	0.049	0.147	4.82	0.086	0.259
Al ³⁺	0.95	0.041	0.123	12.36	0.458	1.374	11.53	0.427	1.285
Mn ⁴²	—	—	—	—	—	—	0.05	0.001	0.002
Ca ⁴²	0.23	0.005	0.011	1.619	0.116	0.232	3.09	0.077	0.154
Mg ⁷²	0.11	0.004	0.009	3.09	0.127	0.254	2.68	0.110	0.220
Cu ¹²	0.22	0.003	0.006	—	—	—	—	—	—
Na ⁺	6.74	0.293	0.293	4.08	0.177	0.177	4.74	0.206	0.206
K ⁺	17.08	0.437	0.437	8.64	0.221	0.221	9.95	0.254	0.254
H ⁺	0.52	0.516	0.516	0.08 (s)	0.079	0.079	0.17 (s)	0.169	0.169
Cl ⁻	6.10	0.172	0.172	2.49	0.070	0.070	1.12	0.032	0.032
SO ⁻² ₄	43.31	0.451	0.902	16.51	0.172	0.344	24.12	0.251	0.502
F ⁻	10.93	0.575	0.575	22.70	1.195	1.195	18.83	0.991	0.991
OH ⁻	—	—	—	16.24 (s)	0.955	0.955	17.53 (s)	1.031	1.031
H ₂ O	11.65	0.647	—	5.73	0.318	—	1.03	0.057	—
	100.13			99.84			99.79		
			pH = 1.40			pH = 1.95			

Nelle parti B e C una parte del ferro è allo stato ferroso.

(5) Non deve meravigliare la coesistenza nel miscuglio di sali acidi (bisolfati) con sali basici (ralstonite). I bisolfati nello strato più interno (C) ed in quello intermedio (B) sono in piccola quantità e coesistono allo stato solido a temperatura ordinaria con la ralstonite. Nella titolazione a freddo della acidità il fluoro di alluminio, magnesio e sodio non viene praticamente attaccato dalla soluzione diluita dei bisolfati. Nello strato esterno (A), dove predominano i bisolfati, il fluoro basico è assente.

per la merccallite, col tavolino universale ed il reticolo di Wulf, si calcola $2V_\gamma = 56^\circ$, per il $\text{NaHSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ artificiale del commercio noi abbiamo misurato $2V_\gamma = 86^\circ$ circa. Sui miscugli dei due bisolfati abbiamo constatato che la distinzione fra loro può essere basata sull'angolo degli assi ottici perchè gli indici del composto di sodio sono molto vicini a quelli del sale di potassio ⁽⁶⁾.

Del resto la presenza del bisolfato sodico sulla parte A della stalattite è dimostrata anche dai risultati delle analisi; infatti gli idrogenioni sono in quantità superiore a quella necessaria per trasformare in bisolfato tutto il potassio presente, nonostante siano presenti anche cloruri alcalini.

I bisolfati nella parte B e C sono accompagnati da un fluoruro in cristallini minutissimi monorifrangenti con $n = 1.440$. L'indice di rifrazione della ralstonite, cubica, oscilla secondo Winchell ⁽⁷⁾ fra 1.399 e 1.43, secondo Gordon $n = 1.399$ ⁽⁸⁾. L'indice di rifrazione varia naturalmente con la sostituzione isomorfa del fluoro con l'ossidril e con la quantità di alluminio presente e la sua determinazione non è certo sufficiente per la identificazione della ralstonite.

L'esame roentgenografico con spettrogrammi delle polveri ha però dimostrato in modo sicuro che nel miscuglio è presente la ralstonite ed ha confermato la presenza del $\text{NaHSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$. Abbiamo infatti identificato le seguenti righe caratteristiche:

d	Int.	Ralstonite	Int. ⁽⁹⁾
5.59 Å	ff	5.71	100
2.99	f	2.99	80
2.82	f	2.86	70

e anche una riga $d = 3.47$ forte che interpretiamo come l'unione delle due caratteristiche del $\text{NaHSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ $d = 3.55$ e $d = 3.43$ ⁽¹⁰⁾ ambedue di intensità 100. Riteniamo di avere identificato anche la $d = 5.20$ di intensità 60 che appare debole nel nostro fotogramma. Comunque la presenza della mat-teuccite nel miscuglio vesuviano è anche dimostrata dalle indagini chimiche e dalle ricerche microscopiche.

(6) Secondo A. N. WINCHELL (*The microscopic characters of artificial inorganic solid substance or atificial minerals*. New York 1931, p. 221): gli indici del bisolfato sodico menodrato (?) sono:

$$\alpha = 1.43 \quad \beta = 1.46 \quad \gamma = 1.47$$

ma da questi indici si calcola $2V_\alpha = 60^\circ$ cioè il cristallo risulta negativo. Non ci è stato possibile ottenere dei cristalli ben formati e orientabili in modo da potere determinare esattamente le proprietà ottiche in luce monocromatica. Queste indagini sul composto artificiale saranno però proseguite. Negli indici dati da Winchell e che sarebbero dovuti a Bolland (la citazione risulta però errata) basterebbe porre $\beta = 1.449$ fermi restando i valori di α e di γ per avere $2V_\gamma = 86^\circ$ e cioè cristalli positivi.

(7) A. N. WINCHELL, *Elements of optical mineralogy*, Parte II, 4^a ediz. New York 1951, p. 36.

(8) «Ac. Sc. Philadelphia», Not. Nat. N. II (1939).

(9) *X-Ray diffraction data cards*, pubblicato a cura della «Joint Committee on chemical analysis by X-ray diffraction methods». Philadelphia 1950. Scheda 3-0102.

(10) Stesse tabelle, scheda 1-0546.

Gli spettrogrammi delle polveri sono stati eseguiti con una camera di mm. 57.3 di diametro. La radiazione usata è stata la K_{α} del Cu; il tempo di posa è stato di ore 9.30' con 40 Kv.

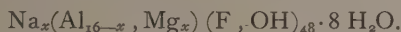
Abbiamo eseguito anche il fotogramma della matteuccite artificiale ed abbiamo constatato che effettivamente la riga da noi identificata è la più evidente del fotogramma.

Possiamo adesso cercare di ricostruire la formula della ralstonite vesuviana.

Secondo le vecchie analisi di J. Brandl e di Penfield e Harper la ralstonite avrebbe la formula: $(Mg, Na_2)Al_3(F, OH)_{11} \cdot 2 H_2O$. Il materiale analizzato proveniva da Ivigtut. I cristalli della stessa località studiati da A. Pabst⁽¹¹⁾ sono stati assegnati alla classe esacisottaedrica del sistema cubico, il gruppo spaziale è probabilmente O_h^h e la formula dei cristalli di Pabst sarebbe: $Na_{2.8}(Al, Mg)_{16}(F, OH)_{48} \cdot 7 H_2O$.

R. B. Ferguson⁽¹²⁾ indagando su un cristallo ottaedrico di Ivigtut col metodo delle polveri ha confermato i risultati di Pabst (salvo lievi variazioni nelle dimensioni della cella) ed ha proposto di scrivere la formula: $Na_{16-x}(Al, Mg)_{16}(F, OH)_{48} \cdot 8 - y H_2O$ con x circa eguale a 13 ed y a circa 1.

Successivamente il Pabst ha studiato una classificazione strutturale dei fluoaluminati⁽¹³⁾ e per la ralstonite usa la formula: $Na_x(Al_{16-x}, Mg_x)(F, OH)_6 \cdot H_2O$ che sembra essere la più esatta. Nella cella elementare sono contenute 8 delle sopracitate molecole pertanto si deve scrivere più completamente:



Per tentare il calcolo della formula della ralstonite vesuviana possiamo prendere in esame l'analisi della parte B che contiene la maggiore quantità di fluoro e quindi di ralstonite e la minore quantità di bisolfati.

Detraendo a mezzo dei rapporti equivalenti⁽¹⁴⁾ il bisolfato potassico ed il bisolfato sodico (tenendo conto che la somma dei bisolfati dovrà corrispondere all'H % e che il rapporto K/Na si può considerare eguale a quello dello strato esterno dove non c'è ralstonite cioè a circa 5.5 : 1) si ottiene:

(11) A. PABST, *Formula and structure of ralstonite*. «The Am. Mineralogist.», vol. 24, p. 566 (1939).

(12) R. B. FERGUSON, *Observations on some aluminium fluorides minerals*. «The Am. Mineralogist», vol. 34, p. 383 (1949).

(13) A. PABST, *A structural classification of fluoaluminates*. «The Am. Mineralogist», vol. 35, p. 149 (1950).

(14) Detratti:

	R.E.		R.E.		R.E.		R.E.
SO ₄	0.158	Cl	0.070	Ca	0.232	Si	0.080
H	0.079	SO ₄	0.186	F	0.232	OH	0.080
K	0.067	F	0.045				
Na	0.012	K	0.154				
		Fe	0.147				

I campioni, analizzati dopo trattamento con acqua per asportare la parte solubile lasciano un residuo con silice idrata. Dato il sistema di calcolo usato abbiamo considerato il Si legato agli ossidrilili senza peraltro volere affermare che sia presente $Si(OH)_4$.

	R.E.	R.A.		
Al . . .	1.374	0.458	} 0.585	1.96
Mg . . .	0.254	0.127		
Na . . .	0.165	0.165	0.165	0.55
F . . .	0.918	0.918	} 1.793	6
OH . . .	0.875	0.875		

e si ha quindi la formula:



Occorre notare che nei calcoli fatti potrebbe essere considerato non esatto solo il valore del rapporto K/Na ma un eventuale errore potrebbe modificare il rapporto equivalente del sodio al massimo di 0.01 ciò che influirebbe assai poco sulla formula.

I rapporti equivalenti della precedente tabella portano alle seguenti percentuali: Al 12.35, Mg 3.09, Na 3.80, F 17.44, OH 14.88. Totale 51.56.

Trattando il miscuglio B con acqua bollente e lavando a fondo con acqua acidulata con acido acetico si ottiene un residuo che seccato a 110° (con che non si eliminano gli ossidril e neanche l'acqua di cristallizzazione della ralstonite) risulta essere il 56.04 % del miscuglio totale naturale. Questo residuo non è costituito da sola ralstonite ma contiene anche fluoruro ed, in parte, solfato di calcio nonchè solfati provenienti dalla reazione parziale fra bisolfati e fluoruri. L'analisi mostra che esso contiene ancora: SiO₂ 1.18 Al 11.53, Ca 2.12, Mg 2.45, Na 4.08, F 18.14, SO₄ 6.34, OH e H₂O (per differenza) 10.20. Totale 56.04. Specialmente la presenza nel residuo insolubile del 4.08 % Na (sodio di sali insolubili) convalida la formula calcolata per la quale si aveva Na % 3.80.

Le analisi conosciute della ralstonite sono le seguenti:

	I	II
Na . . .	5.05	4.27
Mg . . .	3.90	4.39
Al . . .	23.06	24.25
F . . .	57.68	39.91
H ₂ O . . .	10.17	18.73
	<hr/> 99.86	<hr/> 91.55

I. - Analisi di Brandl corretta da Penfield e Harper per le impurezze di thomsenolite;

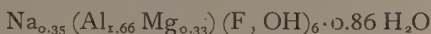
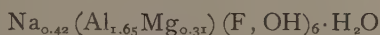
II. - Analisi di Penfield e Harper.

(15) Non è possibile calcolare l'acqua di cristallizzazione ma corrispondendo le righe dello spettrogramma delle polveri con quelle della ralstonite dobbiamo ammettere la presenza dell'acqua.

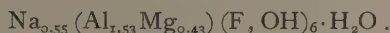
Esse danno i seguenti rapporti molecolari ed equivalenti calcolando gli ossidrili necessari per la neutralità del sale.

	R. M.	R. E.				
Na	0.219	0.219	3.104	0.186	0.186	3.244
Mg	0.160	0.320		0.180	0.361	
Al	0.855	2.565		0.899	2.697	
F	3.036	3.036	3.104	2.101	2.101	3.245
OH	0.068	0.068		1.144	1.144	
H ₂ O	0.530			0.468		

e quindi si hanno le formule:



mentre per la ralstonite vesuviana avevamo calcolato:



Sembra quindi di poter affermare che nella formula della ralstonite il sodio è sempre in eccesso sul magnesio e che quindi bisogna prendere in considerazione anche l'eventualità di una loro molto parziale sostituzione isomorfa nel reticolo. Noi sospettiamo anche che il sodio possa essere *parzialmente* sostituito dal calcio.

Delle tre parti A, B, C della stalattite in esame è stata anche eseguita l'analisi spettrografica semiquantitativa. Sono stati identificati i seguenti elementi:

	A	B	C
As	— 4 ⁽¹⁶⁾	— 4	— 5
B	ass	ass	tracce
Co	ass	— 5	ass
Cu	0.22 %	— 1	— 1
Mn	— 2	— 1	0.05 %
Pb	— 1	— 3	— 4
Sc	— 3	— 5	— 4
Sr	— 5	— 1	— 5
Ti	— 4	— 2	0.13 %
Tl	— 2	— 3	— 4
V	— 5	— 4	ass
W	ass	— 4	ass

Sono stati cercati con esito negativo nelle tre parti della stalattite:

Ag, Au, Ba, Be, Bi, Cd, Ce, Cr, Ga, Ge, Hg, In, Ir, La, Li, Mo, Nb, Ni, Os, Pd, Pt, Rb, Rh, Ru, Sb, Sm, Sn; Ta, Te, Th, Zn, Zr.

(16) —1= circa 0.1 %; —2= 0.01 %; —3= 0.001 %; —4= 0.0001 % ecc.

Microbiologia. — *Azione dei raggi ultravioletti sulla liberazione da calore di nucleotidi da cellule batteriche* (*). Nota (**) del Corrisp. LUIGI CALIFANO.

Se si espongono al calore cellule batteriche gram positive o gram negative, sospese in soluzione fisiologica, si ha liberazione di nucleotidi che passano in soluzione in essa e che si possono dimostrare sia con l'assorbimento nell'ultravioletto (massimo a 2575 Å) che con la reazione di Bial dei pentosi o con la stima del fosforo nucleotidico ⁽¹⁾.

Non si può ancora dire se si tratti di polinucleotidi o di mononucleotidi liberi esistenti come tali nelle cellule, o scissi da più complesse molecole per azione del calore. Certo è che si tratta di ribonucleotidi; solo a temperature elevate (100° C) si ha anche liberazione di desossiribonucleotidi, ma qui si tratta di un fatto banale, del passaggio cioè nel liquido di costituenti solubili dalle cellule frammentate e più o meno disfatte per azione del calore, fatto del tutto diverso di quello del distacco di ribonucleotidi.

Si è dimostrato che il fenomeno avviene con sviluppo diverso in specie batteriche differenti, sia per la temperatura minima alla quale esso si inizia, che per quella alla quale raggiunge il massimo di sviluppo. Per i germi più sensibili al calore (gonococco, pneumococco) la temperatura minima è più bassa (42°-45° C) di quella efficace per i germi più resistenti (stafilococco 55° C). Più marcata è la differenza per la temperatura massima che è, per esempio, intorno a 60° C per *l'Escherichia coli* e intorno a 70° C per lo *Staphylococcus aureus*. È, pertanto, sembrato possibile ⁽²⁾ indicare come «temperatura ottimale» quella alla quale la liberazione di nucleotidi dalle cellule batteriche raggiunge il massimo sviluppo e cioè la temperatura al disotto e al disopra della quale si ha minore liberazione di nucleotidi. Sembra chiaro dalle ricerche finora eseguite ⁽³⁾ e da quelle riferite in questa Nota ed in quella successiva che la temperatura ottimale sia determinata dalla coagulazione delle proteine citoplasmatiche. La coagulazione proteica limita la possibilità di passaggio dei nucleotidi in soluzione o perchè parte di essi resta incluso nel precipitato o perchè è impedita, a causa della denaturazione, la rottura da calore dei legami chimici che li legano nella cellula a più complesse molecole.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Microbiologia dell'Università di Napoli.

(**) Presentata nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) L. CALIFANO, *Ricerche sulla separazione di acido nucleinico da cellule batteriche per azione del calore*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 8, 94 (1950).

(2) L. CALIFANO, *Liberazione da calore di acido nucleinico dalle cellule batteriche*. « Primo Symposium internazionale di chimica microbiologica, Roma, 1951 » (in corso di stampa).

(3) L. CALIFANO, *Azione del calore sulla liberazione di acido nucleinico dai batteri*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 9, 142 (1950).

È anche verosimile che i nucleotidi che si riscontrano nei liquidi di sospensione di cellule esposte a temperature superiori a quella ottimale corrispondano alla aliquota liberata dal calore nel tempo occorso a raggiungere dalla temperatura ambiente quella ottimale, cioè per esposizione a temperature a questa inferiori.

È da notare che per una data temperatura si libera una determinata quantità di nucleotidi che non aumenta, come che si prolunghi il tempo di esposizione a quella temperatura, ed occorre aumentare questa per ottenere una più alta liberazione di nucleotidi e così successivamente fino al raggiungimento della temperatura ottimale (La Manna) ⁽⁴⁾. In conclusione, la liberazione da calore dei nucleotidi dalle cellule batteriche è in funzione della temperatura fino a che, avveratasi la denaturazione proteica, cessa la progressione. La esposizione di cellule per la durata di dieci minuti ad una determinata temperatura è praticamente sufficiente per ottenere il massimo risultato a quella temperatura.

Le presenti ricerche concernono la liberazione di nucleotidi per azione del calore da cellule batteriche esposte all'azione di raggi ultravioletti.

Le ricerche sono state eseguite con sospensioni omogenee di cellule batteriche provenienti da culture in agar o in brodo, lavate per tre volte con soluzione fisiologica e filtrate per filtro di vetro Jena G₂ in modo da allontanare particelle sospese del terreno o ammassi di cellule.

Per la irradiazione si è usata una lampada «germicidal».

Le cellule batteriche erano quindi esposte per 10 minuti alla temperatura voluta, venivano, quindi, centrifugate a 10.000 o 12.000 giri e si ottenevano liquidi assolutamente privi di cellule (durata della centrifugazione circa 20 minuti). Le determinazioni di assorbimento nell'ultravioletto erano eseguite su tali liquidi, se necessario diluiti, con uno spettrofotometro Beckman, usando cuvette di quarzo di cm. 1 di lato e come sorgente luminosa la lampada a idrogeno.

La irradiazione di cellule batteriche (*Escherichia coli*, *Staphylococcus aureus*, *Diplococcus pneumoniae*, *Bacillus subtilis*) determina distacco da esse di piccolissime quantità di nucleotidi, talvolta appena avvertibili all'assorbimento a 2575 Å, aumenta, invece, sensibilmente, l'assorbimento nella regione delle onde più corte (2250 Å) ciò che sta ad indicare passaggio in soluzione di altri costituenti citoplasmatici. Questo passaggio corrisponde a quanto osservato da Loofbourow ⁽⁵⁾ che ha constatato il passaggio in soluzione di purine, di nucleotidi, di nucleosidi, di aminoacidi e di varie vitamine (biotina, acido folico, acido nicotinico, riboflavina e specialmente inosite) da cellule di lievito sottoposte ad irradiazione da raggi ultravioletti.

(4) N. LA MANNA, *Sulla influenza del tempo di riscaldamento sulla liberazione da calore di acido nucleico nei batteri*. «Nuovi Ann. Ig. e Microb.», 1, 424 (1950).

(5) J. R. LOOFBOUROW, *Effects of ultraviolet radiation on cells*. «8th Symposium of the Soc. for the study of development and growth», p. 77. Growth, 12, 1948.

La esposizione al calore - temperatura ottimale - di sospensioni di cellule batteriche irradiate con raggi ultravioletti determina liberazione di nucleotidi in quantità molto minori di quelle che si liberano dallo stesso numero di cellule non irradiate ed esposte a quella temperatura. La prima figura

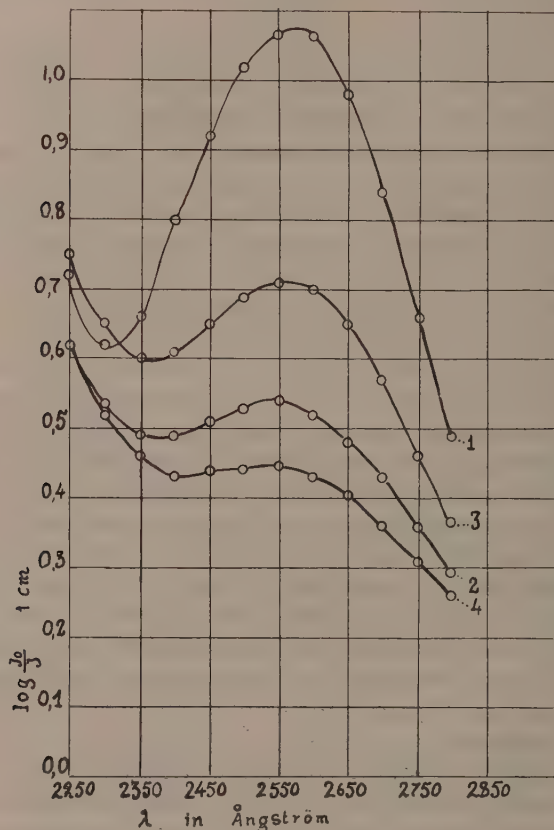


Fig. 1. - Curve di assorbimento di liquidi di centrifugazione di sospensioni di cellule di *E. coli*.

1 = cellule non irradiate riscaldate a 60°C. 2 = cellule irradiate riscaldate a 60°C. 3 = cellule non irradiate riscaldate a 70°C. 4 = cellule irradiate riscaldate a 70°C: Durata della irradiazione 90 minuti. Durata del riscaldamento 10 minuti.

riporta curve spettrofotometriche che dimostrano questo fenomeno. La seconda figura dimostra la dipendenza di esso dalla durata della irradiazione, cioè la quantità di ribonucleotidi che si libera per azione del calore è tanto più limitata quanto più a lungo le cellule sono state irradiate. È possibile, lavorando con sospensioni poco dense, esposte alla irradiazione ultravioletta in strato sottile, di ottenere anche totale assenza di liberazione di nucleotidi per azione del calore.

Si è ricercato se il più basso assorbimento allo spettrofotometro dei liquidi di sospensione delle cellule irradiate fosse dovuto effettivamente a minore quantità di nucleotidi passati in soluzione, ovvero a scissione delle molecole assorbenti (basi puriniche e pirimidiniche) per azione della luce

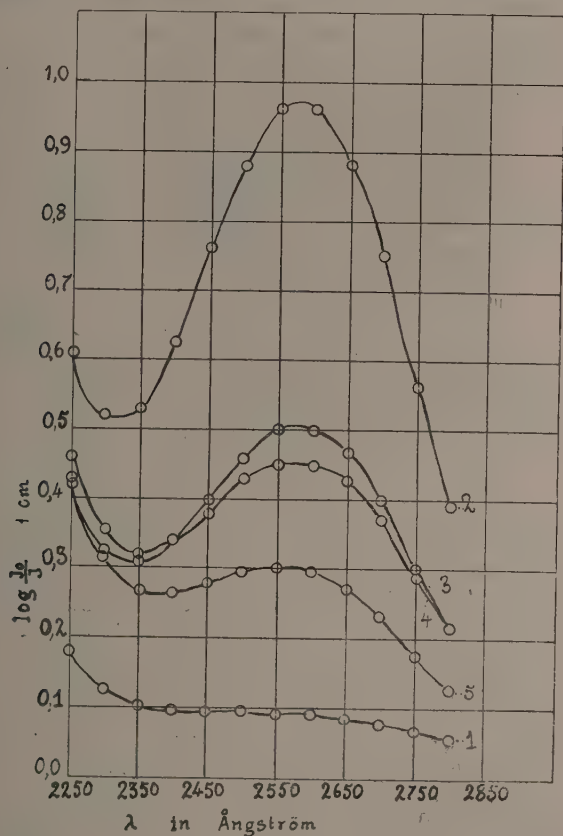


Fig. 2. — Curve di assorbimento di liquidi di centrifugazione di sospensioni di cellule di *E. coli*.

1 = cellule non irradiate e non riscaldate 2 = cellule non irradiate, riscaldate a 60°C. 3 = cellule irradiate per 30 minuti, riscaldate a 60°C. 4 = cellule irradiate per 60 minuti, riscaldate a 60°C. 5 = cellule irradiate per 90 minuti, riscaldate a 60°C. Durata del riscaldamento 10 minuti.

ultravioletta (fotolisi). A tale scopo sospensioni di cellule batteriche (*E. coli*, *St. aureus*, *B. subtilis*) erano esposte per dieci minuti alla temperatura ottimale per la liberazione da calore dei nucleotidi, venivano, quindi, centrifugate a forte velocità in modo da ottenere liquidi limpidi e privi di cellule. Di tali liquidi si determinava il potere di assorbimento tra 2250 e 2800 Å, si sottoponevano, quindi, alla irradiazione ultravioletta e si determinava di nuovo il potere di assorbimento. La 3^a figura riporta curve corrispondenti

a tali determinazioni, e si rileva come, in effetti, la irradiazione determini diminuzione del potere di assorbimento, cioè fotolisi delle basi azotate dei nucleotidi. Che i raggi ultravioletti causino diminuzione del potere di assorbimento degli acidi nucleinici è noto da varie ricerche e particolarmente da quelle di Loofbourow e collaboratori ⁽⁶⁾. Il fenomeno, come fa notare, oltre che lo stesso autore, anche Giese ⁽⁷⁾ non è stato ancora sufficientemente studiato, comunque è risultato che le basi puriniche sono più, resistenti di

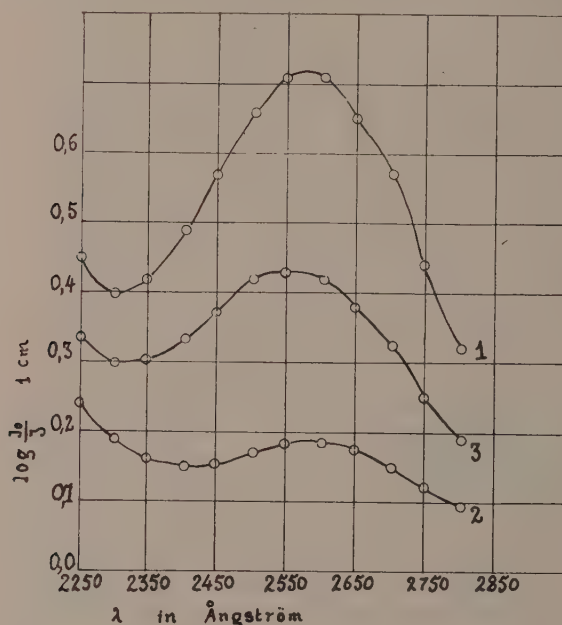


Fig. 3. - Curve di assorbimento di liquidi di centrifugazione di sospensioni di cellule di *E. coli*.

1 = cellule non irradiate, riscaldate a 60°C. 2 = cellule irradiate per 90 minuti, riscaldate a 60°C. 3 = cellule riscaldate a 60°C. per 90 minuti, quindi irradiazione del liquido per 90 minuti. Durata del riscaldamento 10 minuti.

quelle pirimidiniche. L'uracile è sensibilissimo e viene facilmente decomposto. Che avvenga decomposizione delle basi è dimostrato dal fatto che la esposizione di acido desossiribonucleinico alla irradiazione ultravioletta ha per effetto dapprima aumento del potere di assorbimento seguito poi da diminuzione, quando questa si avvera si ha caduta della viscosità e della birifrangenza di flusso.

L'aumento iniziale del potere di assorbimento è dovuto a rimaneggiamento molecolare, come è dimostrato dal fatto che l'uracile, per una irra-

(6) J. R. LOOFBOUROW, loc. cit.

(7) A. C. GIESE, *Action of ultraviolet radiation on protoplasm*. « *Physiol. Rev.* », 30, 431 (1950).

diazione insufficiente per la decomposizione, si trasforma in una sostanza che ha potenziale ossido riduttivo differente, capace pertanto di ridurre una soluzione di acido arsenofosfotungstico (Heyroth e Loofbourow) ⁽⁸⁾.

Nei liquidi, dunque, contenenti nucleotidi liberati per azione del calore dalle cellule batteriche, la diminuzione del potere di assorbimento è verosimilmente riportabile a fotolisi delle basi azotate. Non sembra, però, che questo fatto sia sufficiente a spiegare da solo la constatata diminuzione di nucleotidi liberati dal calore da cellule batteriche irradiate. Ciò si deduce dal fatto che la riduzione del potere di assorbimento nei liquidi irradiati è notevolmente minore di quella che si osserva per i liquidi corrispondenti ad egual numero di cellule irradiate e quindi esposte all'azione del calore. In altre parole, il liquido di sospensione di cellule irradiate ed esposte al calore ha un potere di assorbimento a 2600 Å molto minore di quello corrispondente ad egual numero di cellule non irradiate ed esposte al calore. Se si irradia questo liquido per lo stesso tempo per il quale sono state irradiate le cellule si ottiene diminuzione del potere di assorbimento ma in misura molto più limitata che nel primo caso. Inoltre, la reazione di Bial, praticata sul liquido corrispondente a cellule irradiate, è nettamente meno intensa di quella corrispondente a cellule non irradiate ciò che indica, in effetti, una più limitata liberazione di nucleotidi e non soltanto un effetto fotolitico. Se la diminuzione del potere di assorbimento fosse dovuta soltanto a questo la reazione di Bial dovrebbe essere della stessa intensità perchè la fotolisi si avvera sulle basi e non sul pentosio nucleotidico. Da ciò si deduce che l'abbassamento del potere di assorbimento dei liquidi di sospensione delle cellule batteriche irradiate è dovuto a due fattori, uno è la fotolisi delle basi azotate, l'altro è l'impedimento alla liberazione dei nucleotidi per azione del calore. Si può pensare, in base alle ricerche finora eseguite, che tale impedimento consista nella coagulazione di proteine citoplasmatiche che includono nel precipitato parte dei ribonucleotidi per cui ne è difficoltà il passaggio all'esterno della cellula o che è impedita la rottura da calore del legame chimico che unisce i nucleotidi a proteine del citoplasma stesso. Che i raggi ultravioletti causino coagulazione puntiforme del citoplasma risulta da vecchie e nuove ricerche ⁽⁹⁾ ed è verosimilmente da riportare all'azione coagulante esplicata da essi sulle proteine, come si deduce da tanti fenomeni più o meno diffusamente studiati (inattivazione di enzimi, aumento di sensibilità ai sali, diminuzione di solubilità, ecc.) e come anche risulta dalle osservazioni in campo oscuro di Rajewsky ⁽¹⁰⁾ che vide la comparsa di particelle rifrangenti, cioè di microfloculati in soluzioni di proteine sottoposte alla irradiazione ultravioletta.

(8) F. F. HEYROTH, and J. R. LOOFBOUROW, *Irradiation of nucleic acids and uracil*. « Nature », 131, 92 (1933).

(9) Vedi GIESE, loc. cit.

(10) B. RAJEWSKY, *Die Wirkungen der kurzwelligen Strahlen auf Erweisskörper*. « Bioch. Zeitsch. » 227, 272 (1930).

Va notato, infine, che l'abbassamento del potere di assorbimento dei liquidi di sospensione delle cellule batteriche irradiate si esercita così per la temperatura ottimale che per temperature a questa inferiori, come si può vedere dalla quarta figura che riproduce curve di assorbimento di liquidi di sospensione di cellule di *B. subtilis*.

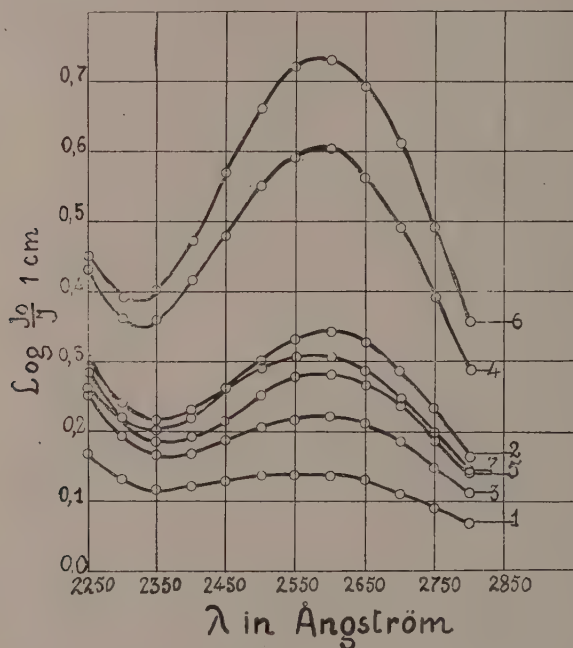


Fig. 4. - Curve di assorbimento di liquidi di centrifugazione di sospensioni di cellule di *B. subtilis*.

1 = cellule non irradiate e non riscaldate. 2 = cellule non irradiate, riscaldate a 50° C. 3 = cellule irradiate, riscaldate a 50° C. 4 = cellule non irradiate, riscaldate a 60° C. 5 = cellule irradiate, riscaldate a 60° C. 6 = cellule non irradiate, riscaldate a 70° C. 7 = cellule irradiate, riscaldate a 70° C. Durata della irradiazione 60 minuti; durata del riscaldamento 10 minuti.

In conclusione la irradiazione ultravioletta delle cellule batteriche riduce assai considerevolmente la quantità di nucleotidi che per azione del calore si stacca da esse e passa in soluzione. Tale riduzione è in parte dovuta a fotolisi delle basi puriniche e pirimidiniche dei nucleotidi e per estensione maggiore, verosimilmente, all'azione microcoagulante esercitata dai raggi ultravioletti sul citoplasma batterico.

Microbiologia. — *Denaturazione proteica e separazione da calore di nucleotidi dalle cellule batteriche*^(*). Nota^(**) del Corrisp. LUIGI CALIFANO.

Da esperienze variamente condotte si deve ammettere che la denaturazione proteica sia fattore limitante la separazione dalle cellule batteriche di nucleotidi per effetto del calore. Si è così veduto⁽¹⁾ che la separazione di nucleotidi cresce, per alcune specie batteriche, con l'aumentare della temperatura fino al punto in cui la intervenente coagulazione proteica arresta tale progressione. Questo è, ad esempio, il caso dello *Staphylococcus aureus*: da cellule esposte per dieci minuti alla temperatura di 55° C. si libera maggiore quantità di nucleotidi che a 50° C. e così progressivamente fino a 70° C. mentre la quantità decresce per temperature a questa superiori.

Per l'*Escherichia coli* il massimo di liberazione si ha a 60° C. e perciò a 70° C. la quantità di nucleotidi che si stacca dalle cellule è minore. Con ciò si suppone che componenti del citoplasma delle due specie batteriche vengano denaturati completamente a temperature differenti e ciò è in armonia con il fatto che esse sono variamente sensibili all'azione del calore umido, l'*E. coli* essendo notevolmente più sensibile dello *St. aureus*.

Ciò ha portato ad ammettere, per alcune specie batteriche, per il fenomeno del distacco da calore dei nucleotidi dalle cellule, un « optimum di temperatura » che corrisponde alla temperatura alla quale il fenomeno ha il massimo sviluppo e pertanto, al disotto e al disopra di esso, si ha passaggio in soluzione di minori quantità di nucleotidi⁽²⁾. Tale optimum di temperatura si presume venga determinato dalla influenza limitatrice che esercita la denaturazione proteica sulla separazione da calore dei nucleotidi. È verosimile che la quantità di nucleotidi che si ritrova nel liquido di sospensione delle cellule esposte a temperature superiori all'optimum corrisponda a quella che si è liberata nell'intervallo di tempo ed alle varie temperature gradatamente raggiunte fino all'optimum e ciò sarebbe in accordo con il fatto che la quantità di nucleotidi che si riscontra è tanto più bassa quanto più elevata è la temperatura di esposizione, perchè tanto più breve è il tempo di permanenza delle cellule alle temperature inferiori a quella corrispondente all'optimum. Anche armonizza con tale interpretazione il fenomeno della « flash sterilization » di Dubos⁽³⁾ che consiste nella rapida

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Microbiologia dell'Università di Napoli.

(**) Presentata nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) L. CALIFANO, *Azione del calore sulla liberazione di acido nucleinico dai batteri*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 9, 142 (1950).

(2) L. CALIFANO, *Liberazione da calore di acido nucleinico dalle cellule batteriche*. Primo *Symposium* internazionale di Chimica microbiologica, Roma, 1951 (in corso di stampa).

(3) R. J. DUBOS, *The autolytic system of pneumococci*. « J. exp. Med. », 65, 873 (1937).

immersione in acqua distillata a 80° o 85° C. di poche cellule batteriche, con il qual espediente è evitata, per le cellule gram positive, la perdita di questo carattere, e meglio ciò risulta da recenti ricerche di Cavallo ⁽⁴⁾ le quali dimostrano che la liberazione di nucleotidi è nella « flash sterilization » minore che se le cellule batteriche raggiungono gradatamente quelle temperature.

Un altro fatto che induce a ritenere che la denaturazione proteica agisca da fattore limitante la separazione di nucleotidi per azione del calore

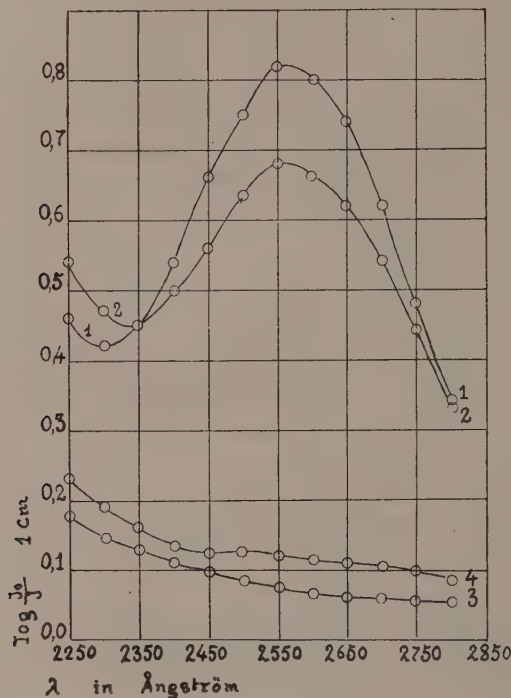


Fig. 1. - Liquidi di centrifugazione.

1 di cellule normali esposte a 60° C.; 2 di cellule normali esposte a 70° C.; 3 di cellule trattate con formaldeide ed esposte a 60° C.; 4 di cellule trattate con formaldeide ed esposte a 70° C. Concentrazione della formaldeide 10 M.

è quello descritto nella precedente Nota riportata in questo fascicolo sulla azione dei raggi ultravioletti. La forte riduzione che si ha per effetto di essi sul contenuto in nucleotidi del liquido di sospensione delle cellule è spiegato come dovuto in una certa misura alla fotolisi che si avvera delle basi puriniche e pirimidiniche e per più larga estensione alla azione microcoagulante dai raggi esercitata sul citoplasma, con effetto di ostacolo alla separazione da esso dei nucleotidi.

(4) G. CAVALLO, « Flash sterilization » e liberazione di acidi nucleinici dai batteri. « Nuovi Ann. di Igiene », 1, 414 (1950).

Con le ricerche qui riferite si è indagata l'azione di denaturanti proteici sulla liberazione da calore di nucleotidi da cellule batteriche.

Sospensioni omogenee in soluzione fisiologica di cellule di *E. coli*, da culture in agar o in brodo, lavate tre volte alla centrifuga, venivano unite con formaldeide o con acido tricloracetico o con alcool. Dopo un'ora di contatto si centrifugavano tali sospensioni a 10.000 giri e si lavavano per due o tre volte con soluzione fisiologica alla stessa velocità, in modo da rendere

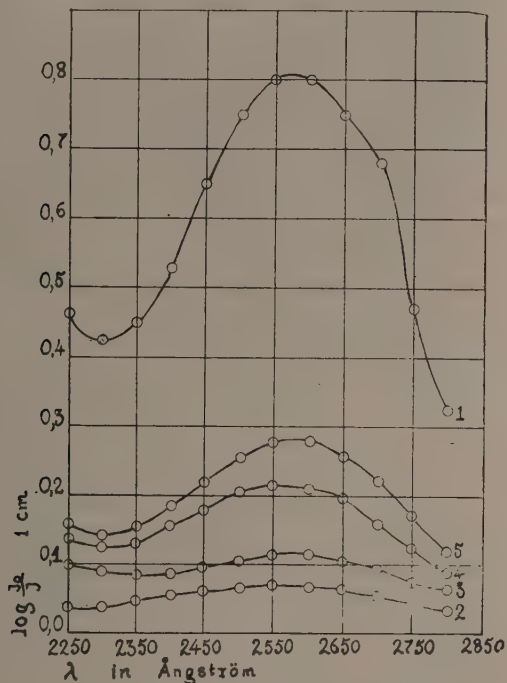


Fig. 2. - Liquidi di centrifugazione.

1 di cellule normali esposte a 60° C. 2 a 5 di cellule trattate con formaldeide quindi esposte a 60° C. Concentrazioni della formaldeide 2 = 1 M; 3 = 0,5 M; 4 = 0,3 M; 5 = 0,1 M.

del tutto trascurabile la perdita di cellule. Si esponevano, quindi, all'azione del calore per dieci minuti e poi si centrifugavano di nuovo a 10.000 giri e questi liquidi di centrifugazione venivano esaminati allo spettrofotometro di Beckman, secondo la tecnica impiegata nelle precedenti ricerche.

Formaldeide. - Si è usata una soluzione di fresco distillata di formalina del commercio e se ne è provata l'azione in varie concentrazioni.

La 1ª figura riporta le curve spettrofotometriche corrispondenti ad un esperimento in cui la concentrazione finale di formaldeide era 10 M. Risulta da esse che da cellule così trattate non si ha, per azione del calore affatto

liberazione di nucleotidi nè a 60° nè a 70° C. (curve 3 e 4) mentre essa è molto intensa, come di consueto, per le cellule normali (curve 1 e 2).

La 2^a figura riporta curve di un esperimento con concentrazioni diverse di formaldeide. La 1^a curva corrisponde alle cellule non trattate con formaldeide, la seconda a concentrazione 1 M, la terza a concentrazione 0,5 M, la quarta a 0,3 M e la quinta a 0,1 M. Si desume da esse la dipendenza della azione limitante dalla concentrazione alla quale la sostanza ha agito.

Si è ricercato se cellule batteriche trattate con formaldeide in concentrazione tale da ottenere limitazione, ma non abolizione, della liberazione di nucleotidi per azione del calore fossero riattivabili mercè dialisi in ambiente acido. Ross e Stanley⁽⁵⁾ comunicarono nel 1938 di essere riusciti con tale espediente ad ottenere riattivazione del *virus* del mosaico del tabacco, riattivazione appurabile attraverso il recupero di una certa quota di infettività cui corrispondeva anche aumento di colore della reazione alla ninidrina e di quella dei fenoli con il reattivo di Folin. Questi risultati non sono stati confermati da Kassanis e Kleczkowski⁽⁶⁾ i quali credono che i preparati usati da Ross e Stanley fossero impuri, contenessero cioè un inibitore che la dialisi avrebbe allontanato.

Si sono adoperate cellule di *E. coli* messe a contatto con formaldeide in concentrazione finale 0,8 M. Dopo un'ora di permanenza a temperatura ambiente le cellule erano lavate per tre volte con soluzione fisiologica, una aliquota si adoperava per la stima della quantità di nucleotidi liberabile al calore (60° C.), mentre il rimanente di esse veniva sottoposta a dialisi in camera a 4° C. in sacchetti di cellophan contro soluzione fisiologica a pH 4, frequentemente rinnovata. Naturalmente, prove di controllo erano eseguite con sospensioni ad eguale contenuto in cellule, non trattate con la formaldeide. Dopo tempi vari di dialisi erano prelevate prove che si esponevano a 60° C. La 3^a figura riproduce curve di un esperimento così condotto, le prove essendo state prelevate dopo 48 ore di dialisi. Non si osserva, nelle condizioni sperimentali adottate, riattivazione di sorta e solo si nota, per effetto della dialisi, diminuzione della quantità di nucleotidi nei liquidi dopo esposizione al calore sia per le cellule normali che per quelle trattate con formaldeide il che può forse essere espressione del fatto che una parte dei nucleotidi che si liberano per azione del calore è di nucleotidi liberi esistenti come tali nelle cellule batteriche e da queste asportate dalla dialisi.

Acido tricloracetico. - Le ricerche sono state eseguite con le stesse modalità di quelle con la formaldeide. L'acido tricloracetico si è adoperato in concentrazione finale del 10 %.

Cellule così trattate venivano lavate tre volte con soluzione fisiologica e quindi esposte a 60° C. per dieci minuti. Non si ottiene da esse libera-

(5) A. F. ROSS, and W. M. STANLEY, *The partial reactivation of formalized tobacco mosaic virus protein*. « J. gen. Physiol. », 22, 165 (1939).

(6) B. KASSANIS and A. KLECZKOWSKI, *The effect of formaldehyde and mercuric chloride on tobacco mosaic virus*. « Bioch. J. », 38, 20 (1944).

zione di nucleotidi e le curve di assorbimento sono del tutto simili a quelle corrispondenti a sospensioni batteriche ad egual numero di cellule normali non sottoposte all'azione del calore.

Alcool. — Si sono adoperate concentrazioni diverse di alcool etilico nelle quali le cellule batteriche restavano per un'ora. Si procedeva, quindi, come negli altri casi. Il risultato di un esperimento del genere è riportato nella 4^a figura dove sono riprodotte cinque curve di assorbimento. La 1^a corri-

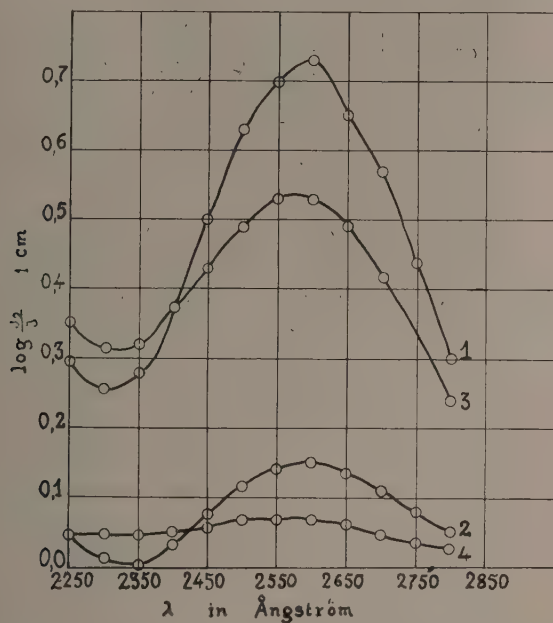


Fig. 3. — Liquidi di centrifugazione.

1 di cellule normali; 2 di cellule trattate con formaldeide 0,8 M; 3 di cellule normali e sottoposte a dialisi; 4 di cellule trattate con formaldeide 0,8 M e sottoposte a dialisi. Temperatura di esposizione per le 4 prove 60° C.

sponde a liquido di centrifugazione di cellule normali non esposte al calore, la 2^a a quello di cellule normali esposte a 60° C. per 10 minuti; entrambe hanno il solito andamento, cioè la prima cade progressivamente dalla zona delle onde più corte a quella delle più lunghe mentre la seconda ha il punto più alto tra 2550 e 2600 cioè indica la presenza di nucleotidi distaccatisi per azione del calore dalle cellule batteriche. La 3^a curva è quella corrispondente a cellule trattate con alcool ma non esposte al calore ed essa dimostra il fatto nuovo della presenza di sostanze assorbenti con massimo tra 2550 e 2600 Å quindi verosimilmente di nucleotidi. La 4^a curva corrisponde a cellule trattate con alcool ed esposte a 60° C. e la 5^a a cellule pure trattate con alcool ed esposte a 70° C.

Nonostante le molte ricerche sull'azione dell'alcool etilico sulle cellule batteriche, sul potere disinfettante delle varie concentrazioni di esso e sulla attività spiegata dai vari omologhi, assai poco si conosce sul meccanismo con cui esso agisce. La più recente e certamente molto interessante ricerca è quella di Dagley, Dawes e Morrison ⁽⁷⁾. Questi ricercatori hanno

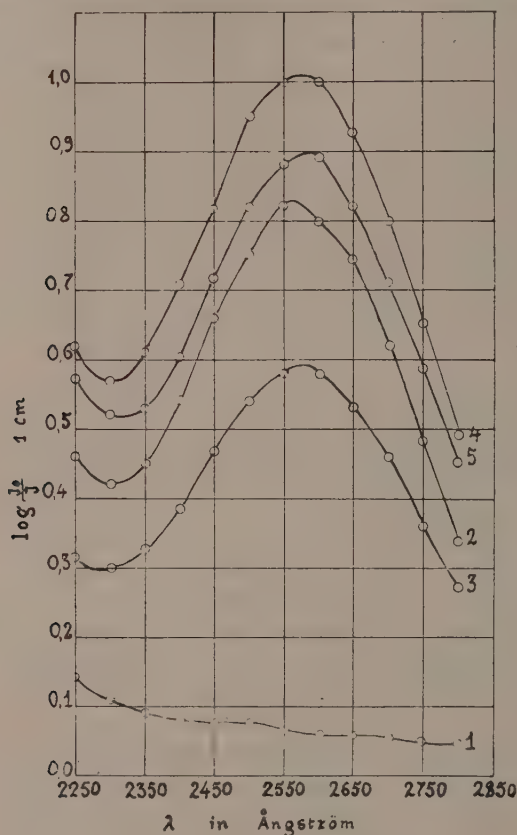


Fig. 4. - Liquidi di centrifugazione.

1 di cellule normali non esposte al calore; 2 di cellule normali esposte a 60° C.; 3 di cellule trattate con alcool non esposte al calore; 4 di cellule trattate con alcool esposte a 60° C.; 5 di cellule trattate con alcool esposte a 70° C. Concentrazione finale dell'alcool 66%.

veduto che il fenolo, l'acetone, alcuni alcoli e l'acetato di etile hanno azione prolungatrice della lag phase, perchè essi, probabilmente, denaturano enzimi che provvedono alla elaborazione di metaboliti essenziali per la moltiplicazione. Ciò sarebbe anche dimostrato dal fatto che tale prolungamento è molto più pronunziato usando terreni sintetici che brodo

(7) S. DAGLEY, E. A. DAWES and G. A. MORRISON, *Inhibition of growth of Aerobacter aerogenes: the mode of action of phenols, alcohols, acetone and ethyl acetate*. « J. Bact. », 60, 369 (1950).

nutritivo, perchè in questo le cellule trovano già formati quei metaboliti che debbono essi sintetizzare nei terreni sintetici. Se si aggiungono aminoacidi il prolungamento della lag phase viene abolito perchè le cellule batteriche, delle quali alcuni enzimi sintetizzanti aminoacidi sono inattivati, possono moltiplicarsi usando quelli artificialmente aggiunti. È di singolare importanza il fatto che per il fenolo, per l'alcool etilico e per l'alcool propilico esiste una certa specificità che non si ha per gli alcoli a più lunga catena nè per para sostituiti del fenolo o per l'acetone o l'acetato di etile la cui azione prolungatrice sulla lag phase è abolita da tutti gli aminoacidi. Dagley e collaboratori spiegano il fenomeno ammettendo che la specificità nei riguardi del fenolo, dell'alcool etilico e del propilico dipenda dal fatto che mentre le altre sostanze sperimentate impediscono la sintesi degli aminoacidi essi impediscono anche la conversione di un aminoacido nell'altro per azione esercitantesi sui relativi enzimi.

Le ricerche riportate in questa Nota dimostrano una non ancora descritta azione dell'alcool etilico sulle cellule batteriche e cioè il potere di estrazione di componenti citoplasmatici, quali i nucleotidi, che passano nel liquido di sospensione delle cellule. Sulla possibilità che alcuni disinfettanti agiscano da estraenti di componenti cellulari è ammesso da Gale e Taylor ⁽⁸⁾ per l'acido fenico che agirebbe lisando il cell wall e con ciò si determinerebbe il passaggio all'esterno della cellula di aminoacidi immagazzinati. Se l'azione dell'alcool etilico, ora messa in evidenza, si eserciti con lisi in senso morfologico del cell wall o con soluzione di sostanze del corpo batterico solubili in alcool, ciò che potrebbe avere per effetto il distacco di altri componenti chimici, sarà dimostrato da successive ricerche.

È da notare, infine, che il trattamento delle cellule batteriche con alcool etilico non impedisce la liberazione da calore dei nucleotidi, contrariamente a quanto avviene per la formaldeide e per l'acido tricloracetico.

In conclusione le presenti ricerche dimostrano più direttamente quanto si era precedentemente supposto e cioè che la denaturazione proteica ostacola la liberazione di calore di nucleotidi dalle cellule batteriche. Sia, dunque, la denaturazione da calore che quella da acido tricloracetico e quella da formaldeide producono lo stesso effetto, per quanto i meccanismi con cui si avvera la denaturazione, sia nei tre casi differenti ⁽⁹⁾. L'azione dell'alcool sulle cellule batteriche è più un'azione estrattiva che denaturante perchè mentre si ha passaggio nel liquido di sospensione di componenti chimici del protoplasma, tra cui certamente nucleotidi, non si avvera in modo apprezzabile limitazione alla separazione di ribonucleotidi per azione del calore.

(8) E. F. GALE and E. S. TAYLOR, *The assimilation of amino acids by bacteria. 2. The action of tyrocidin and some detergent substances in releasing amino acids from the internal environment of Streptococcus faecalis*. « J. gen. Microb. », 1, 77 (1947).

(9) Per l'azione della formaldeide sulle proteine cfr. D. FRENCH and J. T. EDSALL, *The reactions of formaldehyde with amino acids and proteins*. « Advances in Protein Chemistry », 2, 277 (1945).

Farmacologia. — *Contributi allo studio farmacologico e biochimico del metabolismo intermedio. — Azione degli acidi grassi, degli alcol e degli aldeidi sull'intestino isolato ed esaurito di coniglio con particolare riguardo alla risposta acetilcolinica* (*). Nota II di DANIELE BOVET, FILOMENA BOVET-NITTI, ERNST BORIS CHAIN e ANNE BELOFF-CHAIN, presentata (**) dal Socio E. B. CHAIN.

Nel 1895 Locke ⁽¹⁾, nel corso di alcune ricerche che seguivano d'assai vicino i lavori originali di Ringer (1880-1896) mise per la prima volta in evidenza l'azione coadiuvante del glucosio introdotto nelle soluzioni saline destinate alla perfusione di un cuore isolato di rana; con uguale successo egli estese nel 1901 e nel 1904 queste ricerche al cuore isolato dei mammiferi così che in collaborazione con Rosenheim (1904-1907) egli poteva mettere in evidenza da una parte la sparizione del glucosio durante la perfusione e d'altra parte il fatto che l'azione di questo zucchero si dimostrava relativamente specifica.

I lavori di Locke furono poi ripresi in particolare da Neukirch e Rona (1912) ⁽²⁾, da Feldberg (1942-43) ⁽³⁾ e da Furchgott e Shorr (1946) ⁽⁴⁾ sulle preparazioni di intestino isolato di coniglio le quali si sono dimostrate particolarmente adatte per questo tipo di ricerche.

Rona e Neukirch hanno mostrato che l'ampiezza delle contrazioni spontanee di un segmento d'intestino immerso in una soluzione di Tyrode priva di glucosio diminuisce progressivamente e che invece può venire ripristinata da un'aggiunta non soltanto di glucosio ma anche di altre sostanze la cui azione suppletiva è più o meno completa: e fra queste il mannosio e l'acido piruvico, lattico, acetico, n-butyrico, idrossibutyrico e ossalacetico. Furchgott e Shorr hanno d'altra parte introdotto un metodo di misura quantitativo anch'esso basato sul ritorno delle contrazioni spontanee fino all'ampiezza normale ed hanno esteso il campo delle loro investigazioni all'insieme degli acidi grassi e agli intermedi del ciclo degli acidi tricarbossilici. Questi autori hanno confermato l'attività notevole esercitata dall'acido acetico e butyrico e l'inefficacia dell'acido propionico; estendendo poi le loro osservazioni fino ai termini superiori degli acidi grassi essi hanno constatato che comunque i derivati con un numero pari di carbonio dimostrano un'attività superiore che non quelli con un numero dispari.

(*) Lavoro eseguito nei laboratori di Chimica terapeutica e di Chimica biologica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) F. S. LOCKE, « Journ. Physiol. », 18, 332 (1895); 31, XIII (1904); « Cbl. f. Physiol. », 14, 670 (1901); F. S. LOCKE e O. ROSENHEIM, « Journ. Physiol. », 31, XIV, XV (1904).

(2) P. NEUKIRCH e P. RONA, « Arch. ges. Physiol. », 146, 371 (1912); 148; P. RONA e P. NEUKIRCH, « Arch. ges. Physiol. », 148, 273 (1912).

(3) W. FELDBERG e O. M. SOLANDT, « Journ. Physiol. », 101, 137 (1942); W. FELDBERG, « Journ. Physiol. », 102, 108 (1943).

(4) R. F. FURCHGOTT e E. SHORR, « Proc. Soc. exp. Biol. a. Med. », 61, 280 (1946).

Per quel che riguarda il meccanismo d'azione un contributo importante è stato portato da Feldberg e Solandt (1942) e da Feldberg (1943) i quali hanno osservato che il glucosio e l'acido piruvico permettevano il ritorno delle risposte all'acetilcolina, risposte di cui sia l'altezza che la durata diminuiscono fortemente e costantemente in fase di esaurimento. Le Heux (1921)⁽⁵⁾ ha suggerito che l'azione tonica dell'acido acetico poteva essere attribuita ad un aumento della sintesi dell'acetilcolina, e Feldberg e Solandt (1942) così come Vogt (1943)⁽⁶⁾ avendo d'altra parte suggerito che anche l'acido lattico sarebbe in grado di stimolare direttamente la contrazione della fibra liscia, ci è parso interessante, nel campo delle ricerche che abbiamo iniziato⁽⁷⁾ sul metabolismo del glucosio di riprendere tale studio per portare nuove prove dell'azione metabolica di tali sostanze.

Le ricerche che fanno oggetto di questa Nota si riferiscono alla natura chimica di quelle sostanze che possono sostituirsi al glucosio nella composizione di una soluzione salina capace di permettere nelle migliori condizioni le attività delle fibre muscolari lisce dell'intestino di coniglio così come la reattività agli agenti farmacologici.

Quando, mettendosi nelle condizioni descritte da Magnus, un frammento d'intestino viene mantenuto durante un periodo di tempo sufficientemente lungo in una soluzione salina *priva di glucosio* si osserva che l'ampiezza delle contrazioni diminuisce progressivamente allo stesso tempo che il tono si abbassa e che la risposta all'aggiunta di sostanze contratturanti come l'acetilcolina, la carbaminoilcolina o il cloruro di Bario si fa meno accentuata e meno durevole; dopo qualche ora l'attività dell'organo isolato può attenuarsi fino al punto di cessare completamente.

In una preparazione arrivata a questo punto di esaurimento si osserva che l'aggiunta di quantità anche minime di glucosio o di un sostituito del glucosio ristabilisce in qualche minuto l'ampiezza delle contrazioni, il tono muscolare e la risposta dell'intestino agli stimoli chimici.

Due tipi di esperienze sono stati condotti contemporaneamente:

1° nel primo che si ricollega alle prove fatte da Feldberg⁽³⁾ e da alcune esperienze di controllo brevemente riportate da Furchgott e Shorr⁽⁴⁾ si è cercato di mettere in evidenza gli effetti delle sostanze aggiunte alla soluzione salina (liquido di Tyrode senza glucosio) in cui era immersa la preparazione di intestino isolato in fase di esaurimento (fig. 1).

2° nel secondo si è invece sistematicamente paragonato il comportamento di due preparazioni provenienti dallo stesso animale e di cui una era immersa in una soluzione salina e l'altra in una stessa soluzione salina addizionata dei prodotti in esame. Gli esperimenti di questo secondo tipo che rivestono un valore dimostrativo più evidente e che soli autorizzano a riconoscere il carattere energetico di un'azione farmacologica, hanno una durata relativamente lunga. La sopravvivenza

(5) I. W. LE HEUX, « Arch. ges. Physiol. », 173, 8 (1919); 179, 177 (1820); 190, 300 (1921).

(6) M. VOGT, « Journ. Physiol. », 102, 170 (1943).

(7) A. BELOFF-CHAIN, D. BOVET, E. B. CHAIN e F. POCCHIARI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), 10, 280 (1951).



Fig. 1. - Risposta all'acetilcolina durante le fasi successive di esaurimento d'un segmento d'intestino isolato di coniglio, e ritorno al tono e all'attività normale provocato dall'acido acetico e dal glucosio.

Il chimografo è stato messo in moto ogni 20 minuti per un periodo di 4 minuti, e il cloruro di acetilcolina (0.1 mg/l) è stato ogni volta aggiunto dopo 2 minuti, e lasciato per altri 2 minuti in presenza della preparazione prima che venisse cambiata la soluzione fisiologica.

In A, l'acetato di sodio (a una concentrazione corrispondente a 1 g/l dell'acido) è stato aggiunto alla soluzione salina, complessivamente per un periodo di 65 minuti.

In G, è stato aggiunto il glucosio (1 g/l). Si osserva dopo l'addizione di ambedue le sostanze la ripresa dei movimenti spontanei, l'aumento del tono e il ritorno di una risposta più intensa e più durevole all'acetilcolina.

Soluzione salina (NaCl 8 g/l, KCl 0.2 g/l, CaCl₂ 0.1 g/l; MgCl₂ 0.1 g/l; NaH₂PO₄ 0.05 g/l; NaHCO₃ 1 g/l) con penicillina (10.000 U/l); temp. 37°C; ossigeno.

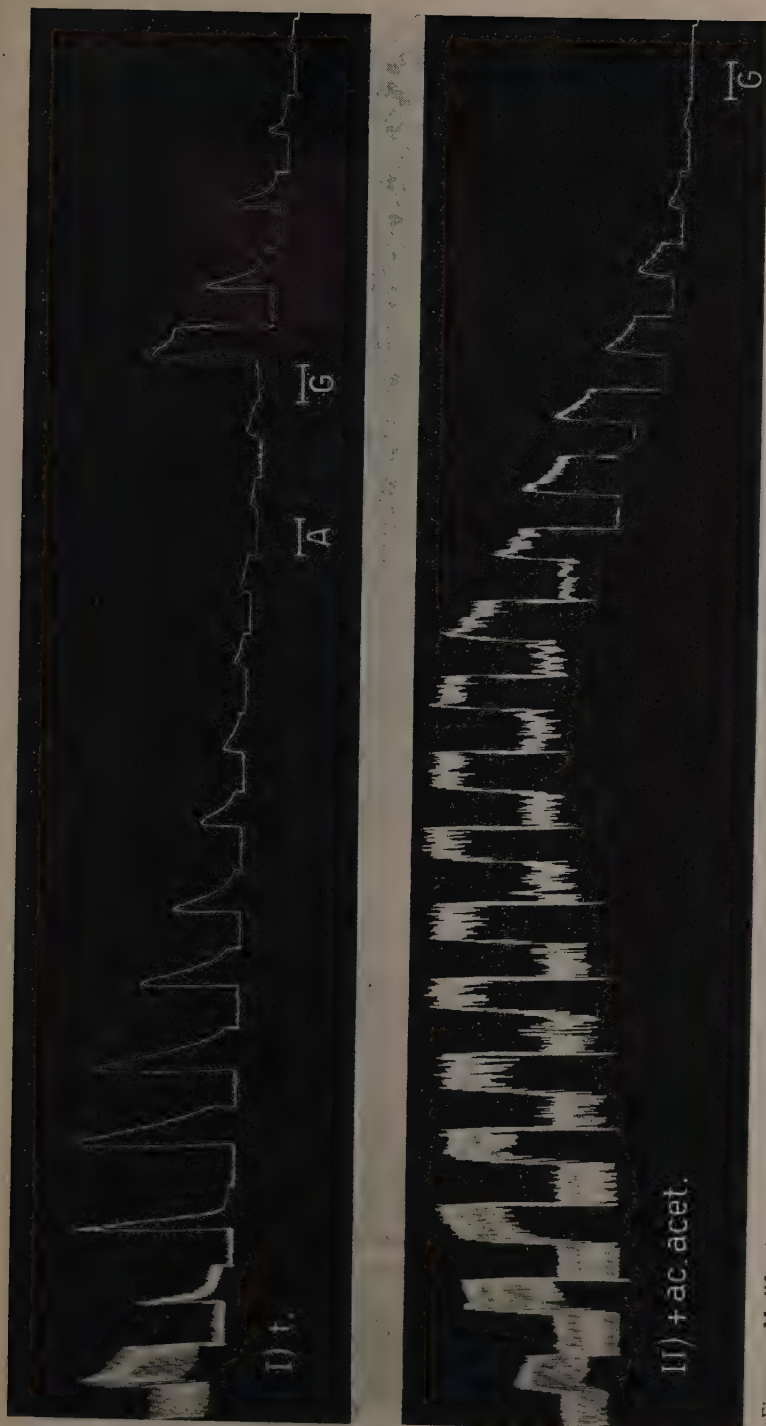


Fig. 2. - Modificazione da acido acetico della reazione d'esaurimento dell'intestino isolato di coniglio conservato in una soluzione salina priva di glucosio. Il kymografo è stato messo in moto ogni 30 minuti per 4 minuti e la durata complessiva dell'esperimento è stato di 10 ore.

In I: tracciato fornito da un segmento d'intestino in corso di esaurimento in una soluzione salina priva di glucosio. Si vede in G un ritorno parziale dopo l'aggiunta di glucosio per 30 minuti (τ g/l). In II: tracciato fornito da un segmento proveniente dallo stesso animale: è stato aggiunto in questo caso l'acetato di sodio (τ g/l di acido acetico) alla soluzione salina, il che mantiene molto più a lungo il tono e l'attività normale così come la risposta costante e durevole all'aggiunta di acetilcolina.

Soluzione salina con Terramicina (10 mg/l). La leva dell'isrittore è sovraccaricata di un peso di 3 grammi. Altre condizioni sperimentali identiche a quelle dell'esperimento precedente.

delle preparazioni teste in un liquido privo di glucosio, oscilla tra 4 ore e mezza e 11 ore, in una serie di esperienze compiute in condizioni costanti quanto possibile. La sopravvivenza media degli intestini isolati immersi in una soluzione nutritiva (glucosio, acido caprilico, acido acetico, butanolo, acetaldeide) è invece nettamente superiore; ma le differenze più marcate fra i due tipi di tracciati riguardano il tono muscolare, l'ampiezza delle contrazioni spontanee, l'altezza e la durata della risposta all'acetilcolina (0.1 mg/l) (fig. 2).

Abbiamo potuto realizzare una tecnica di registrazione che comporta un dispositivo interamente automatico per la messa in moto del chimografo e per il rinnovo delle soluzioni, analogo a quello descritto precedentemente da Schild (1947)⁽⁸⁾. L'aggiunta d'antibiotici allo scopo di impedire la pollulazione microbica si è avvertita assai utile: dopo diverse prove abbiamo adottato la penicillina (10.000 u/l) e la terramicina (10 mg/l).

Nelle condizioni descritte abbiamo constatato che l'intestino isolato risponde non soltanto ai monosaccaridi (glucosio e mannosio⁽²⁾ galattosio e levulosio⁽³⁾ all'acido piruvico⁽²⁾ e agli acidi grassi⁽⁴⁾ ma anche ad alcol e aldeidi.

a) *Acidi monocarbossilici*. - Nel gruppo degli acidi monocarbossilici della serie grassa l'acido acetico, l'acido n-butyrico, l'acido caproico e l'acido caprilico si sono dimostrati atti a mantenere l'attività delle preparazioni di intestino isolato impedendo i fenomeni di denutrizione. Le concentrazioni attive sono dello stesso ordine di quelle adottate per il glucosio e per gli acidi grassi; tutti questi prodotti si dimostrano attivi a una concentrazione di 10^{-4} e inattivi a quella di 10^{-5} . Contrariamente a ciò che avviene per i termini pari della serie normale, gli acidi propionico, iso-butyrico, n-valerico e iso-valerico si sono dimostrati inefficaci; gli acidi formico e enantico sono però attivi.

Il riavvicinamento che noi suggeriamo fra gli effetti esercitati dall'acetato di sodio e quelli del glucosio, non si basa soltanto sull'azione comune che esercitano queste due sostanze sul tono intestinale, ma sul fatto del tutto caratteristico ch'esse sono l'una e l'altra suscettibili di ristabilire il potere di reagire con una contrazione durevole ad agenti diversi come il cloruro di bario e l'acetilcolina nelle preparazioni di intestino isolato esaurito per carenza di alimenti energetici; ed anche sul fatto che l'aggiunta di glucosio resta senza effetto in un mezzo sufficientemente ricco in acetato di sodio come l'aggiunta di acetato di sodio non ha effetto su una preparazione immersa in una soluzione ricca di glucosio.

b) *Acidi dicarbossilici*. - L'utilizzazione del succinato di sodio come fonte di energia per la contrazione muscolare delle fibre lisce è stata recentemente segnalata da Furchgott e Wales (1951)⁽⁹⁾. Nel corso delle nostre esperienze l'acido fumarico ha fatto prova di un'attività marcata mentre l'acido succinico e l'acido aconitico si sono dimostrati mediocrementemente attivi e con un certo periodo di latenza. Gli effetti dell'acido glutammico e adipico si sono dimostrati incostanti; l'acido ossalico e l'acido malonico sono inattivi.

(8) H. O. SCHILD, « Brit. Journ. Pharmacol. », 2, 189 (1947).

(9) R. F. FURCHGOTT, e M. WALES, « Feder. Proceed. », 10, 186 (1951).

c) *Ossi-Acidi*. – Dei quattro acidi-alcol sperimentati l'acido glicolico, gli acidi malico e citrico sono risultati inutilizzabili. I dati di Feldberg e di Vogt riguardo all'azione dell'acido lattico sono stati confermati e le nostre proprie esperienze ci permettono di essere più affermativi riguardo all'azione sostituyente di quest'acido in rapporto al glucosio.

d) *Cheto-Acidi*. – Noi abbiamo anche confermato le esperienze di Neukirch e di Rona riguardo ai due termini della serie degli acidi chetonici, l'acido piruvico e l'acido ossalacetico.

e) *Amminoacidi*. – Degli otto ammino-acidi esaminati (acido glutammico, acido aspartico, alanina, tirosina, fenilalanina, glicocola, prolina, lisina) due soltanto hanno avuto un'influenza sulla curva di esaurimento dell'intestino in fase di esaurimento. La fenilalanina e l'acido glutammico, infatti, senza ristabilire l'attività spontanea e senza esercitare di per se stessi nessuna azione sul tono intestinale, permettono la reazione dell'intestino all'azione dell'acetilcolina in modo che si vengono a verificare delle risposte più marcate laddove il muscolo non rispondeva più o appena.

f) *Alcol*. – Nella serie degli alcol, l'etanolo, senza esercitare di per se stesso un'azione marcata sul tono dell'intestino in fase di esaurimento nè sull'ampiezza delle contrazioni, è tuttavia capace di assicurare parzialmente la ripresa delle contrazioni provocate dall'acetilcolina o dal cloruro di Bario. L'azione tonica è molto marcata nel caso del n-butanolo i cui effetti si rivelano a dosi vicine a quelle del glucosio, sebbene con più lentezza.

Gli alcol metilico, propilico, alilico, iso-butilico, butilico terziario e amilico si sono invece dimostrati incapaci di supplire alla carenza di glucosio. I termini superiori nella serie degli alcol e cioè, l'esilico, l'eptilico e l'ottilico si sono dimostrati anch'essi attivi.

g) *Aldeidi*. – L'acetaldeide e l'aldeide butilica esercitano sull'intestino in fase di esaurimento un'attività tonica marcata alla concentrazioni di 10^{-4} ; a concentrazioni di 10^{-3} invece provocano una paralisi immediata dei movimenti spontanei della preparazione d'intestino isolato, e un rilasciamento importante del tono. L'azione inibitrice è agevolmente reversibile, e il tono normale si ristabilisce rapidamente quando le soluzioni di Tyrode in cui è immersa la preparazione, vengono rinnovate.

Le esperienze che abbiamo riportato fanno apparire la possibilità di sostituire il glucosio che rappresenta l'elemento energetico delle soluzioni dette fisiologiche di Locke e di Tyrode, con altri costituenti di natura ben diversa.

Ne risulta fin d'adesso una più esauriente dimostrazione del fatto che, accanto al glucosio, la fibra muscolare liscia è capace di utilizzare direttamente e con una facilità relativamente grande delle molecole semplici che si riallacciano al metabolismo dei grassi, come l'acido acetico, butirico, caproico, caprilico. Noi abbiamo inoltre messo in evidenza proprietà simili nell'alcol butilico, l'acetaldeide e l'aldeide butirica. L'azione stimolatrice dell'acido formico sulle contrazioni dei muscoli lisci appare come particolarmente significativa se viene considerata nel quadro delle ricerche che hanno stabilito la funzione di quest'acido nel metabolismo intermedio.

Le esperienze dimostrano inoltre come vi sia una relazione fra l'azione dell'acetilcolina e il metabolismo intermedio dei carboidrati e degli acidi grassi. È chiaro che l'acetilcolina non può esercitare la sua azione sul muscolo liscio in assenza di alcuni metaboliti fra cui uno dei più notevoli, in ragione della semplicità della sua molecola, è l'acido acetico. Poichè i legami degli esteri fosforici costituiscono l'unica fonte capace di liberare l'energia biologica utilizzabile e che gli acidi grassi esaminati si dimostrano ugualmente suscettibili di formare tali composti, ne risulta che è alla presenza di tali legami che in definitiva va subordinata l'azione farmacologica dell'acetilcolina sulla fibra muscolare liscia.

Le esperienze le quali dimostrano che il dinitrofenolo, il quale rappresenta un inibitore specifico del fenomeno di fosforilazione legato all'ossidazione, impedisce anche, sebbene in maniera diversa, l'effetto del glucosio e degli acidi grassi, vengono a costituire una dimostrazione supplementare di questo fatto.

Anche delle nostre esperienze è apparso evidente il disaccordo fra i risultati dell'investigazione biochimica e farmacologica per quel che riguarda l'efficacia, come fonte possibile di energia, dei diversi membri del ciclo tricarbossilico. Se si eccettua il glucosio e l'acido piruvico, molti termini di tale ciclo si sono dimostrati inattivi o appena attivi. I risultati in parte negativi di Feldberg riguardo al glucosio-1-fosfato sono stati da noi confermati così come le osservazioni dovute a Rona, secondo le quali l'acido ossalacetico non dimostra che una debole azione, l'acido fumarico sarebbe inattivo e l'acido succinico appena efficace.

I risultati negativi ottenuti con gli amino-acidi sono anch'essi caratteristici.

Da un punto di vista farmacologico, le osservazioni raccolte permettono di penetrare più innanzi nel meccanismo intimo degli effetti di un insieme di sostanze che appare conveniente di considerare dal punto di vista comune di elementi energetici della fibra muscolare liscia.

Teniamo qui a ringraziare il dott. F. Pocchiari il quale ha eseguito le sintesi di alcuni prodotti necessari a questo lavoro.

Fisiologia. — *Sulla validità della regola del « Tutto o Niente » nel cuore. Di una nuova concezione sul meccanismo della contrazione cardiaca in rapporto alla costituzione del miocardio.* Nota (*) del Corrisp. IGINO SPADOLINI.

Il principio del T. o N. desunto da osservazioni sul cuore dei bassi vertebrati e poi praticamente esteso a tutte le strutture eccitabili appare oggi subire importanti revisioni dopo oltre ottanta anni di indiscusso prestigio in molti campi della fisiologia. Si è affermato recentemente che merito della elettrofisiologia moderna è stato appunto quello di dimostrare la non assoluta validità della legge del T. o N., almeno per quanto riguarda le manifestazioni elettriche non propagate, la cui scoperta ci ha condotti a

(*) Presentata nella seduta dell'8 dicembre 1951.

modificare profondamente i nostri vecchi concetti sulla nozione di soglia (Fessard e Posternak).

Vi è da osservare che anche nel campo delle reazioni meccaniche del muscolo e particolarmente del cuore detto principio è stato finora applicato senza quelle necessarie riserve e limitazioni, la cui conoscenza si rivela sempre più importante e necessaria per lo studio dei meccanismi contrattili.

La legge del T. o N. nel cuore è soltanto il principio che regola la risposta del muscolo verso stimoli singoli del valore di soglia ed oltre, opportunamente distanziati nel tempo. Allorché detti stimoli si ripetono in serie con determinate frequenze (e ciò accade in tutti gli aggiustamenti della forza di contrazione del cuore alle esigenze del circolo) la sua validità scompare, poichè entra in giuoco un processo di sommazione temporale dell'agente trasmettitore (molto probabilmente l'acetilcolina) che successivamente e gradatamente modifica l'intensità della risposta dandole o il carattere di una reazione graduata e scalariforme o, in determinate condizioni sperimentali, l'andamento di un tetano più o meno completo. Naturalmente l'entità della graduazione dipende dal valore iniziale della risposta.

Questo processo che può chiamarsi « sommazione di stimoli liminali o sopraliminali » non è stato finora convenientemente valutato dai fisiologi, i quali, allorché la struttura multicellulare del tessuto poteva permetterlo, hanno preferito rimanere strettamente aderenti al suddetto principio, interpretando la risposta graduata con fenomeni di sommazione spaziale occorrenti fra le diverse unità funzionali del tessuto stesso.

Ma anche nel muscolo scheletrico, avente tutti i requisiti strutturali necessari per sommazioni di tipo spaziale, la tecnica recente del preparato unitario, costituito da una sola fibra muscolare, ha potuto togliere ogni dubbio in proposito dimostrandoci nel tetano l'occorrenza di effetti cumulativi da frequenza; perciò, di fenomeni di ordine temporale per adeguata ripetizione dello stimolo. La sommazione temporale, come si sa, per stimoli di soglia è sostanzialmente in opposizione al concetto che informa il principio del T. o N. Il fenomeno della scala, il potenziamento post-tetanico, l'ascesa secondaria nel tetano, infine le modalità con cui lo stesso tetano si stabilisce, sono le espressioni più significative di altrettante risposte graduate che si manifestano non solo nella singola fibra striata ma, come io ho dimostrato, nello stesso miocardio. Il quale, per la sua struttura sinciziale, funzionalmente paragonabile a quella di una singola fibra, non è certamente il tessuto più idoneo a renderci conto di sommazioni spaziali (almeno nel senso che ordinariamente è stato attribuito a tali fenomeni) per giustificare la legge del T. o N.: reclutamento, cioè, di differenti unità funzionali.

Nelle mie ricerche compiute sul cuore degli anfibî venne dimostrato che l'inotropismo ventricolare si modifica secondo la frequenza della stimolazione e le modificazioni si esplicano in maniera difasica: fino ad una certa frequenza, cioè, l'altezza delle singole contrazioni gradatamente aumenta fino ad un valore massimo, poi, aumentando ancora la frequenza, la

loro altezza diminuisce fino a raggiungere un valore minimo. In un senso o nell'altro le singole contrazioni cardiache si modificano seguendo un andamento graduato *a scala*.

In base a numerosi dati di fatto si è avuta la convinzione che il processo di sommazione temporale, capace di dar luogo ad incrementi graduati e difasici dell'inotropismo ventricolare, dovevasi ricercare nella liberazione di un principio attivo la cui concentrazione si eleva *per quanti* in relazione alla frequenza degli stimoli. L'acetilcolina, di cui dimostrai la duplice azione graduata e difasica in rapporto alla concentrazione raggiunta in sede di azione, venne indicata come l'agente attivo più probabile nel determinismo delle risposte in questione.

I potenziali di azione durante lo svolgersi di dette contrazioni graduate nel miocardio vanno aumentando pur essi gradatamente di altezza onde sembra sussistere un certo parallelismo fra l'andamento dei potenziali propagati e i fenomeni meccanici. Però, lo studio delle manifestazioni elettriche durante il tetano cardiaco ci ha rivelato che l'altezza dei potenziali d'azione si eleva in relazione ad eventi che aumentano la sincronizzazione della risposta negli elementi contrattili del miocardio e il tetano cardiaco sembra appunto dipendere in gran parte da uno stato di eccitabilità ipersincronizzata da opportuna ripetizione dello stimolo.

Ora, se l'aumento presentato dai potenziali di azione nel decorso di una risposta graduata è con ogni probabilità legato ad uno stato di maggiore sincronizzazione dei singoli elementi funzionali del tessuto, è evidente che anche nell'ambito di una struttura unitaria qual'è il miocardio possono ancora entrare in giuoco fattori di natura spaziale in associazione a quelli di ordine temporale. È da notare, infatti, che nel tetano cardiaco la elevazione in altezza dei potenziali di azione decorre fino ad un certo punto parallelamente all'aumento in altezza delle prime contrazioni che vanno gradualmente sommandosi, poi i due fenomeni assumono decorso indipendente. I potenziali di azione si stabilizzano ad un livello massimo che rimane costante assai prima che la contrazione sostenuta, caratterizzante il tetano completo, abbia raggiunta la sua massima altezza (ved. figura, in basso). Ciò attesta che meccanismi prevalentemente spaziali nel primo caso, prevalentemente temporali nel secondo, sussistono insieme come episodi fondamentali di una reazione graduata.

Ne deriva che nel miocardio, almeno, il meccanismo delle risposte graduate, desunto dal comportamento del tetano, assume aspetti assai complessi: mentre il processo propagato (P. d. A.) appare andare incontro a fenomeni sommatori spaziali di sincronizzazione, il grado di accorciamento meccanico presentato dal substrato contrattile sembra dipendere contemporaneamente da fenomeni sommatori di ordine spaziale e temporale. Spaziale, poichè sempre più numerose possono essere le unità contrattili che per detti fenomeni di sincronizzazione entrano in attività l'una dopo l'altra; temporale, poichè l'azione del trasmettitore (acetil-colina) può esplicarsi quantitativamente sulle catene actomiosiniche in dipendenza della concentrazione

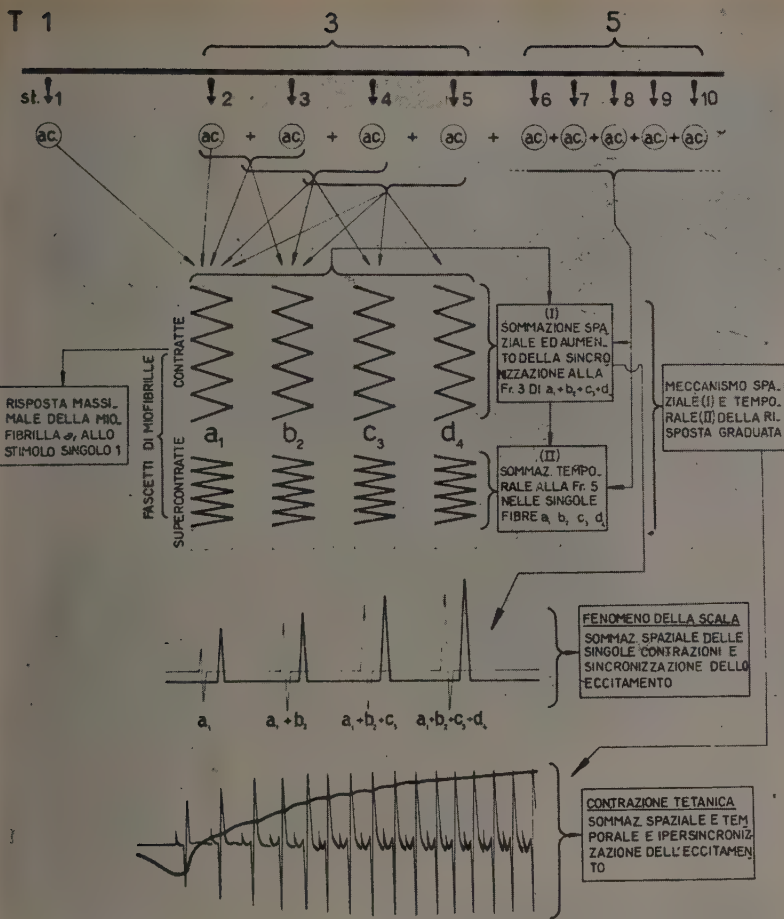


Fig. 1. - Disegno schematico che illustra l'andamento dei fenomeni di sommazione spaziale e temporale nelle risposte graduate dell'apparato miofibrillare del cuore.

Fr. 1, 2, 3 = frequenze di stimolazione. Al centro sono indicati alcuni fascetti di miofibrille in stato contratto e supercontratto. I valori di soglia dei singoli fascetti (a , b , c , d) sono rappresentati dai nn. 1, 2, 3, 4. In basso è stato riprodotto da oscillogrammi originali l'andamento delle singole contrazioni e dei singoli P. di A.: I) in una reazione graduata scalariforme, cui per semplicità si presumono partecipare soltanto fenomeni di sommazione spaziale; II) in una risposta tetanica cui partecipano eventi spaziali e temporali.

Lo stimolo singolo n. 1 evoca la liberazione di un quanto di mediatore che provoca la contrazione del fascetto miofibrillare a_1 . Non si raggiunge mai lo stato supercontratto, però la risposta è massima rispetto al singolo stimolo e viene apparentemente considerata come rispondente al principio del T. o N. Restando invariata la quantità di mediatore liberata anche da stimolazioni più intense l'effetto contrattile non subisce modificazioni.

Se gli stimoli si ripetono con la frequenza 3 entra in giuoco la sommazione temporale di un certo numero di quanti (acetil-colina) liberati dalla serie di stimoli 2, 3, 4, 5, onde alla attività del primo fascetto a con soglia 1 si uniscono successivamente quelle di b_1 , c_1 , d_1 . L'altezza delle singole contrazioni va allora gradatamente aumentando per fenomeni di sommazione spaziale che finiscono per vincere completamente le resistenze interne determinate dalla viscosità del mezzo e da fenomeni di frizione fra i diversi fascetti. Si manifesta in tali condizioni il fenomeno della scala.

Allorché tutti i fascetti di miofibrille sono entrati in contrazione questa può non avere raggiunto ancora il suo maggior valore. Infatti, se gli stimoli si susseguono con frequenza ancor più elevata (fr. 5) la concentrazione del mediatore aumenta e si raggiunge lo stato di contrazione sostenuta che caratterizza il tetano. Però, mentre non variano i fenomeni di sommazione spaziale (onde i potenziali di azione permangono ad una altezza costante) l'altezza della contrazione tetanica continua ancora ad elevarsi ponendo in evidenza il processo meccanico di sommazione temporale che porta le miofibrille dallo stato di contrazione incompleta a quello supercontratto. La fibra nel suo complesso si accorcia quindi maggiormente di quanto non avvenga qualora si verificassero soltanto sommazioni spaziali.

Processi di sommazione spaziale e temporale sono illustrati dal tracciato della figura (in basso) che riproduce un tetano del ventricolo cardiaco di rospo ridisegnato dall'originale.

Dai fenomeni elettrici, il meccanismo di sommazione spaziale ci viene rivelato con una progressiva sincronizzazione dell'eccitamento cui corrisponde il progressivo elevarsi dei P. di A. sia durante il fenomeno meccanico della scala che nel tetano. In quest'ultimo caso si istituisce uno stato di ipersincronia che è responsabile del notevolissimo aumento manifestato dai singoli potenziali che rapidamente si susseguono in rapporto alla frequenza degli stimoli. Tale ipersincronia si mantiene finché dura lo stato di supercontrazione con la quale l'apparato miofibrillare nel suo complesso giunge a mantenere sostenuta ed elevata la contrazione tetanica.

raggiunta determinando prima forme molecolari contratte, poi supercontratte.

Data la struttura sinciziale e quindi unitaria del miocardio, quali possono essere le unità funzionali contrattili atte a giustificare eventi meccanici graduati di natura spaziale e temporale insieme? La soluzione di questo problema riveste evidentemente marcato interesse anche nei riguardi della fibra muscolare striata.

Già in una precedente Nota letta a questa Accademia ho fatto cenno alla possibilità che gli elementi responsabili, quali singole unità funzionali dei suddetti processi di sommazione spaziale e temporale (che con ogni probabilità si iniziano contemporaneamente anche se dopo un certo tempo possono decorrere separati) non siano affatto le cosiddette fibre del miocardio, cui non si può attribuire il significato di unità funzionali dato che l'eccitamento è in grado di investire pressochè simultaneamente tutto il muscolo cardiaco, ma le singole miofibrille o i fascetti di miofibrille (aventi la stessa soglia) delimitati da esili guaine di sarcolemma che nel loro complesso costituiscono l'apparecchio contrattile fondamentale del miocardio e con poche varianti anche quello di ciascuna fibra muscolare scheletrica. Nella quale, evidentemente, le singole unità funzionali atte a graduare la risposta tetanica nello spazio e nel tempo non possono essere che le singole miofibrille o gruppi di esse.

Le recentissime ricerche di microscopia elettronica del cuore compiute in America dal Kisch portano molti dati probativi a tale mia concezione fondata su inequivocabili dati sperimentali.

Fino ad oggi non si è mai prospettata la possibilità che l'apparato miofibrillare del cuore (come quello di qualsiasi altro muscolo striato) sia scindibile in unità funzionali aventi caratteristiche differenti di eccitabilità. Il fatto di trasferire alla miofibrilla o a gruppi di miofibrille la proprietà di comportarsi come unità funzionali indipendenti offre il modo di interpretare soddisfacentemente (almeno nel miocardio) le complesse risposte graduate da frequenza, cui appartiene anche la contrazione tetanica.

Dal punto di vista morfologico, il Kisch stesso è giunto alla conclusione che soltanto le miofibrille siano le vere unità funzionali, indipendenti del miocardio. Ciascuna di esse avrebbe un certo territorio di distribuzione e si troverebbero fra loro connesse dalle bande Z, cui spetterebbe il compito di tenere a posto durante la contrazione la compagine della fibra. Le miofibrille attraversano oltre le bande Z anche i dischi intercalati. Gruppi di miofibrille sono avvolti da sarcolemma che delimita pure il contenuto di un certo segmento del sincizio, cui impropriamente si dà il nome di fibra ed al quale si attaccano in definitiva tutte le differenti membrane Z. Ciascuno di questi segmenti o fibre conterrebbe da 300 a 700 miofibrille raccolte in fascetti di qualche centinaio ciascuno. Certi differenti aspetti esistenti fra le diverse miofibrille (gruppi A e B) potrebbero essere riferiti anche ad un diverso stato funzionale.

Con l'interpretazione che ho prospettata, la regola del T. o N. applicata al miocardio perde il significato concreto che la fisiologia classica le aveva

attribuito. Rimane soltanto come una risposta contingente alle condizioni create da un solo stimolo o da stimoli i cui effetti non sono comunque in grado di sommarsi. Riveste, perciò, il carattere di un evento preminentemente di ordine automatico. Le risposte, in tutti gli adattamenti riflessi, sono, invece, conseguenti a scariche più o meno frequenti di impulsi; quindi sono sempre risposte graduate per effetti cumulativi da frequenza, anche se attraverso pochi gradini intermedi raggiungono rapidamente un valore limite. Nel loro determinismo entrano strettamente associate reazioni spaziali e temporali che fanno della contrazione muscolare un evento assai più complesso di quello che non ci prospettasse finora la legge del T. o N.

Lo schema seguente intende facilitare al lettore la comprensione di quanto ha fatto oggetto della presente Nota.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Una applicazione della quasicontinuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile.* Nota (*) di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI, presentata (**) dal Corrisp. ANGELO TONOLO:

In questa Nota mi propongo di indicare, come conseguenza della quasi continuità semiregolare, di cui godono, a norma di un mio teorema ⁽¹⁾, le funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile, mi propongo di indicare, dico, una elegante proprietà degli integrali di un'equazione differenziale ordinaria, soddisfacente alle così dette ipotesi di Carathéodory.

Ecco di che si tratta. Se la funzione $f(x, y)$ è misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nella striscia

$$S: \quad a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty$$

e risulta ivi in modulo minore di una funzione della sola x , sommabile nell'intervallo

$$I: \quad a \leq x \leq b,$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 29 dicembre 1951.

(**) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile* [*« Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova »*, vol. XVII (1948), pp. 102-106].

Per una bibliografia sui lavori successivi, e per altri risultati, rimando a G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni in due variabili. Applicazioni agli integrali doppi del calcolo delle variazioni* [*« Giornale di Matematiche »* di Battaglini, vol. 79 (1949-1950), pp. 169-208].

l'equazione differenziale

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

ammette soluzioni assolutamente continue nell'intervallo I , nel senso che esistono funzioni assolutamente continue in I , e quindi derivabili in quasi tutto I , per ciascuna, $\varphi(x)$, delle quali risulta $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ in una porzione misurabile di I , avente la stessa misura di I e variabile eventualmente al variare della soluzione considerata. Questo risultato è ormai classico⁽²⁾. Ebbene, io mi propongo di dimostrare che si può determinare una porzione misurabile di I , la quale abbia la stessa misura dell'intervallo I e nella quale tutte le soluzioni della (1), assolutamente continue in I , siano derivabili e soddisfacciano alla (1) stessa, ogni singola soluzione potendo poi eventualmente verificare la (1) anche in altri punti dell'intervallo I , variabili al variar della soluzione.

Se la funzione $f(x, y)$ è limitata, la circostanza posta in rilievo segue subito (n. 2) dal fatto che $f(x, y)$ è quasi continua rispetto ad (x, y) , semi-regolarmente rispetto ad y , e dal fatto che l'integrale indefinito di una funzione, misurabile e limitata in un intervallo, è derivabile ed ha come derivata la funzione integranda in ogni punto in cui la funzione integranda sia asintoticamente (o approssimativamente) continua. Nel caso generale le cose si complicano un po', perchè, almeno per quanto è a mia conoscenza, l'integrale indefinito di una funzione sommabile in un intervallo è derivabile ed ha come derivata la funzione integranda in quasi tutti i punti in cui la funzione integranda è asintoticamente continua. Dovremo quindi precisare prima (n. 3) questo risultato, individuando, sotto ipotesi opportune, un insieme nel quale l'integrale indefinito di una tal funzione ha certamente la funzione integranda come derivata, e passare dopo (n. 4) a completare la dimostrazione del teorema enunciato.

Nel n. 5 pongo a raffronto, alla luce di questi nuovi risultati, alcune ipotesi introdotte da Cinquini⁽³⁾ e da Volpato⁽⁴⁾ nello studiare l'unicità delle soluzioni di una certa equazione alle derivate parziali del primo ordine.

(2) Sul quale pertanto reputo superfluo insistere; come ritengo superfluo ricordare che tutte le soluzioni assolutamente continue della (1) si possono prolungare in tutto l'intervallo I , ecc. E si potrebbe pure sottintendere che tutte le considerazioni di questa Nota si svolgono nell'ambito della teoria delle funzioni di variabile reale, che la misura e l'integrazione sono intese nel senso di Lebesgue, ecc.

(3) S. CINQUINI, *Un teorema di unicità (in forma generalizzata) per l'equazione $p = f(x, y, z, g)$* [Nota preventiva pubblicata nei « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », ser. 8, vol. XI (1951), pp. 255-259], n. 1.

(4) G. SCORZA DRAGONI e M. VOLPATO, *Un teorema di unicità per le soluzioni di una equazione alle derivate parziali del primo ordine* [« Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova », vol. XX (1951), pp. 446-461], n. 9. Questo lavoro è scritto in collaborazione con me, ma l'enunciato e la dimostrazione del teorema del n. 9 sono di Volpato.

Un'ultima osservazione. Il teorema della mia Nota citata in (1) sussiste anche per le funzioni complessivamente misurabili rispetto ad un gruppo delle variabili da cui dipendono e complessivamente continue rispetto alle rimanenti. Perciò anche il teorema dimostrato qui a proposito della (1), si trasporta subito ai sistemi differenziali, ordinari, normali, soddisfacenti alle ipotesi di Carathéodory.

1. La funzione $f(x, y)$ sia finita, misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nella striscia S . Allora, dati il numero positivo ε ed il numero naturale n , esiste una porzione chiusa i_n dell'intervallo I tale, che la sua misura $\mu(i_n)$ superi $b - a - \varepsilon/2^{n+1}$ e tale, che la $f(x, y)$ subordini una funzione finita e continua nell'insieme chiuso R_n costituito da tutti i punti della striscia S che abbiano l'ordinata compresa nell'intervallo chiuso di estremi $-n$ ed n e l'ascissa contenuta nell'insieme chiuso i_n (5). Se $\delta(\varepsilon)$ denota l'intersezione degli insiemi i_1, i_2, \dots (6), $\delta(\varepsilon)$ è ancora chiuso ed ha una misura maggiore di $b - a - \varepsilon$ e la funzione $f(x, y)$ subordina una funzione continua nella porzione chiusa, $\Delta(\varepsilon)$, di S riempita dalle parallele all'asse y passanti per i punti di $\delta(\varepsilon)$.

Si consideri ora l'insieme $\delta'(\varepsilon)$ dei punti di $\delta(\varepsilon)$ che sono di densità (lineare) uno per $\delta(\varepsilon)$. Allora $\delta'(\varepsilon)$ è notoriamente misurabile ed ha la stessa misura di $\delta(\varepsilon)$. Epperò, se si fa percorrere ad ε la successione dei reciproci dei numeri naturali e si riuniscono in un solo insieme, δ , i punti degli insiemi $\delta'(1), \delta'(1/2), \dots$, si ottiene una porzione misurabile dell'intervallo I , la quale ha la stessa misura dell'intervallo I .

Ciò premesso, è manifesto che se x_0 è un punto di δ e se $\psi(x)$ è una funzione continua in I , la funzione composta $f(x, \psi(x))$ è asintoticamente continua nel punto x_0 . Infatti, se x_0 appartiene, per esempio, a $\delta'(1/m)$ e se x tende ad x_0 in $\delta(1/m)$, cioè in un insieme che ha densità 1 in x_0 , il punto $(x, \psi(x))$ di S tende al punto $(x_0, \psi(x_0))$ mantenendosi nell'insieme $\Delta(1/m)$, epperò $f(x, \psi(x))$ tende appunto ad $f(x_0, \psi(x_0))$; donde la conclusione (7).

2. L'insieme δ costruito nel numero precedente dipende dalla funzione $f(x, y)$, ma non dipende affatto dalla funzione continua $\psi(x)$ considerata. In particolare, se si tien conto anche dell'ipotesi che $f(x, y)$ non supera mai in S una conveniente funzione $k(x)$, sommabile in I , di guisa che la (1) ammette soluzioni assolutamente continue in I , si può concludere che:

Se $\varphi(x)$ è una soluzione della (1), assolutamente continua nell'intervallo I , la funzione $f(x, \varphi(x))$ è asintoticamente continua in ogni punto della porzione δ di I .

(5) Questa circostanza, dimostrata nella mia Nota citata in (1), esprime appunto la quasicontinuità semiregolare di $f(x, y)$.

(6) Nel testo si fa qui uso del postulato di Zermelo, peraltro già utilizzato attraverso la teoria della misura.

(7) Cfr. STAMPACCHIA, loc. cit. (1), § 7, II.

Nelle ipotesi precedenti è anche

$$(2) \quad \varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt \quad (a \leq x \leq b);$$

pertanto, se $k(x)$ è addirittura una costante, il teorema enunciato nella prefazione segue subito dalla proposizione precedente e dal fatto che l'integrale indefinito secondo Lebesgue di una funzione misurabile e limitata è derivabile in ogni punto in cui la funzione integranda è asintoticamente continua e vi ha come derivata la funzione integranda ⁽⁸⁾.

Se $k(x)$ è soltanto sommabile in I , dalla (2) e dal fatto che l'integrale indefinito secondo Lebesgue di una funzione sommabile in un intervallo è derivabile in quasi tutti i punti in cui la funzione integranda è asintoticamente continua, avendo in quasi tutti questi punti la funzione integranda come derivata ⁽⁹⁾, segue soltanto che ogni soluzione $\varphi(x)$ soddisfa alla (1) in quasi tutto l'insieme δ . Quindi è ovvio che la dimostrazione del nostro teorema richiede ancora qualche considerazione complementare.

3. La funzione $g(x)$ sia sommabile nell'intervallo I , ed in I sia $|g(x)| \leq h(x)$, con $h(x)$ anch'essa sommabile in I . Inoltre la funzione $g(x)$ subordini funzioni continue sugli insiemi e_1, e_2, e_3, \dots , chiusi e soddisfacenti alla $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(e_n) = b - a$. Sia e'_n l'insieme dei punti di e_n che riescono di densità lineare 1 per e_n ; allora l'insieme e ottenuto riunendo i punti di tutti gli e'_n è misurabile ed ha come misura $b - a$ e la funzione $g(x)$ è asintoticamente continua in ogni punto di e .

Si ponga ora

$$G(x) = G(a) + \int_a^x g(t) dt, \quad H(x) = \int_a^x h(t) dt,$$

il valore di $G(a)$ essendo prefissato a piacere, e si denoti con e' quella porzione di e nella quale $H(x)$ è dotata di derivata in senso generale (finita), questa riuscendo inoltre uguale ad $h(x)$, di guisa che $\mu(e') = \mu(e)$ ⁽¹⁰⁾. Ebbene:

In ogni punto di e' la funzione $G(x)$ è derivabile e vi ha $g(x)$ come derivata.

Sia infatti x_0 un punto di e' , e precisamente un punto di e'_m , minore di b . E sia x_1, x_2, \dots una qualunque successione di punti di I , la quale tenda ad x_0 decrescendo. Si indichi con j_n l'intervallo chiuso di estremi x_0 ed x_n

(8) Cfr. S. SAKS, *Theory of integrals* [«Monografie Matematyczne», Varsavia, 1937, seconda edizione], p. 132, teorema (10, 7). Si rammenti che nel caso uni-dimensionale derivata ordinaria e derivata in senso stretto sono tutt'uno; cfr. anche SAKS, loc cit., p. 108.

(9) SAKS, loc. cit., nota prec., pp. 132, 133 e p. 118, teorema (6, 3). Si rammenti sempre che siamo nel caso uni-dimensionale e che in questo caso l'esistenza della derivata generale in un punto implica quella della derivata in senso stretto.

(10) Loc. cit. nota (8), p. 118, teorema (6, 3).

e si ponga $\eta_n = e_m \cdot j_n$. Allora le successioni j_1, j_2, \dots ed η_1, η_2, \dots sono regolari nel senso della teoria della derivazione delle funzioni di insieme ⁽¹¹⁾. In virtù di questa circostanza e del fatto che η_n è chiuso e che x_0 appartiene tanto ad e'_m quanto ad e' si trae

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\eta_n) / \mu(j_n) = 1$$

e

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu(\eta_n)} \int_{\eta_n} h(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu(j_n)} \int_{j_n} h(t) dt = h(x_0).$$

Siano ora s_1, s_2, \dots gli intervalli (chiusi) di I contigui all'insieme chiuso e_m e definiamo la funzione $q(x)$ in tutto I in base alle condizioni di coincidere con $g(x)$ in tutti i punti di e_m e di essere continua e lineare in ciascuno degli intervalli s_1, s_2, \dots . Allora $q(x)$ è continua in I e, se n è abbastanza grande, nell'intervallo j_n risulta

$$(5) \quad |q(x)| < |g(x_0)| + 1.$$

Ciò premesso, è

$$G(x_n) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x_n} g(t) dt = \int_{j_n} q(t) dt - \int_{j_n - \eta_n} q(t) dt + \int_{j_n - \eta_n} g(t) dt,$$

con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n - x_0} \int_{j_n} q(t) dt = q(x_0) = g(x_0),$$

ed inoltre, attesa la (3) e la (5),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x_n - x_0} \int_{j_n - \eta_n} q(t) dt \right| \leq (|g(x_0)| + 1) \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(j_n - \eta_n) / \mu(j_n) = 0$$

e, in virtù delle (4) e della $|g(x)| \leq h(x)$,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x_n - x_0} \int_{j_n - \eta_n} g(t) dt \right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu(j_n)} \int_{j_n - \eta_n} h(t) dt = \\ & = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu(j_n)} \int_{j_n} h(t) dt - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu(\eta_n)}{\mu(j_n)} \cdot \frac{1}{\mu(\eta_n)} \int_{\eta_n} h(t) dt = h(x_0) - h(x_0) = 0; \end{aligned}$$

e, in definitiva, il quoziente $(G(x_n) - G(x_0)) / (x_n - x_0)$ tende a $g(x_0)$ quando n tende all'infinito. Di qui e dell'arbitrarietà della successione x_1, x_2, \dots segue che $G(x)$ ammette $g(x_0)$ come derivata destra nel punto x_0 .

Con un ragionamento analogo si dimostra che $G(x)$ ammette $g(x)$ come derivata sinistra in ogni punto di e' maggiore di a . Donde la conclusione.

4. L'insieme e' costruito nel numero precedente dipende soltanto dagli insiemi e_1, e_2, \dots e dalla funzione $h(x)$, ma non dipende dalla funzione $g(x)$, purché questa sia minore in modulo di $h(x)$ e subordini funzioni continue sugli insiemi e_1, e_2, \dots . Data allora una soluzione $\varphi(x)$ della (1), assolutamente continua nell'intervallo I , identifichiamo $G(x)$ con $\varphi(x)$, $g(x)$ con $f(x, \varphi(x))$, gli insiemi $\delta(1), \delta(1/2), \dots$ con gli insiemi e_1, e_2, \dots ed $h(x)$ con la funzione $h(x)$. Allora, se δ' è l'equivalente dell'insieme e' , la funzione $\varphi(x)$ ammette $f(x, \varphi(x))$ come derivata in tutti i punti di δ' , δ' è misurabile ed ha una misura uguale a quella dell'intervallo I . Ed il nostro teorema è dimostrato.

5. Mi propongo ora di dedicare qualche cenno al raffronto dei due teoremi di Volpato e di Cinquini, già ricordati e relativi all'equazione $p=f(x, y, z, q)$, dove $p(=z'_x)$ e $q(=z'_y)$ son le derivate prime della funzione incognita z e dove la f è definita in un insieme del tipo $a \leq x \leq b, \sigma(x) \leq y \leq \tau(x), |z| < +\infty, |q| < +\infty$. Si tratta di un raffronto molto rapido, che non verte sui due teoremi nella loro integrità e che inoltre è limitato ad un caso particolare: quello che $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ si riducano a due costanti, c e d .

Precisamente, Cinquini suppone che:

1) la f sia misurabile rispetto alla x e continua rispetto ad (y, z, q) e considera soluzioni della $p=f$ che soddisfacciano alle seguenti condizioni:

2) siano continue insieme con le loro derivate rispetto alla y ,

3) siano assolutamente continue rispetto alla x ,

4) verifichino l'equazione $p=f$ in quasi tutti i punti di ogni sezione del rettangolo $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ con una parallela all'asse x ;

invece Volpato, che non fa ipotesi analoghe alla 1), considera soluzioni della $p=f$ che soddisfacciano alle seguenti condizioni:

5) siano assolutamente continue rispetto alla x ,

6) siano continue rispetto alla y ,

7) verifichino l'equazione $p=f$ in tutti i punti del rettangolo $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, esclusi al più quelli contenuti in un insieme di misura nulla costituito da tante parallele all'asse y ,

8) abbiano la derivata rispetto ad x minore in modulo di una funzione della sola x , sommabile nell'intervallo $a \leq x \leq b$, ed aggiunga alcune condizioni sul contorno, che qui non interessano.

Orbene, la condizione 7) implica manifestamente la condizione 4), mentre non è detto, almeno finora, il viceversa. Ma aggiungiamo per il momento alla condizione 1) la:

9) f è minore in modulo di una funzione della sola x sommabile nell'intervallo $a \leq x \leq b$,

e consideriamo una funzione $z(x, y)$ soddisfacente alla 2), alla 3) ed alla 4). Allora la funzione $f(x, y, z(x, y), z'_y(x, y))$ è misurabile rispetto ad x e continua rispetto alla y (quindi quasi continua, in modo semiregolare

rispetto alla y) e, per ogni y dell'intervallo $c \leq y \leq d$, è quasi ovunque la derivata di $z(x, y)$, pensata come funzione della sola x e, come tale, assolutamente continua; tutto ciò segue dalle 2), 3) e 4) soltanto. Se ora si tien conto della 9), si può anche affermare che la $f(x, y, z(x, y), z'_y(x, y))$ è anche minore in modulo di una funzione della sola x , sommabile nell'intervallo $a \leq x \leq b$ [ed, è anzi questa, più che la 9), la circostanza essenziale per la deduzione seguente; e questa, attesa la 4), equivale sostanzialmente alla 8)]. Di qui e dal lemma del n. 3 è allora immediato dedurre che, nelle ipotesi attuali, le condizioni 4) e 7) sono perfettamente equivalenti.

Nelle considerazioni precedenti è implicito che:

Se $f(x, y)$, misurabile rispetto alla variabile x e continua rispetto al parametro y nella striscia S , è ivi minore in modulo di una funzione della sola x , sommabile nell'intervallo I , la derivata rispetto ad x dell'integrale

$$\int_a^x f(t, y) dt$$

coincide certamente con $f(x, y)$, se si prescinde in I da una conveniente porzione, che ha misura nulla e che non dipende dal parametro;

più generalmente si potrebbe considerare l'integrale $\int_a^x f(t, y(t)) dt$, con $y(x)$ continua.

Analisi matematica. — *Sul problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma $z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(i)})$. Nota I di ROBERTO CONTI, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.*

1. Si abbia un sistema di equazioni alle derivate parziali del primo ordine nelle funzioni incognite $z^{(1)}, \dots, z^{(k)}$

$$(A) \quad z_x^{(i)} = F^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(1)}, \dots, z_y^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

($z_y^{(i)} = \partial z^{(i)} / \partial y$; $z_y^{(i)} = \partial z^{(i)} / \partial y$) dove le $F^{(i)}$ sono funzioni definite in un certo campo a $2k + 2$ dimensioni.

Si abbiano inoltre k funzioni $\omega^{(1)}(y), \omega^{(2)}(y), \dots, \omega^{(k)}(y)$ definite in un certo intervallo (y_0, y_1) eventualmente illimitato, e sia I l'insieme del piano x, y definito dalle:

$$I: \quad x = 0, \quad y_0 \leq y \leq y_1.$$

Per *soluzione* del problema iniziale relativo al sistema (A) con le date $\omega^{(i)}$ si intende di solito una qualunque k -upla di funzioni $z^{(i)}(x, y)$,

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

$z^{(2)}(x, y), \dots, z^{(k)}(x, y)$ le quali, in un opportuno dominio D del semipiano $x \geq 0$, della cui frontiera faccia parte I ,

i) siano dotate di derivate prime continue rispetto a (x, y) ;

ii) soddisfino (A) , cioè si abbia:

$$z_x^{(i)}(x, y) = F^{(i)}(x, y; z^{(1)}(x, y), \dots, z_y^{(k)}(x, y)), \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

iii) soddisfino le condizioni iniziali

$$(C) \quad z^{(i)}(0, y) = \omega^{(i)}(y) \quad , \quad y_0 \leq y \leq y_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Si presentano com'è noto due questioni distinte; la prima consiste nel ricercare delle condizioni atte ad assicurare la risolubilità del problema, cioè l'esistenza di almeno una soluzione in D , la seconda nel determinare un dominio D nel quale vengano a coincidere due eventuali soluzioni corrispondenti ai medesimi dati iniziali $\omega^{(i)}$ (dominio di unicità della soluzione).

Scopo del presente lavoro è quello di portare un contributo alla prima questione, quella esistenziale, dal punto di vista delle funzioni reali di variabili reali.

2. Per il caso di una sola equazione ($k = 1$)

$$(A_1) \quad z_x = f(x, y; z; z_y)$$

numerosi Autori hanno cercato di determinare un insieme di condizioni di esistenza che offrisse la massima generalità possibile.

Il primo tentativo fu compiuto come è noto da C. Arzelà [1]⁽¹⁾, nella supposizione, rivelatasi poi inesatta (cfr. O. Perron [11], E. Baiada [3]) di poter raggiungere lo stesso grado di generalità che la questione offre per l'analogo problema iniziale nel caso dell'equazione differenziale ordinaria

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y' = dy/dx$$

per la risolubilità della quale è sufficiente, come dimostrò G. Peano⁽²⁾, la sola continuità della $f(x, y)$.

Il tentativo di Arzelà non è rimasto tuttavia senza frutti poichè alcuni dei risultati conseguiti da questo A. hanno permesso qualche anno fa ad E. Baiada [2] di ottenere un teorema di esistenza per la (A_1) sotto condizioni più larghe di quelle precedentemente note ed assai vicine, in certo modo, a condizioni di tipo necessario. (Cfr. E. Baiada [3]).

Poichè per le equazioni differenziali ordinarie il passaggio da una a k equazioni

$$(a) \quad y_i' = f_i(x; y_1, \dots, y_k) \quad , \quad y_i' = dy_i/dx; \quad i = 1, 2, \dots, k$$

non altera il risultato di Peano, valendo anche per i sistemi il teorema di esistenza nella sola ipotesi della continuità delle f_i ⁽²⁾, sembra lecito domandarsi

(1) I numeri in [] si riferiscono alla Bibliografia posta in fondo alla Nota II.

(2) Cfr. ad esempio: G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. Bologna 1941, parte 1^a, cap. I, § 6, n. 2.

se non sia possibile anche per i sistemi alle derivate parziali come (A) una riduzione di ipotesi analoga a quella raggiunta per (A₁).

3. Una tale riduzione di ipotesi in generale è impossibile; per convincersene basteranno le semplici considerazioni seguenti.

Sia $\omega(y)$ una funzione definita per y reale e dotata di derivate di qualunque ordine e si consideri il problema iniziale relativo ad (A) per $k=3$ con i dati iniziali

$$(C') \quad z^{(1)}(0, y) = 0, \quad z^{(2)}(0, y) = \omega(y), \quad z^{(3)}(0, y) = 0,$$

o quello con i dati iniziali

$$(C'') \quad z^{(1)}(0, y) = \omega(y), \quad z^{(2)}(0, y) = 0, \quad z^{(3)}(0, y) = d\omega/dy.$$

Ebbene esistono (cfr. E. E. Levi [10]) dei sistemi (A), addirittura lineari nelle $z^{(i)}$, $z_y^{(i)}$ con coefficienti costanti, per i quali il problema non è risolubile in corrispondenza ai dati (C') oppure ai dati (C''). Un esempio del primo tipo è dato dal sistema

$$(1) \quad z_x^{(1)} = z^{(2)}, \quad z_x^{(2)} = -z_y^{(3)}, \quad z_x^{(3)} = z_y^{(2)},$$

mentre il sistema

$$(2) \quad z_x^{(1)} = z^{(2)}, \quad z_x^{(2)} = z^{(3)}, \quad z_x^{(3)} = z_y^{(2)}$$

offre un esempio del secondo tipo ⁽³⁾.

4. La ricerca di condizioni «minime» per la risolubilità di (A) ha dunque fondamento per $k=1$, ma non, in generale, per k qualsiasi; o in altri termini se si vuole istituire un raffronto tra (a) ed (A) per k qualsiasi non è possibile limitarsi alle sole condizioni di carattere differenziale.

Per questo limiteremo da ora le nostre considerazioni ai sistemi *iperbolici* (in senso largo) cioè a quei sistemi le cui radici caratteristiche associate sono tutte reali ⁽⁴⁾.

Con ciò verranno ad essere esclusi i sistemi come (1) (che ha le radici caratteristiche $0, i, -i$), ma non il sistema (2) (che ha le radici caratteristiche $0, 0, 0$).

L'esempio (2), (C'') prova che non può valere un teorema di esistenza per *tutti* i sistemi iperbolici sotto condizioni differenziali paragonabili a quelle che intervengono per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Per raggiungere un grado di generalità soddisfacente sotto tale aspetto è dunque necessario restringere il campo di indagine a classi di sistemi più particolari.

(3) Il problema (1), (C') «equivale» al problema iniziale per l'equazione di Laplace $z_{xx}^{(1)} + z_{yy}^{(1)} = 0$ con i dati $z^{(1)}(0, y) = 0$, $z_x^{(1)}(0, y) = \omega(y)$, mentre (2), (C'') «equivale» al problema iniziale per l'equazione «del calore» $z_{xx}^{(1)} - z_y^{(1)} = 0$ con i dati $z^{(1)}(0, y) = \omega(y)$, $z_x^{(1)}(0, y) = 0$.

(4) Ricordiamo che si dicono radici caratteristiche associate al sistema (A) le radici caratteristiche della matrice $(F_{ij}) = \left(F_{\frac{i}{j}}^{(i)} \right)$.

Ciò faremo prendendo in esame i sistemi della forma

$$(B) \quad z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; q_y^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

le $f^{(i)}$ essendo funzioni definite in un certo campo che verrà precisato.

5. Le ragioni a favore di questa scelta sono varie.

Anzitutto per i sistemi della forma (B) si possono dare dei teoremi di esistenza senza porre alcuna ipotesi circa la molteplicità delle radici caratteristiche, raggiungendo al tempo stesso una soddisfacente generalità nelle ipotesi differenziali. Ciò risulta in casi particolari da lavori di O. Perron [11], J. Schauder [12], K. O. Friedrichs [7], R. Courant-P. Lax [6] e nel caso generale da un lavoro di T. Ważewski [14] veramente notevole dal nostro punto di vista⁽⁵⁾.

In secondo luogo i sistemi (B) comprendono come caso particolare i sistemi *quasi-lineari in forma diagonale*

$$z_x^{(i)} = a^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}) z_y^{(i)} + b^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

($a^{(i)}$, $b^{(i)}$ funzioni note dei loro argomenti) ai quali solitamente viene ricondotto lo studio del problema iniziale per i sistemi (A) iperbolici⁽⁶⁾.

Infine ai sistemi (B) è possibile applicare il metodo di approssimazioni successive ideato da E. Baiada per $k=1$, nel lavoro già ricordato; tale metodo, che ha il vantaggio di essere del tutto elementare e indipendente dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie, conduce ad un teorema di esistenza sotto condizioni assai generali.

6. Il teorema di esistenza per i sistemi (B) è il seguente:

Le k funzioni $f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; q^{(i)})$, ($i = 1, 2, \dots, k$) siano definite e continue rispetto a $(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; q^{(1)}, \dots, q^{(k)})$ per (x, y) variabile nella striscia

$$\sigma: \quad 0 \leq x \leq a, \quad -\infty < y < \infty$$

e per $z^{(1)}, \dots, z^{(k)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k)}$ reali qualunque.

Nello stesso campo esistano le derivate $f_y^{(i)}, f_{z^{(k)}}^{(i)}, \dots, f_{z^{(k)}}^{(i)}, f_{q^{(i)}}^{(i)}$ limitate e soddisfacenti uniformemente una condizione di Lipschitz rispetto alle $y, z^{(1)}, \dots, z^{(k)}, q^{(i)}$.

(5) In tale lavoro le funzioni incognite $z^{(1)}, \dots, z^{(k)}$ dipendono da più variabili x, y_1, \dots, y_n , ma le ipotesi relative alle $f^{(i)}$ sono più restrittive di quelle del nostro teorema di esistenza (n. 6); tra l'altro si richiede infatti la derivabilità delle $f^{(i)}$ rispetto a tutti gli argomenti, compresa la x .

(6) Si cfr. ad esempio i lavori già citati di J. Schauder [12], K. O. Friedrichs [7], R. Courant-P. Lax [6]. Un metodo diverso è invece quello seguito da M. Cinquini-Cibrario nei lavori [4], [5] dove si considerano sistemi della forma più generale sotto opportune ipotesi relative alla molteplicità delle radici caratteristiche.

Le k funzioni reali $\omega^{(i)}(y)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) siano dotate in $-\infty < y < \infty$ di derivate prime $\dot{\omega}^{(i)}(y) = d\omega^{(i)}/dy$ e seconde $\ddot{\omega}^{(i)}(y) = d^2\omega^{(i)}/dy^2$ continue e tali che sia

$$(3) \quad |\dot{\omega}^{(i)}(y)| \leq N, \quad |\ddot{\omega}^{(i)}(y)| \leq M, \quad -\infty < y < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

con N, M costanti positive.

Posto infine

$$R = 1 + M + kN$$

esista un numero $K > 0$ non minore del massimo modulo delle $f_y^{(i)}, f_{x(i)}^{(i)}, \dots, f_{x(k)}^{(i)}, f_{g(i)}^{(i)}$ e non minore della loro costante di Lipschitz e sia soddisfatta la disuguaglianza

$$(D) \quad K(R + a)^2 \leq 1/2k.$$

Sotto queste condizioni esiste nella striscia σ almeno una soluzione del problema iniziale (C) relativo al sistema (B).

Nei numeri seguenti esporremo l'applicazione del metodo di E. Baiada al caso dei sistemi (B) limitandoci tuttavia ai punti essenziali che riassumiamo qui di seguito.

Il metodo consta di due fasi:

a) per ogni intero n si costruiscono k funzioni $S^{(n,i)} = S^{(n,i)}(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) definite nella striscia σ ed aventi le seguenti proprietà:
di soddisfare le (C) ossia

$$(4) \quad S^{(n,i)}(0, y) = \omega^{(i)}(y); \quad -\infty < y < \infty; \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad n = 1, 2, \dots;$$

di essere continue in σ rispetto a (x, y) ed ammettere derivate prime $S_x^{(n,i)}, S_y^{(n,i)}$ e le derivate seconde $S_{yy}^{(n,i)}$;

di soddisfare il sistema (B) sulle n rette $x = 0, \delta, 2\delta, \dots, (n-1)\delta$ dove $\delta = a/n$ ossia

$$(5) \quad S_x^{(n,i)}((l-1)\delta, y) = f_y^{(i)}((l-1)\delta, y); \quad S^{(n,i)}((l-1)\delta, y), \dots, S^{(n,k)}((l-1)\delta, y); \quad S_y^{(n,i)}((l-1)\delta, y))$$

per $-\infty < y < \infty; \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad n = 1, 2, \dots; \quad l = 1, 2, \dots, n;$

intendendo che $S_x^{(n,i)}((l-1)\delta, y)$ rappresenti per ogni y la derivata della $S^{(n,i)}$ rispetto alla x a destra calcolata nel punto $((l-1)\delta, y)$;

b) si prova che ognuna delle k successioni

$$\{S^{(n,1)}(x, y)\}, \quad \{S^{(n,2)}(x, y)\}, \dots, \{S^{(n,k)}(x, y)\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ammette almeno una funzione limite continua $S^{(1)}(x, y), S^{(2)}(x, y), \dots, S^{(k)}(x, y)$ e si prova infine che le $S^{(i)}(x, y)$ costituiscono una soluzione in σ del sistema (B). È poi evidente, per le (4), che le $S^{(i)}(x, y)$ soddisfano le (C).

Geometria. — *Sulle V_3 algebriche generate da congruenze di curve.* Nota di LEONARD ROTH, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

In vari problemi concernenti le V_3 algebriche compaiono V_3 definite quali luogo d'una congruenza lineare (cioè di un sistema algebrico ∞^2 d'indice uno) di curve di genere $\pi \geq 0$, oppure specificate — almeno in parte — mediante un sistema lineare di superficie il cui sistema caratteristico sia composto con una congruenza siffatta. Nella presente Nota vengon studiati alcuni di questi sistemi lineari nei casi particolari $\pi = 0, 1$, i quali hanno speciale importanza; i risultati qui ottenuti ci permettono, fra l'altro, di estendere certi criteri di Enriques⁽¹⁾ per l'unirazionalità d'una V_3 algebrica.

1. Consideriamo una varietà V algebrica a tre dimensioni, priva di singolarità, contenente una congruenza Γ lineare irriducibile di curve γ di genere $\pi \geq 0$; e supponiamo inoltre che sia dato su V un sistema $|A|$ completo ed irriducibile, di dimensione $r \geq 2$, la cui curva caratteristica variabile consti di un certo numero $n \geq 1$ di curve γ . Allora, se A è regolare, essendo q_2 la irregolarità superficiale di V , per un noto teorema⁽²⁾ si ha che $r = n + 1 - \delta$, ove $0 \leq \delta \leq q_2$.

Preso un fascio $|B|$ di superficie di V , non appartenenti a Γ e m -secanti le γ ($m \geq 1$), riferiamo proiettivamente le superficie di $|A|$ agli iperpiani passanti per un punto O fisso di S_{r+1} , e quelle di $|B|$ ad un fascio di iperpiani di S_{r+1} il cui S_{r-1} base non passi per O . Otteniamo così una rappresentazione⁽³⁾ di V su un cono W m -plo di S_{r+1} , di vertice O ed ordine n , nella quale le curve γ vengon rappresentate sulle generatrici m -ple di W .

Il cono W è birazionale se, e soltanto se, Γ è razionale; e se, inoltre, la superficie A generica è regolare, il fascio $\{\gamma\}$ in essa contenuto è necessariamente lineare: in questo caso risulta che la S_{r-1} -sezione generica di W è anch'essa razionale. Evidentemente la razionalità di Γ discende dalla regolarità di A ; più precisamente,

Se A è regolare, W è luogo di un fascio razionale di piani, oppure (se $n = 4$) è un cono di Veronese; e W è normale in S_{r+1} se, e soltanto se, il sistema caratteristico di A è completo ($r = n + 1$).

Si noti che, se W è birazionale ma non a curve sezioni razionali, A è irregolare, in quanto contiene un fascio irrazionale di curve γ .

Va pure notato che, se A è regolare, e se il sistema caratteristico di $|A|$ è completo, $r = n + 1$, e quindi W è a curve sezioni razionali normali.

(*) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) F. ENRIQUES, «Math. Annalen», 49, 1 (1897).

(2) B. SEGRE, «Mem. Acad. roy. Belgique» (2), 14 (1936).

(3) Tale rappresentazione è conveniente — anche se non essenziale — al nostro scopo, in quanto stiamo studiando la struttura di Γ considerata come superficie proiettivamente assegnata.

È particolarmente interessante il caso $r = n + 1$; allora, dalle note proprietà delle superficie a curve sezioni razionali discende, che: o il sistema $|A|$ contiene due sottosistemi $|A_1|$ e $|A_2|$ complementari, di dimensioni 1 e $r - 2$ rispettivamente, tali che A_1 e A_2 siano entrambi generate da fasci lineari $|\gamma|$ e che l'intersezione variabile di A_1 ed A_2 consista d'una sola γ ; oppure, se $n = 4$, $|A|$ contiene una rete $|A_1|$, a curva caratteristica γ , tale che $A \equiv 2A_1$. Anche nel caso $r < n + 1$ si potrebbero constatare risultati analoghi, sebbene meno precisi, circa la composizione del sistema $|A|$.

2. Supponiamo dapprima $\pi = 0$; allora la superficie A generica, in quanto contiene un fascio di curve razionali, dev'essere razionale o riferibile a rigata e, se una A particolare è spezzata in componenti tutte semplici, ognuna di queste è pure razionale o riferibile ad una rigata. Esaminiamo il caso che A sia *razionale*; in quest'ipotesi, considerando lo spezzamento di una curva sezione di W , vediamo che, quando A , muovendosi con continuità, si spezza in componenti tutte semplici, ogni sua componente dev'essere razionale.

Nel lavoro già citato, Enriques ha studiato le proprietà d'una varietà V contenente un sistema lineare di superficie razionali; tale studio è basato sulla classificazione ivi ottenuta, che giova qui richiamare, delle superficie razionali in quattro famiglie. Si ha precisamente che, dato un modello proiettivo non singolare d'una superficie razionale, si può trasformarlo birazionalmente, sempre rimanendo nel campo K di razionalità dei suoi coefficienti, in una superficie appartenente ad uno dei tipi seguenti:

- 1° superficie a curve sezioni razionali;
 - 2° superficie a curve sezioni ellittiche, compreso il piano doppio con quartica generale di diramazione;
 - 3° superficie a curve sezioni iperellittiche di genere maggiore di uno;
 - 4° cono doppio quadrato, con sestica di diramazione di genere 4;
- oppure, come modello semplice, la superficie F^9 rappresentabile sul piano mediante curve del nono ordine con otto punti base tripli.

Va osservato che ogni superficie — priva di singolarità essenziali — della prima o seconda famiglia è unirazionale o birazionale in K od in $K(P)^{(4)}$; ogni superficie della terza famiglia contiene un fascio di curve razionali determinabili in K ; ogni superficie della quarta famiglia contiene un fascio di curve ellittiche determinabili in K .

Mediante tali considerazioni, Enriques ha stabilito, fra l'altro, che se V contiene (almeno) una rete di superficie razionali di una delle tre prime famiglie, essa è unirazionale, purchè, nel caso in cui le superficie siano della terza famiglia, la curva caratteristica variabile della rete non sia composta colle curve razionali determinabili in K . Se è noto su V un sistema più ampio di tali superficie, il ragionamento cade ugualmente in difetto nel caso analogo, ma può venir completato nel modo seguente.

(4) Cfr. L. ROTH, « Rend. Acc. Lincei » (8), 9, 62 (1950).

Consideriamo, su V , un sistema $|A|$ della terza famiglia, per cui $r \leq n + 1$ ($r \geq 3$), il cui sistema caratteristico sia composto con le curve razionali determinabili in K ; allora, come al n. 1, otteniamo o due sistemi $|A_1|$, $|A_2|$ di superficie razionali su V , oppure una rete $|A_1|$; e siccome la curva sezione di A è iperellittica, A_1 e A_2 debbono appartenere ad una delle tre prime famiglie. Ora, se A_1 o A_2 appartiene alla prima o seconda famiglia, V è unirazionale. Difatti, se A_1 , ad esempio, è unirazionale in K , la cosa è immediata; e se A_1 è unirazionale in $K(P)$, si fissa una curva razionale su una A_2 particolare; per il punto P generico di quest'ultima passa una, ed una sola, A_1 del fascio $|A_1|$, la quale è unirazionale in $K(P)$ e quindi serve a fornire una rappresentazione unirazionale di V . Se invece, per $n = 4$, abbiamo una rete $|A_1|$, basta applicare lo stesso ragionamento ad un fascio di questa. Se $r = 5$, e W non è un cono di Veronese, si può scomporre A_2 in una A_1 ed una A_3 razionale e variabile in un fascio, su cui si ragiona come sopra; e così via, per $r > 5$.

3. Lasciando da parte il caso in cui $\pi = 0$ e A è riferibile ad una rigata irrazionale, passiamo a considerare una congruenza Γ di curve ellittiche a cui sia associato un sistema $|A|$ di dimensione $r \geq 3$; e supponiamo dapprima che A sia razionale.

Nella citata Memoria di Enriques si dimostra che, se V contiene un sistema lineare ∞^3 di superficie razionali della quarta famiglia, V risulta unirazionale, purchè il sistema caratteristico del sistema non sia composto con le curve ellittiche determinabili in K ; in quest'ultimo caso, scegliendo un fascio di dette superficie, si può rappresentare V su uno S_3 doppio la cui superficie di diramazione sia una F^{2m} ($m \geq 3$) dotata di due punti $(2m - 3)$ -pli consecutivi ed una retta $(2m - 6)$ -pla passante per essi.

Consideriamo una V contenente un sistema $|A|$, di dimensione $r \geq 3$, della quarta famiglia, e supponiamo che la curva caratteristica variabile sia composta con $n \geq r - 1$ curve ellittiche. Considerando, come sopra, la scomposizione di A in due componenti semplici, osserviamo anzitutto che una delle componenti deve avere genere aritmetico zero e l'altra genere aritmetico -1 , poichè una superficie a genere aritmetico minore di -1 non può contenere delle curve ellittiche; è quindi escluso il caso in cui W sia un cono di Veronese.

Ora conviene richiamare l'attenzione su una proprietà delle superficie regolari contenenti fasci di curve ellittiche, la quale - a quanto sembra - non è stata sfruttata finora. Da un risultato di Enriques⁽⁵⁾ discende che, nella classificazione di tali superficie, ha ufficio essenziale il fatto della esistenza, o meno, di curve multiple nel fascio; e dalle formule che esprimono i valori dei plurigeneri risulta che alcune classi di quelle superficie debbono possedere un certo numero di curve multiple ellittiche, mentre altre non possono contenerne.

(5) F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche* (Bologna, 1949), p. 264.

Attualmente la generica superficie A è birazionalmente equivalente (in K) alla F^9 del n. 2, e quindi il fascio $|\gamma|$ in essa contenuto è privo di curve multiple; pertanto la congruenza Γ è anch'essa priva di tali curve.

Ciò premesso, possiamo completare i risultati di Enriques dimostrando che:

Se V contiene un sistema $|A|$, ∞^3 almeno, di superficie razionali della quarta famiglia, la cui curva caratteristica variabile sia composta con le curve ellittiche determinabili in K , allora V è unirazionale.

Come abbiamo già visto (n. 1), il cono W è ora luogo di ∞^2 piani, e quindi vi è una scomposizione di A in superficie A_1 e A_2 , ciascuna variabile in un fascio, aventi rispettivamente i generi aritmetici 0 e -1 . Ebbene, i generi geometrici di A_1 e A_2 sono nulli. Difatti, se, ad esempio, A_1 possedesse un sistema canonico effettivo, altrettanto si potrebbe dire di A , in virtù della formula fondamentale $|A'| = |A'_1 + A_2|$, in contrasto colla razionalità di A . Di più, anche il bigenere di A_1 è nullo, poichè, in caso contrario, il fascio $|\gamma|$ contenuto in A_1 dovrebbe possedere delle curve multiple ellittiche in base al citato risultato di Enriques. Per analoga ragione, la superficie A_2 dev'essere riferibile ad una rigata ellittica, in quanto una superficie non riferibile a rigata ed avente $p_g = 0$, $p_a = -1$ possiede un unico fascio lineare di curve ellittiche, contenente almeno tre curve multiple ⁽⁶⁾.

Facciamo infine vedere che A_1 dev'essere della prima o seconda famiglia. Anzitutto possiamo trasformare il sistema $|A|$ in sistema $|F^9|$; allora, quando F^9 si spezza in $F_1 + F_2$, di cui F_1 è razionale e F_2 riferibile ad una rigata ellittica, F_1 e F_2 hanno in comune una cubica piana, e quindi i loro rispettivi generi sezioni π_1 e π_2 soddisfanno alla relazione $\pi_1 + \pi_2 = 2$; e poichè $\pi_2 \geq 1$, risulta che dev'essere $\pi_1 \leq 1$.

Ora, se il fascio $|F_1|$ è tale che F_1 sia unirazionale in K , segue senz'altro che V è unirazionale. Se F_1 è unirazionale in $K(P)$, basta fissare una delle ∞^1 curve razionali su una F_2 particolare, ed osservare che per il punto P generico di questa curva passa una, ed una sola, F_1 , la quale è unirazionale in $K(P)$: si determina così una rappresentazione unirazionale di V .

4. Supponiamo, in secondo luogo, $\pi = 1$, e che A sia regolare con tutti i generi uguali ad uno; se inoltre A è priva di curve eccezionali e il sistema $|A|$ non possiede punti base multipli, quest'ultimo ha per aggiunta la superficie nulla. Dimosteremo che se la varietà V contiene un sistema lineare, ∞^3 almeno, di tali superficie, essa è unirazionale o rappresentabile sull' S_3 doppio avente per superficie di diramazione la F^{2m} del n. 3.

Difatti, quando A si spezza in due componenti semplici, aventi in comune una curva ellittica, ciascuna componente deve avere il genere geometrico uguale a zero; è questa una conseguenza della $|A'| = |A'_1 + A_2| = |A_1 + A'_2|$, ove $A' = 0$, ed inoltre, quando W è un cono di Veronese, della $A_2 = A_1$.

(6) F. ENRIQUES, op. cit. in ⁽⁵⁾, p. 408.

Segue subito che ciascuna componente deve avere anche il genere aritmetico uguale a zero.

Ora, dai risultati di Enriques citati nel n. 3, discende che il fascio $|\gamma|$ di curve ellittiche contenuto in A non può possedere curve multiple, e quindi che i relativi fasci $|\gamma|$ contenuti in A_1 e A_2 son ugualmente privi di curve multiple. Ciò implica che A_1 ed A_2 abbiano il bigenere uguale a zero, eppertanto siano razionali.

In ogni caso, dunque, possiamo scegliere su V due fasci lineari di superficie razionali, tali che la superficie generica di un fascio seghi quella dell'altro secondo una curva ellittica. Se uno dei fasci consta di superficie della prima o seconda famiglia, segue come dianzi che V è unirazionale. Se un fascio consta di superficie della terza famiglia, esso determina su V una congruenza razionale lineare di curve razionali plurisecanti una data superficie del secondo fascio, e quindi anche in questo caso V risulta unirazionale. Solamente nel caso restante, in cui entrambi i fasci constino di superficie della quarta famiglia, dobbiamo aver ricorso alla rappresentazione sull' S_3 doppio, già accennata nel n. 3.

Geometria. - *Sulle superficie del quinto ordine dotate di punti tripli.* Nota di DIONIGI GALLARATI, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. In questa Nota considero superficie algebriche del quinto ordine, \mathcal{F}^5 , dello spazio ordinario, aventi almeno un punto triplo e prive di curve multiple. Precisamente:

1° Stabilisco che una siffatta \mathcal{F}^5 non può possedere più di cinque punti tripli isolati.

2° Determino il numero massimo $X(q)$ dei punti doppi isolati che può possedere una \mathcal{F}^5 che già abbia q punti tripli.

3° Costruisco superficie \mathcal{F}^5 con q punti tripli ed $X(q)$ punti doppi isolati.

Essendo già noto che $X(1) = 24$ ⁽¹⁾, mi limito ai casi $q = 2, 3, 4, 5$ e trovo:

$$X(2) = 20 \quad , \quad X(3) = 16 \quad , \quad X(4) = 4 \quad , \quad X(5) = 0.$$

2. In uno spazio S_3 , in cui (x_0, x_1, x_2, x_3) siano coordinate proiettive omogenee di punto, consideriamo una superficie algebrica del quinto ordine,

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) E. G. TOGLIATTI, *Alcune osservazioni intorno ad una particolare superficie di 5° ordine*. Studi in onore di Salvatore Ortu Carboni. Genova 1935, pp. 253-259 (Tipografia del Senato).

f , che abbia un punto triplo in $P(1, 0, 0, 0)$. La sua equazione sarà allora della forma

$$(1) \quad f \equiv x_0^2 \alpha + 2 x_0 \beta + \gamma = 0,$$

dove α, β, γ denotano forme ternarie nelle sole x_1, x_2, x_3 , di gradi rispettivi 3, 4, 5.

Supponiamo che la suddetta singolarità di f in P sia generica: allora il cono $\alpha^{(2)}$, tangente in P ad f , sarà irriducibile e privo di generatrici multiple.

Consideriamo il cono φ di equazione $\varphi \equiv \alpha\gamma - \beta^2 = 0$, circoscritto ad f da P . Sono note le relazioni che passano tra le singolarità di f e quelle di $\varphi^{(3)}$, onde basterà richiamare rapidamente i fatti necessari per il seguito, i quali conseguono dall'identità

$$(2) \quad \alpha f \equiv \theta^2 + \varphi,$$

ove $\theta = x_0 \alpha + \beta = (1/2)f_0^{(4)}$.

Se Q è un punto doppio di f , distinto da P , ivi si ha $\theta = 0$, e sono possibili due casi:

1° Q appartiene ad α : la retta PQ , in base alla (2), risulta per φ generatrice doppia con piani tangenti coincidenti, o generatrice di molteplicità superiore. Pertanto una generatrice doppia nodale di φ che appartenga ad α non contiene punti doppi di f .

2° Q non appartiene ad α : la retta PQ risulta generatrice doppia (generalmente nodale) per φ . Viceversa se $R(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è la traccia sul piano $x_0 = 0$ di una generatrice doppia di φ , tale che $\alpha(\bar{x}) \neq 0$, il punto $M(-\beta(\bar{x})/\alpha(\bar{x}), \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ risulta doppio per f .

Sia Q un punto triplo di f , distinto da P : la retta PQ è generatrice (semplice) di α ; d'altra parte Q è punto (almeno) doppio per la superficie θ , di equazione $\theta = 0$, e pertanto, in forza della (2), la retta PQ risulta generatrice quadrupla di φ .

Viceversa, sia $R(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ la traccia sul piano $x_0 = 0$ di una generatrice quadrupla di φ , e si abbia $\alpha(\bar{x}) = 0$. Risulta:

$$\varphi_k(\bar{x}) = \gamma(\bar{x}) \alpha_k(\bar{x}) - 2 \beta(\bar{x}) \beta_k(\bar{x}) + \alpha(\bar{x}) \gamma_k(\bar{x}) = 0,$$

ossia:

$$\gamma(\bar{x}) \alpha_k(\bar{x}) - 2 \beta(\bar{x}) \beta_k(\bar{x}) = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Le tre equazioni in x_0 :

$$\theta_k(x_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = x_0 \alpha_k(\bar{x}) + \beta_k(\bar{x}) = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

sono quindi compatibili; e se \bar{x}_0 è la loro comune soluzione, poichè per ipotesi $\theta_0(\bar{x}) = \alpha(\bar{x}) = 0$, il punto $M(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è doppio per θ e, in virtù della (2), triplo per f .

(2) Indichiamo con α, β, γ i coni di equazioni, rispettivamente, $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$.

(3) Cfr., ad esempio, G. VACCARO, *Le ipersuperficie di ordine n con un punto $(n-2)$ -plo*. Note I e II « Rend. Acc. Naz. dei Lincei » (8), 3 (1947), fasc. 3-4.

(4) Indichiamo con $f_k, \varphi_k, \theta_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ le derivate parziali di $f, \varphi, \theta, \alpha, \beta, \gamma$ rispetto ad x_k ($k = 0, 1, 2, 3$).

È chiaro che una linea multipla di f non composta di rette uscenti da P darebbe luogo ad una componente multipla di φ ; ed una retta multipla di f uscente da P sarebbe generatrice multipla di α .

Infine si osservi che i due sistemi $\alpha = \varphi = 0$ ed $\alpha = \beta^2 = 0$ sono equivalenti e quindi ogni generatrice comune a φ ed α conta un numero pari di volte nella loro intersezione; ed una retta che conti $2r$ volte nel gruppo di rette $\alpha = \varphi = 0$, conta r volte nel gruppo di rette $\alpha = \beta = 0$; e reciprocamente.

Viceversa, se α è irriducibile ed il gruppo di rette $\alpha = \varphi = 0$ si riduce al gruppo di rette $\alpha = \beta = 0$ contato due volte, il cono del fascio $\beta^2 - \lambda\varphi = 0$ che contiene una generatrice di α che non appartenga a β , contiene α come parte; pertanto, esistono un valore λ_0 di λ ed un polinomio (di quinto grado) γ tali che $\lambda_0\varphi \equiv \alpha\gamma - \beta^2$.

3. Indicheremo con $\varphi', \alpha', \beta', \gamma'$ le tracce sul piano $x_0 = 0$ dei coni $\varphi, \alpha, \beta, \gamma$.

Supponiamo che la \mathcal{F}^5 rappresentata dall'equazione (1) possenga q punti tripli ed abbia il massimo numero possibile, $X(q)$, di punti doppi isolati. Allora (n. 2):

1° esistono $q - 1$ punti (semplici) di α' , ciascuno dei quali è quadruplo per φ' ;

2° φ' possiede il massimo numero possibile, $X(q)$, di punti doppi ordinari non appartenenti ad α' .

D'altra parte, il numero massimo dei nodi che può possedere una curva piana dell'ottavo ordine, che già abbia $q - 1$ punti quadrupli (supposto che essa sia spezzata in k parti irriducibili di ordini n_1, \dots, n_k , tali che $\sum n_i = 8$, da contarsi ciascuna semplicemente), è:

$$\sum \binom{n_i - 1}{2} + \sum n_i n_j - 6(q - 1) = \frac{1}{2} [\sum n_i]^2 - \frac{3}{2} \sum n_i + k - 6q + 6 = 26 - 6q + k.$$

Pertanto, detto ρ il numero dei punti doppi di φ' che appartengono ad α' :

$$(3) \quad X(q) + \rho \leq 26 - 6q + k;$$

poichè $X(q) + \rho \geq 0$ e $k \leq 8$, risulta $34 - 6q \geq 0$, ossia $q \leq 5$, sicchè: *Una \mathcal{F}^5 algebrica può possedere al più cinque punti tripli isolati.* Vedremo che tale limite superiore è effettivamente raggiunto.

Per ottenere che la \mathcal{F}^5 abbia il massimo numero $X(q)$ di punti doppi, dovremo scegliere α', β', γ' in modo che la differenza $k - \rho$ risulti la massima possibile: e raggiungeremo tale intento facendo spezzare φ' in rette e coniche.

È evidente che, se φ' si compone di curve di ordine ≤ 2 , la (3) può venir sostituita dalla

$$X(q) = 26 - 6q + k - \rho.$$

Nel caso $q = 1$, si realizza il massimo di 24 punti doppi facendo spezzare φ' in quattro coniche tritangenti ad α' ($k = 4$, $\rho = 0$)⁽⁵⁾. Si vede infatti

(5) Cfr. E. G. TOGLIATTI, loc. cit.

subito che non si riesce ad aumentare la differenza $k - \rho$ facendo spezzare alcune di tali coniche in coppie di rette (le quali dovrebbero essere, necessariamente, coppie di tangenti di α' uscenti da un medesimo punto di α').

4. \mathbb{F}^5 CON DUE PUNTI TRIPLI ($X(2) = 14 + k - \rho$). — Un'analisi che non presenta alcuna difficoltà, mostra che il valore massimo della differenza $k - \rho$ è 6; e che lo si raggiunge facendo spezzare φ' nelle quattro tangenti d_i di una cubica ellittica arbitraria α' , uscenti da un medesimo punto A_0 di α' ed in una coppia di coniche σ_j tritangenti ad α' .

Ciò si può fare in più modi, in quanto una delle coniche σ_j (o anche entrambe) può a sua volta constare di due rette uscenti da un punto di α' e tangenti altrove ad α' .

Per poter concludere che esistono superficie del quinto ordine con due punti tripli e 20 punti doppi, basta dimostrare che è possibile scegliere il punto A_0 e le coniche σ_j in modo tale che esista una curva del quart'ordine β' , non contenente α' come parte, tangente ad α' in A_0 (o dotata ivi di punto doppio) e passante per i punti di contatto con α' delle rette d_i e delle coniche σ_j .

Diciamo A_i il punto di contatto di d_i con α' ; B_{j1}, B_{j2}, B_{j3} i punti di contatto con α' di σ_j ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2$); u l'integrale di prima specie esistente su α' scelto in modo che la condizione di allineamento di tre punti di α' sia $u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}$; u_i ed u_{jh} i valori che esso assume nei punti A_i e B_{jh} ($i = 0, 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2$; $h = 1, 2, 3$).
Risulta:

$$4u_0 + 2 \sum_i^4 u_i \equiv 0 \quad ; \quad 2(u_{j1} + u_{j2} + u_{j3}) \equiv 0 \quad (j = 1, 2).$$

Se si scelgono i punti A_j e B_{jh} in modo che i valori delle tre somme

$$2u_0 + \sum_i^4 u_i \quad ; \quad \sum_h^3 u_{1h} \quad ; \quad \sum_h^3 u_{2h}$$

siano (a prescindere dall'ordine, ed a meno di multipli dei periodi) $\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2$, risulta:

$$2u_0 + \sum_i^4 u_i + \sum_j^2 \sum_h^3 u_{jh} \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}.$$

Per i punti A_i e B_{jh} passa allora una curva del quart'ordine β' , che non contiene α' come parte, ed è tangente ad α' in A_0 (od ha ivi un punto doppio).

Pertanto: $X(2) = 20$.

5. \mathbb{F}^5 CON TRE PUNTI TRIPLI ($X(3) = 8 + k - \rho$). — Si ottiene per la differenza $k - \rho$ il valore massimo 8 soltanto facendo spezzare φ' nelle due quaterne di tangenti ad α' , uscenti da due punti A_0, B_0 di α' .

Se A_1, A_2, A_3, A_4 ; B_1, B_2, B_3, B_4 sono gli otto punti di contatto e se u_i e v_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) sono i valori di u nei punti A_i e B_i , si ha:

$$4 u_0 + 2 \sum_i^4 u_i \equiv 0 \quad ; \quad 4 v_0 + 2 \sum_i^4 v_i \equiv 0.$$

Se i punti A_i e B_i si scelgono in modo che le due somme

$$2 u_0 + \sum_i^4 u_i \quad , \quad 2 v_0 + \sum_i^4 v_i$$

assumano, a meno di multipli dei periodi, uno medesimo dei tre valori $\omega_1/2$, $\omega_2/2$, $(\omega_1 + \omega_2)/2$, si ha:

$$2(u_0 + v_0) + \sum_i^4 (u_i + v_i) \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2};$$

quindi esiste una curva del quarto ordine β' , non contenente α' come parte, le cui dodici intersezioni con α' sono: i punti A_0 e B_0 contati ciascuno due volte, e gli otto punti A_i e B_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Quindi: $X(3) = 16$.

Poichè è possibile un solo tipo di spezzamento di φ' che conduca ad una \mathcal{F}^5 con tre punti tripli e sedici punti doppi, questa superficie appare particolarmente notevole: per ciascuna delle rette che uniscono due punti tripli escono quattro piani, ciascuno dei quali contiene quattro dei sedici punti doppi; e questi giacciono su di una conica passante per i due punti tripli considerati. Pertanto \mathcal{F}^5 contiene 13 coniche, dodici nei piani predetti, ed una nel piano dei tre punti tripli.

Assunti come vertici di un tetraedro di riferimento i tre punti tripli ed ed uno dei sedici punti doppi, ed operando la trasformazione cubica

$$(4) \quad \rho x'_i = \frac{1}{x_i} \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

la \mathcal{F}^5 in questione si trasforma in una superficie del quart'ordine con tre punti doppi uniplanari, provenienti dai tre punti tripli, e sei punti doppi conici, provenienti dai sei punti doppi di \mathcal{F}^5 non appartenenti ad alcuna delle facce del tetraedro.

6. \mathcal{F}^5 CON QUATTRO PUNTI TRIPLI ($X(4) = 2 + k - \rho$). - Si vede facilmente che il massimo valore possibile della differenza $k - \rho$ è 2, e che tale valore si raggiunge quando φ' si spezzi in quattro coniche σ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), che passino per tre punti A_1, A_2, A_3 di α' , che tocchino α' in altri punti e tali inoltre che, ad esempio, σ_1 e σ_2 , e del pari σ_3 e σ_4 , abbiano a comune un punto distinto da A_1, A_2, A_3 e giacente su α' .

Denotando con B_1, B_2, B_3, B_4 i quattro punti di contatto di α' con le coniche σ_i , con C_{12} il punto di α' comune a σ_1, σ_2 , con C_{34} il punto di α' comune a σ_3 e σ_4 , e se $a_i, b_h; c_{lm}$ sono i valori che u assume nei punti A_i, B_h, C_{lm} , risulta:

$$2 b_h + c_{12} + \sum_i^3 a_i \equiv 0 \quad (h = 1, 2) \quad ; \quad 2 b_h + c_{34} + \sum_i^3 a_i \equiv 0 \quad (h = 3, 4)$$

e quindi

$$2(a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + c_{12}) \equiv 0 \quad ; \quad 2(a_1 + a_2 + a_3 + b_3 + b_4 + c_{34}) \equiv 0.$$

Se si scelgono i punti A, B, C in modo tale che le somme

$$a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + c_{12} \quad , \quad a_1 + a_2 + a_3 + b_3 + b_4 + c_{34}$$

assumano (a meno di multipli dei periodi) uno medesimo dei tre valori $\omega_1/2$, $\omega_2/2$, $(\omega_1 + \omega_2)/2$, talchè:

$$2 \sum_i^3 a_i + \sum_i^4 b_i + c_{12} + c_{34} \equiv 0 \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2),$$

ne consegue che esiste una curva del quarto ordine β' , non contenente α' come parte, le cui intersezioni con α' sono: due in A_1 , due in A_2 , due in A_3 e le altre nei sei punti B e C.

Pertanto: $X(4) = 4$.

L'esistenza di una \mathcal{F}^5 con quattro punti tripli e quattro punti doppi si può, d'altra parte, dedurre dal fatto che se si assumono come vertici del tetraedro di riferimento quattro punti semplici di una superficie del terzo ordine V^3 che possieda quattro punti doppi, mediante la trasformazione (4) la V^3 si muta appunto in una \mathcal{F}^5 con quattro punti tripli e quattro punti doppi.

7. F^5 CON CINQUE PUNTI TRIPLI ($X(5) = k - \rho - 4$). — Il massimo valore possibile per la differenza $k - \rho$ risulta 4, e lo si raggiunge quando φ' si componga di quattro coniche σ_i passanti per quattro punti di α' , A_1, A_2, A_3, A_4 e tangenti ad α' rispettivamente nei punti B_1, B_2, B_3, B_4 .

Se a_i e b_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sono i valori che u assume nei punti A_i e B_i si ha:

$$\sum_i^4 a_i + 2b_k \equiv 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

epperanto

$$2 \sum_i^4 a_i + 2b_1 + 2b_2 \equiv 0 \quad , \quad 2 \sum_i^4 a_i + 2b_3 + 2b_4 \equiv 0.$$

Se si scelgono i punti A_i e B_i in modo tale che le due somme

$$\sum_i^4 a_i + b_1 + b_2 \quad , \quad \sum_i^4 a_i + b_3 + b_4$$

assumano (a meno di multipli dei periodi) uno medesimo dei tre valori $\omega_1/2$, $\omega_2/2$, $(\omega_1 + \omega_2)/2$, per essi passa una curva del quarto ordine β' che tocca α' nei quattro punti A_i e che non contiene α' come parte.

Da ciò segue che: $X(5) = 0$.

Una \mathcal{F}^5 con cinque punti tripli si ottiene, altresì, come trasformata mediante le (4) di un cono cubico ellittico passante semplicemente per i quattro punti fondamentali delle coordinate.

Meccanica. — *Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti* ^(*). Nota I di DOMENICO CALIGO, presentata ^(**) dal Socio G. KRALL.

1. Il calcolo delle frequenze di un'asta vibrante libera (per quanto riguarda le schematizzazioni di uno scafo galleggiante) o incastrata al piede e libera in testa (per la schematizzazione di una torre) è esaurito per il caso della *uniforme distribuzione delle masse e della rigidità flessionale* ($B = E\mathfrak{J}$) dalle ricerche, condotte sino ai numeri nel classico trattato *Theory of Sound* del Rayleigh ⁽¹⁾. Per le masse e rigidità flessionali variabili il problema si sa risolvere in generale con i metodi diretti del calcolo delle Variazioni, in particolare con il metodo cosiddetto del Ritz ⁽²⁾.

Indichiamo con E, \mathfrak{J}, μ, q rispettivamente modulo di elasticità, momento d'inerzia della sezione resistente, masse e forze perturbanti per unità di lunghezza; le soluzioni per le vibrazioni trasversali siano della forma di $w(x, t) = \bar{w}(x) e^{i\nu t}$, dopo aver supposto che l'azione perturbante sia armonica del tipo

$$q(x, t) = q(x) e^{i\nu t}, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Abbandonando la sopralineatura di $\bar{w}(x)$, si tratta di rendere estremo, senza passare attraverso l'algoritmo euleriano, l'integrale

$$(1) \quad \int_0^1 \left[E \mathfrak{J} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \mu \sigma^2 w^2 \right] dx$$

(ove σ è un parametro e — senza danno della generalità — si è supposta la *asta di lunghezza unitaria*). A tale scopo, considerato un sistema completo di funzioni, soddisfacenti le condizioni ai limiti specifiche del problema, che si considera, si è portati ad assumere la w come combinazione lineare

$$(2) \quad w(x) = \sum_1^N A_0 w_0(x)$$

i coefficienti della quale (A_0), *a priori* incogniti, si fanno concorrere al minimo. Introducendo la (2) nella (1) e posto

$$(3) \quad \mu_{0\tau} = \int_0^1 \frac{\mu(x)}{\mu_0} w_0(x) w_\tau(x) dx, \quad \varepsilon_{0\tau} = \int_0^1 E \mathfrak{J} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{d^2 w_\tau}{dx^2} dx$$

si ha una forma quadratica negli A_0 , che è estrema per gli A_0 soddisfacenti le equazioni, che si ottengono annullando le derivate parziali prime della forma,

$$\sum_1^N (\varepsilon_{0\tau} - \sigma^2 \mu_{0\tau}) A_\tau = 0, \quad (\rho = 1, 2, 3, \dots, N).$$

(*) Lavoro eseguito nell'Ist. Naz. per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) J. W. STRUTT, baron RAYLEIGH, *The theory of Sound* (Macmillan, London 1944, ristampa), vol. I, § 174.

(2) S. TIMOSHENKO, *Théorie des vibrations* (Béranger, Paris 1939), § 62.

Il discriminante della forma, eguagliato a zero, porge l'equazione delle frequenze ⁽³⁾.

Nel presente lavoro io mi propongo di assegnare i coefficienti $\mu_{q\tau}$, $\varepsilon_{q\tau}$ per \mathfrak{J} e μ variabili con legge del tipo:

$$(4) \quad \begin{cases} j(\xi) = 1 - k_1 \xi - k_2 \xi^2 - k_3 \xi^3, & [E \mathfrak{J} = E \mathfrak{J}_0 j(\xi)], \\ \frac{\mu(\xi)}{\mu_0} = 1 - m_1 \xi - m_2 \xi^2 - m_3 \xi^3, \end{cases}$$

scegliendo come w_0 il sistema più *naturale* di funzioni per il sistema vibrante di cui si tratta, e precisamente — nei due casi sopra considerati — le autofunzioni dell'asta omogenea vibrante libera o incastrata ad un solo estremo.

Ciò è stato fatto, relativamente all'asta libera (nel vuoto; schematizzazione di uno scafo) per le due prime autofunzioni $w = \text{cost.}$, $w = w_1(\xi)$, dal Timoshenko ⁽²⁾ e, successivamente, da G. Krall, nei suoi studi sugli scafi vibranti con il fluido, per le prime cinque autofunzioni ⁽⁴⁾. Il calcolo dei $\mu_{q\tau}$, $\varepsilon_{q\tau}$ in queste ricerche si svolge per via numerica, senza dubbio insidiosa appena cresce l'ordine dell'autofunzione.

Su proposta di quest'ultimo Autore, pervenuta all'Istituto di Calcolo, fu dato a me l'incarico di considerare una rigorosa valutazione analitica dei $\mu_{q\tau}$, $\varepsilon_{q\tau}$ per i problemi suddetti. Poiché questa valutazione riesce in modo esauriente, con criterii suscettibili di estensione ad altri problemi, sembra utile darne conoscenza come necessario complemento alla teoria ed alla tecnica di calcolo delle aste vibranti in generale (riportata nella *Theory of Sound* del Rayleigh ⁽¹⁾) ed in particolare alla soluzione di quei due notevoli problemi tecnici, che riguardano le vibrazioni delle navi e quelle delle torri.

2. Per non doverci interrompere più avanti, raccogliamo qui alcune notazioni, che ci serviranno ripetutamente; giova anzitutto ricordare che, per note formule di trigonometria iperbolica, è

$$(5) \quad \frac{\text{Sh } \alpha}{\text{Ch } \alpha + (-1)^m} \begin{cases} = \text{Th } \frac{\alpha}{2}, & \text{se } m \text{ pari,} \\ = \text{Cth } \frac{\alpha}{2}, & \text{se } m \text{ dispari }^{(5)} \end{cases}$$

(3) Cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni* (Zanichelli, Bologna 1940), vol. II, cap. XIII, § 2, n. 1. Tratteremo al § 5 (Nota II) della risoluzione dell'equazione delle frequenze nei due casi qui considerati.

(4) G. KRALL, *Vibrazioni di uno scafo elastico galleggiante su un fluido sede di propagazioni ondose*. « Rendic. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. I, 1946, fasc. 9 e 12; pp. 937-948 e 1272-1280; cfr. anche, dello stesso A., la Memoria con medesimo titolo in « *Tecnica Italiana* » — Trieste 1946 (§ 2, n. 1). In questi lavori, altresì, le (4) sono limitate ai termini di II grado.

(5) In conformità con la tradizione si è posto:

$$\text{Sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{Ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{Th } x = \frac{\text{Sh } x}{\text{Ch } x}, \quad \text{Cth } x = \frac{1}{\text{Th } x}.$$

Se α e β sono due numeri reali positivi, chiameremo γ il rapporto fra il minore e il maggiore, cosicch  sia sempre

$$(6) \quad 0 < \gamma < 1;$$

se $\alpha < \beta$ (perci  $\gamma = \alpha/\beta$), porremo

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} M^{(i)}(\alpha, \beta) &= \frac{\gamma(1+\gamma^4)}{[\beta(1-\gamma^4)]^2} \frac{\text{Sh } \alpha}{\text{Ch } \alpha + (-1)^m} \frac{\text{Sh } \beta}{\text{Ch } \beta + (-1)^n}, \\ N_1^{(i)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \frac{(1+3\gamma^2)}{[\beta(1-\gamma^2)]^3} \frac{\text{Sh } \beta}{\text{Ch } \beta + (-1)^n} - \gamma(3+\gamma^2) \frac{\text{Sh } \alpha}{\text{Ch } \alpha + (-1)^m}, \\ N_2^{(i)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \frac{(1-3\gamma^2)}{[\beta(1+\gamma^2)]^3} \frac{\text{Sh } \beta}{\text{Ch } \beta + (-1)^n} - \gamma(3-\gamma^2) \frac{\text{Sh } \alpha}{\text{Ch } \alpha + (-1)^m}, \\ L^{(i)}(\gamma^2) &= \frac{1+6\gamma^2+\gamma^4}{[\beta(1-\gamma^2)]^4}, \end{aligned} \right.$$

con $i = 1$, se m e n sono pari; $i = 2$, se m e n dispari; $i = 3$, se m pari e n dispari;

se $\alpha > \beta$ (perci  $\gamma = \beta/\alpha$), porremo invece

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} M^{(4)}(\alpha, \beta) &= \frac{\gamma(1+\gamma^4)}{[\alpha(1-\gamma^4)]^2} \text{Th } \frac{\alpha}{2} \text{Cth } \frac{\beta}{2}, \\ N_1^{(4)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \frac{(1+3\gamma^2)}{[\alpha(1-\gamma^2)]^3} \text{Th } \frac{\alpha}{2} - \gamma(3+\gamma^2) \text{Cht } \frac{\beta}{2}, \\ N_2^{(4)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \frac{(1-3\gamma^2)}{[\alpha(1+\gamma^2)]^3} \text{Th } \frac{\alpha}{2} - \gamma(3-\gamma^2) \text{Cth } \frac{\beta}{2}, \\ L^{(4)}(\gamma^2) &= \frac{1+6\gamma^2+\gamma^5}{[\alpha(1-\gamma^2)]^4}. \end{aligned} \right.$$

3. ASTA CON ESTREMI LIBERI. - *a*) Per avvantaggiarsi della simmetria conviene cambiare la variabile ξ in quella ξ' , ottenibile mediante la trasformazione $\xi' = 1/2 - \xi$, ($-1/2 \leq \xi' \leq 1/2$).

Il sistema differenziale, relativo al problema qui considerato,  

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^4 w}{d\xi'^4} - \delta^4 w(\xi') &= 0, \\ \frac{d^2 w}{d\xi'^2} \Big|_{\xi' = -1/2} = \frac{d^3 w}{d\xi'^3} \Big|_{\xi' = -1/2} = \frac{d^2 w}{d\xi'^2} \Big|_{\xi' = +1/2} = \frac{d^3 w}{d\xi'^3} \Big|_{\xi' = +1/2} &= 0, \end{aligned} \right.$$

e l'equazione delle frequenze

$$(10) \quad \text{Ch } \delta \cdot \cos \delta - 1 = 0,$$

ovvero (poich  $\cos \delta \neq 0$):

$$(11) \quad \text{Th}^2 \frac{\delta}{2} = \text{tang}^2 \frac{\delta}{2}.$$

La successione $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \dots$ degli autovalori (verificanti la (10)) ha la forma

$$(12) \quad \beta_0 = \beta_1 = 0 \quad , \quad \beta_\rho = (2\rho - 1) \frac{\pi}{2} + (-1)^\rho \eta_\rho \quad , \quad (\rho \geq 2) ,$$

con $0,018' > \eta_2 > \eta_3 > \dots > 0$.

Nella Tabella I sono riportati gli η_ρ e i primi cinque autovalori. Le autosoluzioni, simmetriche rispetto all'origine ($\xi' = 0$), sono - a meno di un fattore costante arbitrario -⁽⁶⁾

$$(13) \quad w_0(\xi') = 1 \quad , \quad w_\tau(\xi') = \xi' ,$$

$$(13_\rho) \quad w_\rho(\xi') \left\{ \begin{aligned} &= \frac{\operatorname{Ch} \frac{\beta_\rho}{2} \cos \beta_\rho \xi' + \cos \frac{\beta_\rho}{2} \operatorname{Ch} \beta_\rho \xi'}{\sqrt{\operatorname{Ch}^2 \frac{\beta_\rho}{2} + \cos^2 \frac{\beta_\rho}{2}}} \quad , \quad (\rho \geq 2 \text{ e pari}) , \\ &= \frac{\operatorname{Sh} \frac{\beta_\rho}{2} \operatorname{sen} \beta_\rho \xi' + \operatorname{sen} \frac{\beta_\rho}{2} \operatorname{Sh} \beta_\rho \xi'}{\sqrt{\operatorname{Sh}^2 \frac{\beta_\rho}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\beta_\rho}{2}}} \quad , \quad (\rho \geq 3 \text{ e dispari}) . \end{aligned} \right.$$

b) È richiesto il calcolo degli integrali (3), che si trasformano nei seguenti

$$(3') \quad \mu_{\rho\tau} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mu(\xi')}{\mu_0} w_\rho(\xi') w_\tau(\xi') d\xi' \quad , \quad \varepsilon_{\rho\tau} = \int_{-1/2}^{1/2} j(\xi') \frac{d^2 w_\rho}{d\xi'^2} \frac{d^2 w_\tau}{d\xi'^2} d\xi' \quad , \quad (\rho, \tau \geq 0) ;$$

interessa altresì⁽⁷⁾ l'integrale

$$(3'') \quad f_\rho = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{q(\xi')}{q_0} w_\rho(\xi') d\xi'$$

essendo i moltiplicatori delle autofunzioni forniti dalle (4), ove si legga ξ' in luogo di ξ e dalla

$$(4') \quad \frac{q(\xi')}{q_0} = 1 - q_1 \xi' - q_2 \xi'^2 - q_3 \xi'^3 .$$

Gli integrali (3'), (3'') sono perciò combinazioni lineari degli integrali

$$(14) \quad W_{\rho\tau, h} = \int_{-1/2}^{1/2} \xi'^h w_\rho(\xi') w_\tau(\xi') d\xi' \quad , \quad W_{\rho\tau, h}^{(2)} = \int_{-1/2}^{1/2} \xi'^h \frac{d^2 w_\rho}{d\xi'^2} \frac{d^2 w_\tau}{d\xi'^2} d\xi' ,$$

$$W_{\rho, h} = \int_{-1/2}^{1/2} \xi'^h w_\rho(\xi') d\xi' ,$$

(6) Cfr. G. KRALL, op. cit. in (3), vol. II, cap. XIII, § 1, n. 4 (p. 280); cfr. anche: id. A., op. cit. in (4). Il fattore arbitrario è stato scelto in modo che le notazioni e le espressioni coincidessero con quelle del KRALL e del TIMOSHENKO (op. cit. in (2); § 57); al § 3 d) daremo le autosoluzioni normalizzate.

(7) Cfr. op. cit. in (4); formule (14) e (15).

$$W_{\varrho\tau,3} \left\{ \begin{array}{l} = 0, \text{ se } \rho + \tau \text{ pari} \geq 4, \\ = (-1)^{(\varrho+\tau-1)/2} \cdot 12 \cdot \left[\frac{1}{2} M^{(i)}(\alpha, \beta) + N_1^{(i)}(\alpha, \beta) + N_2^{(i)}(\alpha, \beta) - L^{(i)}(\gamma^2) - L^{(i)}(-\gamma^2) \right], \\ \text{se } \left\{ \begin{array}{l} \rho \text{ pari} \geq 2 \text{ e} \\ \tau \text{ dispari} \geq 3 \end{array} \right. , \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} i=3, \text{ se } \rho < \tau; \\ i=4, \text{ se } \rho > \tau; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$W_{\varrho\varrho,h}^{(2)} = W_{\tau\varrho,h}^{(2)} = 0, \quad (\rho \geq 0, h \geq 0);$$

$$W_{\varrho\tau,0}^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} = \frac{\alpha^4}{2}, \text{ se } \tau = \rho \geq 2, \\ = 0, \text{ se } \tau \neq \rho \end{array} \right. ; \quad W_{\varrho\tau,h}^{(2)} = W_{\tau\varrho,h}^{(2)};$$

$$W_{\varrho\tau,1}^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} = 0, \text{ se } \rho + \tau \text{ pari} \geq 2 \\ = (-1)^{(\varrho+\tau-1)/2} \cdot 16 M^{(i)}(\alpha, \beta) \cdot \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + \gamma^4}, \text{ se } \left\{ \begin{array}{l} \rho \text{ pari} \geq 2 \text{ e} \\ \tau \text{ dispari} \geq 3 \end{array} \right. , \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} i=3, \text{ se } \rho < \tau; \\ i=4, \text{ se } \rho > \tau; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$W_{\varrho\tau,2}^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} = \frac{\alpha^4}{2} \left[\frac{1}{12} - \frac{5}{\alpha^2} \frac{\text{Sh } \alpha}{\text{Ch } \alpha + (-1)^\varrho} \left(\frac{1}{2} \frac{\text{Sh } \alpha}{\text{Ch } \alpha + (-1)^\varrho} - \frac{1}{\alpha} \right) \right], \text{ se } \tau = \rho \geq 2, \\ = (-1)^{(\tau-\varrho)/2} \cdot 8 \alpha^2 \beta^2 \left[\frac{2 \gamma^2}{1 + \gamma^4} M^{(i)}(\alpha, \beta) + N_1^{(i)}(\alpha, \beta) - N_2^{(i)}(\alpha, \beta) \right], \text{ se } \tau > \rho \geq 2, \text{ con} \\ i=1, \text{ se entrambi pari}; i=2, \text{ se entrambi dispari}; \\ = 0, \text{ se } \rho + \tau \text{ dispari} \geq 5; \end{array} \right.$$

$$W_{\varrho\tau,3}^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} = 0, \text{ se } \rho + \tau \text{ pari} \geq 2, \\ = (-1)^{(\varrho+\tau-1)/2} \cdot 12 \alpha^2 \beta^2 \left[\frac{\gamma^2}{1 + \gamma^4} M^{(i)}(\alpha, \beta) + N_1^{(i)}(\alpha, \beta) - N_2^{(i)}(\alpha, \beta) - L^{(i)}(\gamma^2) + L^{(i)}(-\gamma^2) \right], \\ \text{se } \left\{ \begin{array}{l} \rho \text{ pari} \geq 2 \text{ e} \\ \tau \text{ dispari} \geq 3 \end{array} \right. , \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} i=3, \text{ se } \rho < \tau; \\ i=4, \text{ se } \rho > \tau. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La tabella II contiene gli integrali f_ϱ per $0 \leq \rho \leq 5$; le tabelle III e IV contengono rispettivamente, gli integrali $\mu_{\varrho\tau}$ ed $\varepsilon_{\varrho\tau}$ per ρ e τ compresi fra 0 e 5.

c) *Valutazioni asintotiche.* - Indicheremo con $O[x^{-n}]$ una quantità infinitesima di ordine n rispetto ad x , quando $x \rightarrow +\infty$; si ricavano le seguenti valutazioni asintotiche per gli integrali (14):

$$W_{\varrho,2} \sim (-1)^\varrho 2^{-1/2} \cdot 4 \sqrt{2} O[(\rho\pi)^{-3}], \quad \text{se } \rho \text{ pari},$$

$$W_{\varrho,3} \sim (-1)^{(\varrho-1)/2} \cdot 6 \sqrt{2} \cdot O[(\rho\pi)^{-3}], \quad \text{se } \rho \text{ dispari},$$

$$W_{\varrho,4} \sim (-1)^\varrho 2^{-1/2} \cdot 6 \sqrt{2} \cdot O[(\rho\pi)^{-3}], \quad \text{se } \rho \text{ pari};$$

fissato uno degli indici ρ o τ , quando sono diversi fra loro,

$$W_{\varrho\tau,1} \sim (-1)^{(\varrho+\tau-1)/2} \cdot 8 \alpha \cdot O[(\tau\pi)^{-3}], \quad W_{\varrho\tau,3} \sim (-1)^{(\varrho+\tau-1)/2} \cdot 6 (\alpha+2) \cdot O[(\tau\pi)^{-3}], \quad \text{se } \rho + \tau \text{ dispari},$$

$$W_{\varrho\tau,2} \left\{ \begin{array}{l} \sim \frac{1}{24} + \frac{3}{4} O[(\rho\pi)^{-2}], \text{ se } \tau = \rho, \\ \sim (-1)^{(\tau-\varrho)/2} 8 (\alpha+1) \cdot O[(\tau\pi)^{-3}], \text{ se } \rho + \tau \text{ pari}, \tau \neq \rho; \end{array} \right.$$

$$W_{\varrho\tau,1}^{(2)} \sim (-1)^{(\varrho+\tau-1)/2} \cdot 16 \alpha^5 \cdot O[(\tau\pi)^{-3}], \quad W_{\varrho\tau,3}^{(2)} \sim (-1)^{(\varrho+\tau-1)/2} \cdot 12 \alpha^5 \cdot O[(\tau\pi)^{-3}], \quad \text{se } \rho + \tau \text{ dispari},$$

$$W_{\varrho\tau,2}^{(2)} \sim (-1)^{(\tau-\varrho)/2} 8 \alpha^4 (2\alpha+3) \cdot O[(\tau\pi)^{-3}], \quad \text{se } \rho + \tau \text{ pari}, \tau \neq \rho;$$

$W_{\varrho\tau,0}^{(2)}$ e $W_{\varrho\tau,2}^{(2)}$ sono infinite (per $\rho \rightarrow +\infty$) come $(\rho\pi)^4$.

d) *Normalizzazione delle autofunzioni.* - Abbiamo rinunciato a sviluppare i calcoli con autofunzioni normalizzate, per consentire un immediato confronto con le espressioni e le tabelle di altri autori (cfr. note ⁽⁶⁾ e ⁽⁷⁾). Se indichiamo con $v_\rho(\xi')$ le autosoluzioni del nostro problema, normalizzate nell'intervallo $(-1/2, 1/2)$, queste si ricavano dalle (13) mediante le relazioni:

$$(13') \quad v_0 \equiv w_0, \quad v_\tau(\xi') \equiv 2\sqrt{3} w_\tau(\xi'), \quad v_\rho(\xi') \equiv \sqrt{2} w_\rho(\xi'), \quad (\rho \geq 2);$$

di conseguenza i corrispondenti degli integrali (14) si potranno ottenere dai medesimi moltiplicandoli per $2\sqrt{3}$ ogni volta che compare un indice $\rho = 1$ e per $\sqrt{2}$ quando si trovi un indice ρ o un indice τ maggiore di 1.

Tralasciamo, per brevità, di riportare le tabelle in questo caso.

TABELLE.

I. - Autovalori β_ρ per l'asta libera agli estremi.

ρ	η_ρ	β_ρ	$\frac{\text{Sh } \beta_\rho}{\text{Ch } \beta_\rho + (-1)^\rho}$	$\sigma_{0,\rho}$
0	—	0	—	—
1	—	0	—	—
2	0,01765 17644	4,73004 07448	0,98250 22146	$33 \cdot 10^{-10}$
3	0,03 77 70098 7864	7,85320 46240 9584	1,03 77 73119 0727	$12 \cdot 10^{-15}$
4	0,04 3 35504 37394 6	10,99560 78380 01670 9	0,94 6 64501 25408 8	$4 \cdot 10^{-20}$
5	0,05 14498 96605 396	14,13716 54912 57464 2	1,05 14498 97656 5	$15 \cdot 10^{-26}$

N. B. - Il significato di $\sigma_{0,\rho}$ (maggiorazione dell'errore commesso nel calcolo di η_ρ) è spiegato nel § 5 (Nota II).

II. - Integrali f_ρ per l'asta libera.

ρ	f_ρ
0	1 — 0,083 333 33 q_2
1	— 0,083 333 33 q_1 — 0,0125 q_3
2	0,052 518 69 q_2
3	0,013 071 48 q_3
4	— 0,004 255 031 q_2
5	— 0,002 578 309 q_3

III. — Integrali $\mu_{\alpha\gamma}$ per l'asta libera.

$\mu_{00} = 1 - 0,083\ 3333\ m_2$	$\mu_{10} = \mu_{01}$	$\mu_{20} = \mu_{02}$	$\mu_{30} = \mu_{03}$	$\mu_{40} = \mu_{04}$	$\mu_{50} = \mu_{05}$
$\mu_{01} = -0,083\ 3333\ m_1 - 0,0125\ m_3$	$\mu_{11} = 0,083\ 3333 - 0,0125\ m_2$	$\mu_{21} = \mu_{12}$	$\mu_{31} = \mu_{13}$	$\mu_{41} = \mu_{14}$	$\mu_{51} = \mu_{15}$
$\mu_{02} = 0,052\ 5187\ m_2$	$\mu_{12} = 0,052\ 5187\ m_1 + 0,010\ 9723\ m_3$	$\mu_{22} = 0,500\ 000 - 0,060\ 0998\ m_2$	$\mu_{32} = \mu_{23}$	$\mu_{42} = \mu_{24}$	$\mu_{52} = \mu_{25}$
$\mu_{03} = 0,013\ 0715\ m_3$	$\mu_{13} = 0,013\ 0715\ m_2$	$\mu_{23} = -0,115\ 278\ m_1 - 0,020\ 8265\ m_3$	$\mu_{33} = 0,500\ 000 - 0,050\ 7471\ m_2$	$\mu_{43} = \mu_{34}$	$\mu_{53} = \mu_{35}$
$\mu_{04} = -0,004\ 255\ 03\ m_2$	$\mu_{14} = -0,004\ 255\ 03\ m_1 - 0,004\ 060\ 61\ m_3$	$\mu_{24} = 0,030\ 8250\ m_2$	$\mu_{34} = 0,108\ 897\ m_1 + 0,018\ 1675\ m_3$	$\mu_{44} = 0,500\ 000 - 0,046\ 7413\ m_2$	$\mu_{54} = \mu_{45}$
$\mu_{05} = -0,002\ 578\ 31\ m_3$	$\mu_{15} = -0,002\ 578\ 31\ m_2$	$\mu_{25} = 0,013\ 6636\ m_1 + 0,009\ 87525\ m_3$	$\mu_{35} = 0,029\ 2435\ m_2$	$\mu_{45} = -0,1057802\ m_1 - 0,0168299\ m_3$	$\mu_{55} = 0,500000 - 0,0448884\ m_2$

IV. — Integrali $e_{\alpha\gamma}$ per l'asta libera.

$e_{00} = 0$	$e_{10} = 0$	$e_{20} = 0$	$e_{30} = 0$	$e_{40} = 0$	$e_{50} = 0$
$e_{01} = 0$	$e_{11} = 0$	$e_{21} = 0$	$e_{31} = 0$	$e_{41} = 0$	$e_{51} = 0$
$e_{02} = 0$	$e_{12} = 0$	$e_{22} = 250,2820 - 5,47856\ k_2$	$e_{32} = e_{23}$	$e_{42} = e_{24}$	$e_{52} = e_{25}$
$e_{03} = 0$	$e_{13} = 0$	$e_{23} = -101,9859\ k_1 - 5,566\ 06\ k_3$	$e_{33} = 1901,769 - 100,9181\ k_2$	$e_{43} = e_{34}$	$e_{53} = e_{35}$
$e_{04} = 0$	$e_{14} = 0$	$e_{24} = 36,802\ 25\ k_2$	$e_{34} = 657,3451\ k_1 + 60,3952\ k_3$	$e_{44} = 7308,815 - 485,4369\ k_2$	$e_{54} = e_{45}$
$e_{05} = 0$	$e_{15} = 0$	$e_{25} = 13,509\ 68\ k_1 + 13,005\ 76\ k_3$	$e_{35} = 222,4210\ k_2$	$e_{45} = -2263,992\ k_1 - 249,1532\ k_3$	$e_{55} = 19971,900 - 1449,843\ k_2$

Astronomia. — *Determinazione del passo del micrometro in declinazione del cerchio meridiano Repsold.* Nota II di RICCARDO BARBATELLI, presentata (*) dal Socio L. CARNERA.

In una prima comunicazione (Nota I)⁽¹⁾, si dedusse il valore del passo del micrometro in declinazione del cerchio meridiano di Repsold dell'Osservatorio di Capodimonte a Napoli, quale risultato si ottenne da osservazioni di misure di differenze di declinazioni di coppie di stelle prese dal catalogo di « Boss » (N. G. C.).

In questa seconda Nota, si perviene allo stesso risultato per una via completamente diversa, conseguendo un valore praticamente eguale in quanto differisce dal precedente solo per quantità che è compresa nell'ordine di grandezza degli errori.

Per determinare questo nuovo valore si è fatto uso delle due mire nord e sud, distanti circa 80 metri dal centro della sala meridiana. Puntando ad una e all'altra di queste mire, risulta visibile nel campo del cannocchiale una stella fittizia di grandezza circa 3^m, ottenuta schermando opportunamente; con apposita piastra di bronzo, rigidamente fissata nel pilastro, munita di un forellino di 0.1 mm. di diametro; una lampadina elettrica accendibile con un pulsante a portata di mano dell'osservatore.

Osservando allora il fascio luminoso attraverso una lente, avente una distanza focale di circa 80 metri, fissata rigidamente al supporto metallico reggente i collimatori, si ottiene un fascio di raggi paralleli, che cadendo sull'obbiettivo del cannocchiale danno origine, nel piano focale, ad una immagine del forellino esattamente paragonabile a quella prodotta da una stella.

Il metodo adottato, per queste determinazioni, si può riassumere in brevi linee così: disposto il filo mobile del micrometro in declinazione in prossimità della lettura 1^R.20, si moveva il cannocchiale fino ad avere in campo, vicina al filo mobile, la stellina artificiale della mira, indi, bloccato il cannocchiale in distanza zenitale, si eseguivano 4 puntate della mira col micrometro e subito dopo si procedeva alla lettura del cerchio graduato servendosi dei quattro microscopi.

Fatta questa prima misura si spostava il cannocchiale, in guisa da fare apparire l'immagine della mira in prossimità del filo mobile, quando la lettura risultava approssimativamente 9^R.20 e si ripeteva il procedimento.

Così mentre dalla differenza delle letture micrometriche nelle due posizioni si aveva l'ampiezza dello spostamento fatto subire dal cannocchiale, espressa in rotazioni del micrometro, dalla differenza della lettura dei microscopi si otteneva il valore dello stesso spostamento, espresso direttamente in secondi d'arco e frazioni.

(*) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) Questi « Rendiconti », vol. IX, fasc. 3-4, pp. 170-175.

Per quanto riguarda le letture ai microscopi, si ricorderà che il cerchio è diviso di due in due minuti primi, e che il filo mobile dei microscopi per passare da un tratto a quello successivo compie esatte tre rotazioni, onde essendo la testa dei tamburi dei micrometri dei microscopi divisa in 100 parti, evidentemente l'intervallo di 120" corrisponde a 300 parti, la somma dei quattro microscopi viene a corrispondere a 1200 parti.

Nelle comuni letture si ha pertanto che la somma complessiva delle quattro letture, espressa in parti, dà direttamente i centesimi di secondo, e quella delle frazioni stimate in parti dà i millesimi di secondo d'arco.

Onde attenuare, nel risultato finale, l'effetto dovuto alla inevitabile flessione del cannocchiale si sono fatte osservazioni puntando tanto alla mira nord, che a quella sud, agendo in questi due casi l'effetto della flessione in senso opposto.

Per ogni serata si sono ricavate delle serie di valori indipendenti derivanti da gruppi di osservazioni più o meno numerose, a seconda che le circostanze lo permettevano (3, 4, 5, 8, 10), alle medie serali corrispondenti si sono attribuiti i pesi: rispettivamente di 1, 1,5, 2, e 3 nei due ultimi casi.

Calcolata la media generale pesata si è trovato: $I^R = 33''.1153$; e con gli scarti corrispondenti venne determinato l'errore medio, sia della osservazione singola del peso unitario, che quello del passo, ottenendo per questo ultimo $\epsilon = \pm 0''.0235$.

Data	Mira	Medie	Gruppi	Pesi
22 agosto	Sud	32.964	5	2
23 »	Sud	33.040	10	3
25 »	Sud	32.996	5	2
27 »	Sud	33.082	5	2
28 »	Sud	32.996	5	2
30 »	Nord	33.040	5	2
1 settembre	Nord	33.200	4	1,5
3 »	Nord	33.232	5	2
4 »	Nord	33.232	5	2
6 »	Nord	33.232	4	1,5
11 »	Nord	33.110	5	2
12 »	Sud	33.066	3	1
13 »	Sud	33.152	5	2
14 »	Nord	33.054	5	2
17 »	Sud	33.202	8	3
24 »	Sud	33.154	5	2

Combinando questo valore in media ponderata con quello indietro ottenuto, il risultato può compendiarsi:

$$I^R = 33''.136 \pm 0''.020$$

avendo tralasciata la 4^a decimale evidentemente inutile.

Questo secondo metodo, molto più rapido, si è ritenuto però adoperarlo solo a guisa di controllo dopo aver ricavato con relativa sicurezza il valore del passo mediante osservazioni stellari, tenendo presente che di esso ci si dovrà valere per ridurre osservazioni di analogo tipo, e che presentando notevoli analogie, possono dare anche una maggiore omogeneità di risultati. Inoltre esso è libero dagli errori delle declinazioni stellari.

Nella tabella precedente sono indicate: nella I colonna le date delle singole osservazioni, nella II la mira usata, nella III la media serale del passo, nella IV il numero dei valori indipendenti ottenuti in quella sera e nella V i pesi; in modo che facilmente ci si può render conto di quanto è detto nella presente comunicazione.

Fisica. — *Le deformazioni relativistiche di un cilindro rotante.*
Nota I di MARIO GALLI, presentata (*) dal Corrisp. L. TIERI.

La determinazione esatta delle deformazioni relativistiche di un disco rotante continua ad attirare l'attenzione dei fisici anche recentemente ⁽¹⁾. Il problema è effettivamente difficile e si può considerare tuttora insoluto, come risulta manifestamente dalla diversità delle soluzioni proposte e dalla mancanza di argomentazioni veramente decisive. Un metodo particolarmente idoneo e che non ci sembra preso abbastanza in considerazione da altri fisici è quello adoperato da H. Ives ⁽²⁾. Costui ha trattato il problema del disco rotante inserendolo nell'altro più generale del cilindro in moto rototraslatorio. Il metodo è vantaggioso perchè in quest'ultimo caso alcune deformazioni sono imposte ineluttabilmente dal principio di relatività. Se allora da uno stesso principio si deducono conseguenze parte delle quali sono certe, si può legittimamente presumere la verità di altre conseguenze discutibili, sebbene non se ne consegua una prova apodittica. Oggetto di questa Nota è una discussione del problema conformemente al criterio ora esposto. Abbiamo però adottato un procedimento notevolmente diverso da quello originario di Ives e più semplice, anche perchè altri, partendo dallo stesso presupposto, sono giunti a risultati diversi ⁽³⁾.

(*) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) B. KURSUNOGLU, «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 47 (1) p. 177 (1951); G. CLARK, «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 45, p. 405 (1949); M. G. TROCHERIS, «Phil. Mag.», 40, p. 1143 (1949); C. W. BERENDA, «Physical Review.», 62, p. 280 (1942).

(2) H. IVES, «Journal Optical Society of America», 29, p. 472 (1939); F. E. HACKETT, «Phil. Mag.», 44, p. 740 (1922).

(3) H. EAGLE, «Phil. Mag.», 28, p. 592 (1939).

1. Al principio di questo secolo non pochi fisici ritennero che, per conseguire sicuramente lo scopo che si prefissero Michelson e Morley con il loro celebre esperimento, si sarebbe potuto adoperare convenientemente, almeno in teoria, il dispositivo della doppia ruota dentata di Wood ⁽⁴⁾. Abbiamo mostrato con una Nota pubblicata in questi « Rendiconti » ⁽⁵⁾ in che cosa consista tale dispositivo e per quale ragione esso deve essere considerato praticamente irrealizzabile. Peraltro Wood mise in evidenza il fatto che (a parte le difficoltà pratiche) per spiegare il presunto risultato negativo di un simile esperimento, come richiede il principio di relatività, bisogna attribuire ad un cilindro rotante con velocità angolare costante intorno al proprio asse ed in pari tempo scorrente con velocità costante lungo lo stesso asse, una deformazione torsionale che a prima vista appare alquanto inverosimile ed artificiosa ⁽⁶⁾.

L'esperienza concettuale discussa da Wood può essere comodamente schematizzata nel modo seguente. Sia dato un cilindro di raggio r e di altezza l rotante intorno al proprio asse con velocità angolare costante ω . Se un segnale luminoso parte da P (un punto qualunque della periferia della base inferiore) ad un determinato istante, che per semplicità possiamo far coincidere con lo zero dell'orologio, e si propaga parallelamente all'asse, esso raggiunge l'altra base del cilindro non nel punto Q posto sulla stessa generatrice comune a P, ma in un punto R tale che valga la relazione:

$$\frac{\varphi_R}{\omega} = \frac{l}{c} \quad ; \quad \text{quindi} \quad \varphi_R = \frac{l\omega}{c}$$

dove con φ_R indichiamo l'angolo che formano i piani meridiani cui appartengono rispettivamente Q ed R.

Ma supponiamo che il cilindro si sposti contemporaneamente con velocità costante v lungo l'asse del cilindro. Nelle nuove condizioni il segnale luminoso raggiunge (classicamente) la base superiore in un punto diverso M tale che per esso valga la relazione:

$$\frac{\varphi_M}{\omega} = \frac{l}{c-v} ;$$

da cui:

$$(1) \quad \varphi_M = \frac{\omega l}{c-v} .$$

quindi M ed R non possono coincidere.

Questa non coincidenza perdura anche tenendo conto delle consuete deformazioni relativistiche. Per l'osservatore fisso l diventa $l\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$; ω diventa $\omega\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$.

(4) Il dispositivo è così chiamato da Ives. Ma sarebbe più equo chiamarlo doppia ruota dentata di Wien, che per primo lo considerò in modo alquanto sistematico (« Phys. Zeitschr. », V, p. 585 e p. 604 (1904)). Del resto Michelson stesso aveva pensato a qualcosa di simile fin dal 1887 (« Phil. Mag. », 24, p. 462 (1887)).

(5) M. GALLI, « Rend. Linc. », ser. VIII, vol. VI, p. 620 (1949).

(6) WOOD, « Optique Physique », vol. II, p. 454.

Quindi la formola (I) deve essere corretta così:

$$(1'') \quad \varphi_M = \frac{\omega l (1 - v^2/c^2)}{c (1 - v/c)} = \frac{\omega l}{c} \left(1 + \frac{v}{c} \right) = \frac{\omega l}{c} + \frac{\omega l}{c^2} v.$$

La non coincidenza dei punti M ed R, se non valesse per l'osservatore fisso, non sarebbe valida neppure per l'osservatore mobile⁽⁷⁾, il quale avrebbe in tal modo la possibilità di rilevare il moto di traslazione del proprio sistema, contro il principio di relatività. Affinchè ciò non si verifichi bisogna ammettere con Wood che il cilindro, oltre alla contrazione longitudinale, subisca una torsione tale che un punto arbitrario M posto a distanza l dalla base inferiore scorra sul cerchio parallelo cui appartiene fino a raggiungere una nuova posizione M' in modo che l'angolo MM' uguagli $(\omega l/c^2) v$ o anche $\omega l v/c^2 \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ se per ω si intende la velocità angolare relativa all'osservatore fisso⁽⁸⁾. Non occorre poi segnalare che la deformazione in questione apparisce solo all'osservatore fisso.

In generale, utilizzando il principio di relatività, ci si persuade facilmente dopo facili riflessioni, che la deformazione subita dal cilindro in moto rototraslatorio può concepirsi come la risultante delle tre seguenti deformazioni elementari:

1° una contrazione radiale⁽⁹⁾ il cui valore esatto non è facile a determinarsi, ma che comunque deve dipendere solo dalla velocità di rotazione. In caso contrario l'osservatore mobile, confrontando con un cilindro uguale ed esente da rotazione, dovrebbe percepire una differenza rivelante il suo moto di traslazione;

2° una contrazione longitudinale tale che l'altezza l diventi $l \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$;

3° una torsione del valore precedentemente assegnato.

2. Il problema può essere affrontato però anche da un altro punto di vista, ammettendo cioè per ciascun elemento infinitesimo della superficie

(7) A scanso di equivoci, avvertiamo che qui e nel seguito per osservatore mobile si deve intendere quello che partecipa al solo moto di traslazione (quindi non di rotazione) del cilindro.

(8) Prescindendo da questa esperienza concettuale discussa da Wood, si giunge più semplicemente allo stesso risultato utilizzando le trasformazioni di Lorentz. Se A' e B' sono gli estremi di una sbarra mobile con velocità costante v , disposta parallelamente alla velocità, e tali estremi coincidono con i punti A e B (estremi di una sbarra fissa di lunghezza L per l'osservatore con questa solidale) ad un dato istante dell'orologio solidale con l'osservatore fisso, i tempi segnati dai due orologi collocati in A' e B', sincroni per l'osservatore mobile, sono diversi per l'osservatore fisso e la differenza è data da

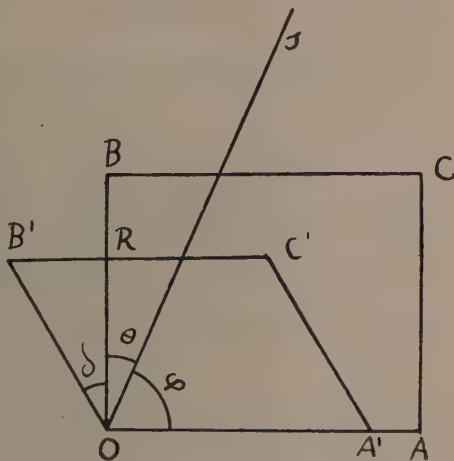
$$\Delta t = \frac{(v/c^2) L}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

Se si riflette che i due orologi possono essere connessi meccanicamente con un cilindro rotante, la differenza suddetta si spiega solo con una torsione del cilindro del valore dianzi assegnato.

(9) La formola che troveremo ci dà direttamente la contrazione dei cerchi paralleli, il che implica una corrispondente contrazione radiale solo se non si mette in discussione la geometria euclidea.

cilindrica in moto la contrazione di Lorentz e deducendone le conseguenti deformazioni finite dell'intera superficie. Così hanno fatto Ives ⁽²⁾ ed Eagle ⁽³⁾, ma giungendo a risultati discordi, per cui riteniamo utile discutere di nuovo il problema partendo dallo stesso presupposto ma con un metodo diverso.

Consideriamo un parallelogrammo infinitesimo OABC tracciato sulla superficie del cilindro, tale che OA e BC siano due tratti di cerchi paralleli, OB e AC siano due tratti di generatrici. Ciascun punto del parallelogrammo si sposta con una velocità V che è la risultante della velocità di rotazione $r\omega$ e di traslazione v quindi con velocità $V = \sqrt{r^2 \omega^2 + v^2}$. Questa velocità è parallela alla retta s passante per O e formante con il segmento OA un angolo φ tale che



$$(2) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{r\omega}.$$

Per comodità useremo coordinate cartesiane, essendo gli assi x ed y orientati rispettivamente secondo i segmenti OA e OB. Siano α e β i coseni direttori della retta s . Avremo:

$$(3) \quad \alpha = \frac{r\omega}{\sqrt{r^2 \omega^2 + v^2}}; \quad (3') \quad \beta = \frac{v}{\sqrt{r^2 \omega^2 + v^2}}.$$

Ciò posto, se x ed y sono le coordinate di un punto prima della deformazione, ed \bar{x} ed \bar{y} le coordinate dello stesso punto dopo la deformazione, devono valere le relazioni lineari:

$$(4) \quad \begin{cases} \bar{x} = ax + by \\ \bar{y} = cx + dy. \end{cases}$$

La retta OA è unita per la trasformazione in questione, quindi: $c = 0$. In definitiva abbiamo le relazioni:

$$(4') \quad \begin{cases} \bar{x} = ax + by \\ \bar{y} = dy. \end{cases}$$

Ciò posto, se $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ e $\bar{Q}(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ sono due punti generici della configurazione deformata, le componenti \bar{p} e \bar{q} del vettore $(\bar{P} - \bar{Q})$ rispettivamente parallela e normale alla retta s devono essere tali che il vettore avente per

componenti \bar{p}/γ e \bar{q} deve avere lo stesso modulo del vettore primitivo ($P \rightarrow Q$). Deve cioè sussistere la relazione:

$$(5) \quad \left(\frac{\bar{p}}{\gamma}\right)^2 + \bar{q}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

dove con γ abbiamo indicato il fattore caratteristico della contrazione di Lorentz:

$$(5') \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2 + v^2}{c^2}}$$

Esprimendo la (5) in funzione delle coordinate abbiamo:

$$\left[\frac{\alpha(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + \beta(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)}{\gamma} \right]^2 + [-\beta(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + \alpha(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Da cui consegue ulteriormente, in virtù delle (4'):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\alpha^2 a^2}{\gamma^2} + \beta^2 a^2 \right] (x_2 - x_1)^2 + \left[\frac{(\alpha b + \beta d)^2}{\gamma^2} + (\alpha d - \beta b)^2 \right] (y_2 - y_1)^2 + \\ & + 2 \left[\frac{\alpha a}{\gamma^2} (\alpha b + \beta d) + \beta a (-\beta b + \alpha d) \right] (y_2 - y_1)(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \end{aligned}$$

Dovendo questa valere qualunque siano i punti P e Q ne consegue:

$$(6) \quad \alpha^2 a^2 + \beta^2 \gamma^2 a^2 = \gamma^2$$

$$(7) \quad \frac{(\alpha b + \beta d)^2}{\gamma^2} + (\alpha d - \beta b)^2 = 1$$

$$(8) \quad \frac{\alpha a}{\gamma^2} (\alpha b + \beta d) + \beta a (\alpha d - \beta b) = 0.$$

Dalla (6) si ricava:

$$a = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \gamma^2}}$$

ovvero, tenendo conto delle (3) (3') (5):

$$(9) \quad a = \frac{\sqrt{1 - (r^2 \omega^2 + v^2)/c^2}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

Per interpretare le (7) e (8) si noti che $(\alpha b + \beta d)$ e $(\alpha d - \beta b)$ sono proporzionali alle componenti, secondo le direzioni rispettivamente parallela e normale alla retta s , del vettore ($B' \rightarrow O$). Dalla (8) abbiamo subito:

$$\frac{\alpha b + \beta d}{\beta b - \alpha d} = \frac{\beta \gamma^2}{\alpha}.$$

Se con δ e θ indichiamo gli angoli che formano con l'asse y rispettivamente il vettore ($B' \rightarrow O$) e la retta s otteniamo:

$$(10) \quad \frac{\cotg(\theta + \delta)}{\cotg \theta} = \gamma^2 = \left(1 - \frac{r^2 \omega^2 + v^2}{c^2} \right).$$

Infine da (7) e (8) possiamo ricavare $(\alpha b + \beta d)$ e $(\alpha d - \beta b)$ e successivamente b e d :

$$\alpha b + \beta d = \frac{\beta \gamma^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \gamma^2}}$$

$$-\beta b + \alpha d = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \gamma^2}}$$

Da cui:

$$(11) \quad b = \frac{\alpha \beta (\gamma^2 - 1)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \gamma^2}} = \frac{r \omega v}{c^2 \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

$$(12) \quad d = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Le formole (9) (10) (11) (12) coincidono sostanzialmente con le formole (7) (2) (10) (9) dell'articolo già citato di H. Ives.

3. La formola (9) potrebbe sembrare in disaccordo con il principio di relatività, poichè fa dipendere la contrazione radiale (propriamente la contrazione dei cerchi paralleli) dalla velocità di traslazione v , ciò che abbiamo escluso.

Ma ci si può convincere del contrario sostituendo in luogo di ω il suo valore in funzione di ω' (velocità angolare relativa all'osservatore mobile)

$$\omega = \omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Si ottiene dopo facili passaggi:

$$(9') \quad a = \sqrt{1 - \frac{r^2 \omega'^2}{c^2}}$$

Per conseguenza l'osservatore mobile, misurando la contrazione radiale, non può rilevare il suo moto di traslazione.

Il risultato espresso dalla formola (11) non coincide con quello trovato da Eagle⁽³⁾. Costui ottiene (trascurando termini di ordine superiore al primo in v/c):

$$(13) \quad b = \frac{1}{2} \frac{r \omega v}{c^2}$$

Il suo procedimento è esposto molto sommariamente, sembra tuttavia che si possa ricostruire in questo modo.

Egli in primo luogo assegna una formola corrispondente alla (10) di questa Nota nel modo seguente:

$$\frac{\cotg(\delta + \theta)}{\cotg \theta} = \gamma$$

da cui, trascurando termini di ordine superiore al primo in v/c , ottiene la (13).

Si vede bene che egli nella costruzione del vettore ($B' - O$) adotta questo criterio. Indicando con p e q le componenti rispettivamente parallela e normale alla retta s del vettore ($B - O$), il vettore che ha per componenti γp e q è senz'altro ($B' - O$). Ciò equivale a sostituire alla (5) le seguenti:

$$p = \gamma p \quad ; \quad \bar{q} = q.$$

Basandoci su questo criterio è facile vedere, specialmente aiutandosi con una costruzione grafica, che consegue necessariamente la (13). Applicando però questo stesso criterio al segmento OA si avrebbe che il corrispondente OA' non sarebbe adesso parallelo, ciò che costituisce un inconveniente. Non dimentichiamo infatti che il segmento OA è un elemento (infinitesimo) di un cerchio parallelo, e questo deve restare tale anche dopo la deformazione. Questa necessità è illustrata con varie considerazioni nell'articolo già citato di Ives al quale rimandiamo. Del resto la formola (13) contraddice al principio di relatività, come riconosce lo stesso Eagle.

Riassumendo si può concludere che i risultati espressi dalle formole (11) e (12), che assegnano rispettivamente la torsione e la contrazione longitudinale del cilindro, sono molto soddisfacenti. Al contrario la formola (9), che implicitamente assegna la contrazione periferica di un disco rotante, e che potrebbe quindi apparentemente recare un contributo decisivo alla soluzione del difficile problema posto inizialmente, non è altrettanto soddisfacente. Tratteremo del problema con una seconda Nota, dove discuteremo parimenti altre soluzioni analoghe, ma che si fondano su principi alquanto diversi.

Chimica organica. — *Considerazioni critiche su talune caratteristiche degli spettri Raman di derivati carbonilici del Furano, Tiofene e Pirrolo* (*). Nota di PAOLO CHIORBOLI, presentata (**) dal Socio GIOV. B. BONINO.

Discutendo lo spettro Raman dell' α -acetilfurano⁽¹⁾ si è rilevato che le molecole di questo composto non si rivelano, all'indagine spettroscopica, reciprocamente associate, come accade invece per l'aldeide furilica.

Un'analoga e perfettamente parallela differenza si manifesta fra gli spettri Raman dell'aldeide tiofenica e dell'acetotienone⁽²⁾, riguardo alla riga carbonilica: detta riga infatti, nettamente doppia nello spettro dell'aldeide, risulta semplice in quello del corrispondente chetone. (Tabella I).

(*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica-fisica del C.N.R. presso l'Istituto chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) Questi « Rendiconti », in corso di pubblicazione.

(2) Ricerche in corso di pubblicazione.

TABELLA I.

*Oscillazioni carboniliche negli spettri Raman
di aldeidi e chetoni furanici e tiofenici (in cm^{-1}).*

COMPOSTO	Oscillazioni del gruppo C=O	
aldeide furilica	1669	1690
α -acetifulrano	—	1676
aldeide tiofenica	1658	1676
α -acetiltiofene	—	1663

Da questa osservazione emergono due considerazioni di notevole interesse:

1° mentre i derivati carbonilici del pirrolo da noi già in precedenza esaminati (α -pirrolaldeide ed α -acetilpirrolo) manifestano un comportamento del tutto parallelo, per gli analoghi composti della serie furanica e tiofenica si hanno rilevanti differenze fra l'aldeide e il corrispondente chetone (limitandoci a considerare le cose, ben s'intende, dal punto di vista di eventuali fenomeni di interazioni intermolecolari che in questa discussione ci interessa);

2° sostituendo all'idrogeno aldeidico dell'aldeide furilica o tiofenica un gruppo metilico, ossia passando dall'aldeide al chetone, sembra che si elimini ogni possibilità di associazione intermolecolare fra le molecole del chetone stesso.

Questi due punti meritano una ulteriore breve discussione.

Riguardo al primo punto ricordiamo che negli spettri dei due composti citati della serie pirrolica la riga carbonilica si sdoppia solo per le soluzioni molto diluite in solvente inerte, per esempio in benzolo ⁽³⁾ mentre negli spettri delle soluzioni concentrate essa appare semplice: più in particolare diluendo i composti citati in benzolo compare, accanto alla primitiva riga del gruppo C = O molto perturbata e « bassa », una seconda riga meno perturbata e spostata d'una ventina di numeri d'onda verso le più alte frequenze (Tabella II).

Una discussione approfondita di questi risultati ci ha già indotto a sostenere nei precedenti citati lavori che in soluzione concentrata (e molto verosimilmente perciò anche allo stato puro, cristallino) le molecole di α -pirrolaldeide e di α -acetilpirrolo sono fra loro associate e che le associazioni sono progressivamente soppresse dall'azione del solvente « inerte ».

(3) BONINO, CHIORBOLI, « Rend. Accad. Lincei » [VIII], 10, 104 (1951); CHIORBOLI, MORELLI-EMILIANI, « Gazz. Chim. ital. », in corso di stampa.

TABELLA II.

Frequenze proprie del C = O in derivati del pirrolo.

COMPOSTO	Righe Raman carboniliche (cm ⁻¹)	
	Soluz. benzenica concentrata	Soluz. benzenica diluita
α -pirrolaldeide	1647	1645 ; 1667
α -acetilpirrolo	1638	1638 ; 1660

Siamo stati inoltre portati a formulare per il meccanismo di associazione l'ipotesi ch'esso si espliciti fra il gruppo iminico d'una molecola e il gruppo carbonilico d'un'altra, conforme a uno schema del tipo ⁽⁴⁾:

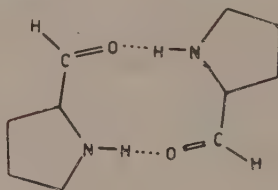


Fig. 1.

ossia con la formazione di « ponti » d'idrogeno N—H...O.

Un siffatto meccanismo si può ammettere sia per l'aldeide sia per il chetone α -pirrolici.

Ora il fatto che il perfetto parallelismo che si manifesta per questi due composti pirrolici riguardo ai fenomeni di interazione intermolecolare che ci interessano non si verifichi più per gli analoghi derivati della serie furanica e tiofenica, ove non è presente un gruppo che abbia verosimilmente spiccate caratteristiche associative quale l'N—H, ci induce ancora una volta a ritenere proprio il gruppo iminico stesso come diretto responsabile delle perturbazioni « intermolecolari » indotte nel gruppo C = O dei derivati pirrolici considerati. Stando così le cose, lo schema dianzi riportato per l'aldeide pirrolica sembra ragionevole e coerente con tutti i fatti sperimentali fin qui emersi.

Quanto al secondo punto dianzi rilevato, ci sembra che venga in luce qualche elemento interessante. In sostanza, come già è emerso nel corso di precedenti discussioni, mentre le aldeidi furanica e tiofenica sono associate, sembra che i corrispondenti chetoni non lo siano affatto. Ora riguardo alle

(4) CHIORBOLI, MORELLI-EMILIANI, « Gazz. Chim. ital. », in corso di stampa.

associazioni che si rendono spettroscopicamente manifeste per queste aldeidi non risulta certo immediatamente evidente il possibile meccanismo attraverso cui esse si esplichino.

Il fatto che l'aldeide benzoica non riveli un comportamento analogo, ma si manifesti all'indagine spettroscopica del tutto « normale », induce a pensare che l'anello eterociclico non sia estraneo dall'indurre nel gruppo $C=O$ le forti perturbazioni intermolecolari messe in evidenza. Ad ogni modo non è facile pensare ad una azione diretta dell'eteroatomo d'una molecola sul carbonile d'un'altra. Invero, pur potendosi « formalmente » scrivere degli schemi del tipo:

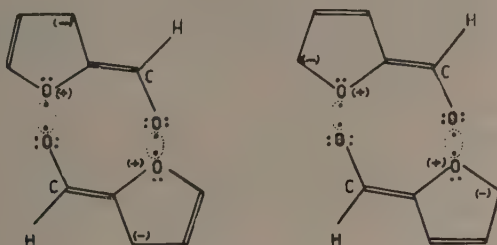


Fig. 2.

(ed altri analoghi per l'aldeide tiofenica) atti a stabilire, nel gioco della risonanza con le altre strutture di legame, una interazione fra eteroatomi dell'anello e gruppi carbonilici esterni, essi non sembrano convincenti per svariate ragioni, se non altro perchè le interazioni in questione (tanto notevoli che solo si distruggono a forte diluizione in solvente inerte) sarebbero allora affidate soltanto a strutture di risonanza ioniche di scarsa probabilità. Va inoltre tenuto presente che se valesse uno schema di interazioni del tipo sopra raffigurato in particolare, ben difficilmente si potrebbe spiegare la netta influenza negativa (riguardo ai fenomeni di associazione) esercitata dal gruppo metilico sostituito, nel corrispondente chetone, l'idrogeno aldeidico.

Il fatto che nei chetoni di cui ci stiamo occupando nella presente discussione non si manifestano fenomeni di interazione intermolecolare che perturbino il gruppo carbonilico, mentre nelle relative aldeidi sì, porterebbe a pensare piuttosto ad un intervento diretto dell'idrogeno aldeidico nello stabilirsi delle associazioni molecolari che si rivelano spettroscopicamente. Si potrebbe ad esempio formulare l'ipotesi d'un meccanismo schematizzabile così:

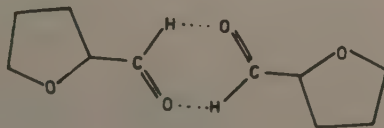


Fig. 3.

Ad uno schema di tal genere si potrebbe obbiettare ch'esso dovrebbe valere ad esempio per la benzaldeide, essendo solo il gruppo aldeidico responsabile delle interazioni. Per la benzaldeide invece, come è ben noto, lo spettro Raman non rivela alcuna caratteristica saliente riguardo alla riga carbonilica.

Qui ad ogni modo, per l'aldeide furanica e tiofenica si potrebbe invocare, come prima ipotesi di lavoro, un'influenza indiretta dell'anello eterociclico, atta ad esaltare la possibilità di una interazione intermolecolare nel senso sopra schematizzato, quantunque non si possano eliminare delle indubbie difficoltà ad accogliere una siffatta interpretazione, come ad esempio il « ponte » d'idrogeno fra un atomo di carbonio ed uno di ossigeno.

L'influenza positiva dell'anello eterociclico si può riassumere nel contributo alla struttura attuale della molecola aldeidica d'una forma di risonanza del tipo:

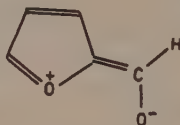


Fig. 4.

generalmente ammessa, per ciò che concerne la struttura interna dell'anello, per rendersi formalmente conto dell'aromaticità dell'eterociclo, con la partecipazione diretta alla « perturbazione aromatica » dei due elettroni $2p_z$ dell'ossigeno e rispettivamente dello zolfo nucleare. Nella struttura sopra schematizzata, l'ossigeno carbonilico, con una eccedente carica negativa, potrebbe contribuire ad esaltare una interazione diretta di natura essenzialmente elettrostatica con l'idrogeno aldeidico d'una seconda molecola, portando alla formazione di « ponti » intermolecolari.

Naturalmente nell'aldeide benzoica questa possibilità non si manifesterebbe, perchè la simmetria e la natura dell'anello benzenico non porta alla stabilizzazione di speciali forme di risonanza del tipo dianzi rappresentato per l'aldeide furanica, sicchè le manifestazioni spettroscopiche dell'aldeide benzoica risultano del tutto normali.

Ammettendo un simile meccanismo risulta del tutto coerente che i chetoni corrispondenti alle due aldeidi in questione non siano suscettibili di associarsi, mentre si andrebbe incontro a difficoltà attualmente non chiarificabili senza ulteriori ipotesi speciali, se si volesse escludere l'idrogeno aldeidico da una diretta azione perturbatrice responsabile delle associazioni intermolecolari ammesse, secondo i risultati dell'indagine spettroscopica, per queste due aldeidi eterocicliche.

Certo, ad ogni modo, questo punto, non ancora ben chiaro e piuttosto delicato, merita un attento e più completo esame alla luce di nuove più vaste esperienze.

Chimica organica. — *Ricerche preliminari sullo spettro ultrarosso della marrubina e di alcuni prodotti da essa ottenibili* (*). Nota di ELISA GHIGI e PAOLO MIRONE, presentata (**) dal Socio GIOV. B. BONINO.

Per portare un contributo al complesso di ricerche puramente chimiche realizzate da uno di noi (Ghigi) in questi ultimi anni sulla costituzione della marrubina (1), abbiamo progettato una serie di studi di spettrometria d'assorbimento ultrarossa sulla marrubina stessa e su derivati della marrubina ottenuti attraverso processi di trasformazione e di demolizione che sono stati descritti in precedenti lavori (1).

Riferiamo in questa Nota alcune ricerche preliminari eseguite.

Un primo gruppo di ricerche è stato eseguito con uno spettrometro per ultrarosso Beckman mod IR 2 con prisma di fluoruro di litio. Questo prisma ci permette un esame fino a circa 4μ e quindi ci permette uno studio della zona dello spettro ultrarosso dove appaiono le bande di assorbimento riferibili ai gruppi OH ed ai gruppi CH_2 .

Il fluoruro di litio, come si sa, ha in questa zona da $2,5$ a 4μ una dispersione quasi quadrupla di quella del salgemma e si possono ottenere pertanto delle bande assai bene risolte che permettono una analisi accurata dello spettro.

Sono stati esaminati con un tale mezzo la marrubina ed alcuni suoi derivati (che sotto indicheremo) sotto forma di sottili straterelli solidi ottenuti per evaporazione di soluzioni cloroformiche su piastrine di spatofluore.

I materiali studiati sono stati i seguenti:

1° Marrubina purissima p. f. 158° .

2° Lattone p. f. 162° ($\text{C}_{17}\text{H}_{22}\text{O}_4$), descritto a p. 864 del primo lavoro sopracitato.

3° Acido p. f. $222/223^\circ$ ($\text{C}_{17}\text{H}_{24}\text{O}_5$) ottenuto dal lattone di cui sopra.

4° Lattone p. f. $213/214^\circ$ ($\text{C}_{14}\text{H}_{20}\text{O}_4$) descritto a p. 868 dello stesso lavoro.

5° Lattone p. f. 163° ($\text{C}_{13}\text{H}_{22}\text{O}_3$) descritto a p. 348 del secondo lavoro prima indicato.

In un secondo tempo abbiamo studiato lo spettro della marrubina pura con lo stesso spettrometro ma utilizzando un prisma di salgemma che ci ha permesso di esaminare il composto nello spettro ultrarosso da 4μ a 14μ ottenendo una serie di bande.

Nelle tabelle seguenti diamo per i diversi spettri i massimi di assorbimento delle bande espressi con le loro lunghezze d'onda e con le frequenze in numeri

(*) Lavoro eseguito al Centro studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto «G. Ciamician» dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) «Gazzetta Chim. Ital.», 78, 856 (1948); 81, 336 (1951).

d'onda. Nelle tabelle è data, oltre gli estremi atti a caratterizzare la natura chimica del composto, anche l'indicazione del tipo di prisma usato.

1. - *Marrubina*
(prisma in LiF).

$\lambda (\mu)$	$\bar{\nu} (\text{cm}^{-1})$	I
2,88	3475	<i>f</i>
3,42	2925	<i>f</i>
3,50	2855	<i>m</i>

2. - *Lattone a p. f. 162°*
(prisma in LiF).

$\lambda (\mu)$	$\bar{\nu} (\text{cm}^{-1})$	I
2,84	3520	<i>m</i>
3,40	2940	<i>f</i>
3,50	2855	<i>m</i>

3. - *Acido a p. f. 222-223°*
(prisma in LiF).

$\lambda (\mu)$	$\bar{\nu} (\text{cm}^{-1})$	I
3,13	3200	<i>m</i>
3,41	2930	<i>f</i>
3,48	2875	<i>m</i>

4. - *Lattone a p. f. 213-214°*
(prisma in LiF).

$\lambda (\mu)$	$\bar{\nu} (\text{cm}^{-1})$	I
3,36	2970	<i>m</i>
3,41	2935	<i>f</i>
3,49	2865	<i>m</i>

5. - *Lattone a p. f. 163°*
(prisma in LiF)

$\lambda (\mu)$	$\bar{\nu} (\text{cm}^{-1})$	I
2,83	3530	<i>f</i>
3,37	2970	<i>m</i>
3,43	2920	<i>f</i>
3,50	2855	<i>m</i>

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Marrubina. - Nello spettro ultrarosso della marrubina pura ottenuto tra 2,5 e 4 μ con prisma di fluoruro di litio abbiamo osservato 3 bande di assorbimento con massimi rispettivamente a 2,88 μ , 3,42 μ , 3,5 μ . I primi due massimi si presentano con forte intensità, il terzo con intensità media.

Spettro ultrarosso della marrubina solida (prisma in NaCl).

λ (μ)	$\bar{\nu}$ (cm^{-1})	I	Attribuzione
3,67	2725	<i>dd</i>	
3,75	2670	<i>dd</i>	
5,78	1730	<i>f</i>	v. C=O (lattonico)
6,60	1515	<i>d</i>	
6,85	1460	<i>m</i>	d. CH ₂ e CH ₃
7,28	1375	<i>m</i>	
7,42	1350	<i>m</i>	
7,69	1300	<i>m</i>	
7,89	1270	<i>m</i>	
8,35	1200	<i>f</i>	OH terziario
8,58	1165	<i>f</i>	
8,66	1155	<i>f</i>	
8,77	1140	<i>f</i>	
9,09	1100	<i>f</i>	
9,25	1080	<i>d</i>	
9,39	1065	<i>m</i>	
9,56	1048	<i>f</i>	OH (terziario)
9,81	1020	<i>f</i>	
9,95	1005	<i>d</i>	
10,19	983	<i>f</i>	
10,36	966	<i>m</i>	
10,76	932	<i>f</i>	
10,93	915	<i>d</i>	
11,05	905	<i>m</i>	
11,43	874	<i>m</i>	
11,91	840	<i>d</i>	
12,25	816	<i>d</i>	
13,08	765	<i>f</i>	
13,27	754	<i>dd</i>	
13,85	722	<i>m</i>	
14,84	674	<i>dd</i> (?)	

v. = oscillazione di valenza.

d. = oscillazione di deformazione.

Il massimo a $2,88 \mu$ è sicuramente attribuibile ad un ossidrile legato in molecole mentre i due massimi a $3,42 \mu$ e $3,50 \mu$ sono caratteristici per gruppi CH di natura non aromatica. Per esempio si sa che l'alcool butilico terziario presenta due massimi nettissimi in questa zona rispettivamente a $3,40 \mu$ e $3,48 \mu$ ⁽²⁾.

Lo spettro ultrarosso in questa zona ci dà dunque l'indicazione di una sostanza ossidrilata non aromatica.

Nella zona tra 4μ e 14μ osserviamo innanzitutto una forte banda con massimo a $5,78 \mu$ ($\bar{\nu} = 1730 \text{ cm}^{-1}$) che è tipica per un gruppo C=O. Questa banda corrisponde ad un C=O lattonico contenuto nella molecola della marrubina.

La banda a 1460 cm^{-1} ($6,85 \mu$) è riferibile alle oscillazioni di deformazione dei gruppi CH_2 e CH_3 . Sono da notare poi una banda intensa a $8,35 \mu$ accompagnata da due bande pure intense a $9,56 \mu$ e $9,81 \mu$. Queste bande sono da riferire ad un gruppo ossidrilico. La concomitanza delle bande $9,5-9,8 \mu$ con la banda $8,35 \mu$ è interpretata dagli spettroscopisti ultrarossi come per esempio da Lecomte⁽³⁾ come caratteristica della presenza di un ossidrile alcolico terziario. In effetti le ricerche chimiche sulla marrubina sono concordi nel rilevare la presenza di un tale gruppo funzionale.

Lo spettro ultrarosso da noi ottenuto sulla marrubina con prisma di salgemma non ci dà invece sicure indicazioni nella zona dove dovrebbero apparire frequenze caratteristiche per il doppio legame olefinico.

È da notare però che, nello spettro ultrarosso il doppio legame etilenico non si presenta con bande di forte intensità ogni qualvolta l'oscillazione molecolare che impegna questo doppio legame etilenico non è accompagnata per il tipo di struttura della molecola, da una notevole variazione del momento elettrico molecolare durante l'oscillazione. Nella zona sui $6-6,3 \mu$ dove dovrebbero apparire le bande del doppio legame etilenico compare nello spettro ultrarosso tutto un sistema di componenti dovute ad una maggiore o minore risoluzione di una forte banda del vapor d'acqua. Speriamo di poter presto eliminare con opportuni mezzi tecnici ogni traccia di vapor d'acqua nell'interno del nostro spettrometro in modo da poter ripulire questa speciale zona dello spettro dalle intense manifestazioni dovute al vapor d'acqua e poter così rilevare in modo inequivocabile la manifestazione di eventuali doppi legami etilenici nella marrubina.

Lattone a p. f. 162°. - L'osservazione si limita qui alla zona analizzabile col prisma di fluoruro di litio. Troviamo un massimo di assorbimento a $2,84 \mu$ corrispondente ad un ossidrile e ciò concorda pienamente coi risultati delle ricerche chimiche come risulta dai lavori sopra citati.

I due massimi a $3,40 \mu$ e $3,50 \mu$ sono come al solito attribuiti ai gruppi CH e CH_2 alifatici.

Acido p. f. 222/223°. - L'acido di p. f. 222/223° ricavabile dal lattone precedente a p. f. 162° oltre a mostrare i due massimi di assorbimento a $3,41 \mu$ e $3,48 \mu$ caratteristici per i gruppi CH e CH_2 alifatici mostra un netto massimo di assor-

(2) J. J. FOX and A. E. MARTIN, «Proc. Roy Soc.», London A. 162, 431 (1937).

(3) J. LECOMTE, *Le spectre infrarouge*, Parigi 1929, Les presses Universitaires de France p. 219 (1928).

bimento a $3,13 \mu$. Questo massimo va sottoposto ad una ulteriore e più accurata indagine. A prima vista si sarebbe tratti ad attribuire questo massimo ad un OH che si trovi in condizioni particolari di associazione come può supporre per un OH carbossilico in un acido organico a molecole ravvicinate. Ritorneremo su questo punto della ricerca quando avremo eseguito su questo acido spettri u. r. più completi e in più ampie estensioni della gamma della lunghezza d'onda.

Il *lattone* p. f. $213-214^{\circ}$ non mostra bande riferibili a gruppi ossidrilici, ma mostra soltanto tre massimi di assorbimento di cui due a $3,41 \mu$ e $3,49 \mu$ riferibili ai soliti CH e CH_2 alifatici ed uno a $3,36 \mu$ che dovrebbe riferirsi ad un CH di natura particolare.

I risultati dello spettro ultrarosso coincidono con l'esame chimico di questo lattone che non ha messo in evidenza alcun idrogeno attivo.

Per il *lattone* a p. f. 163° di formula bruta $\text{C}_{13}\text{H}_{22}\text{O}_3$ si riscontra nettamente un massimo di assorbimento a $2,83 \mu$ che deve attribuirsi ad un ossidrilico.

Ora la presenza di un tale gruppo ossidrilico in questo lattone non è contraddittorio con il suo comportamento chimico.

Lo spettro di questo lattone nella zona utilizzabile con il prisma a fluoruro di litio ci mostra due bande con massimi a $3,43-3,50 \mu$ che in effetti sono da attribuire, come al solito, ai gruppi CH e CH_2 alifatici. Ma qui troviamo in più una banda a $3,37 \mu$ che in un composto costituito da carbonio, idrogeno e ossigeno dovrebbe verosimilmente attribuirsi ad un CH di natura del tutto speciale.

Sulle altre bande di assorbimento ultrarosso della marrubina non riteniamo per ora fare una discussione approfondita. Notiamo però le due bande molto intense una a 9μ e l'altra a $10,76 \mu$. Quest'ultima banda dovrebbe riferirsi ad un gruppo carbossilico libero o esterificato o lattonico.

Concludendo osserviamo che in questo lavoro preliminare si è già messo in netta evidenza nella molecola della marrubina la presenza dei gruppi funzionali che sono in accordo coi risultati dell'indagine chimica ordinaria.

Chimica inorganica. — *Nichelcarbonilfosfiti alchilici*^(*). Nota preliminare di LAMBERTO MALATESTA e ADRIANO SACCO, presentata^(**) dal Socio L. CAMBI.

L'attitudine di una serie di composti organici, presentanti un doppietto di elettroni di struttura particolare, a sostituire parzialmente l'ossido di carbonio nel nichel tetracarbonile, già manifesta nei composti del tipo $\text{Ni}(\text{CO})_2(\text{Am})_2$ (dove Am rappresenta un'ammina monovalente), aveva lasciato prevedere la possibilità di poter ottenere le nicheltetracarbilammine^{(1) (2) (3)},

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) W. HIEBER, « Z. Naturforsch. », 56, 129 (1950).

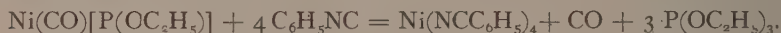
(2) F. KLAGES e K. MÖNKEMEYER, « Ber. », 83, 501 (1950).

(3) L. MALATESTA e A. SACCO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XI, fasc. 6, 2^o sem., pp. 379-83 (1951).

e i nicheltetra(fosforotrirogenuri) $\text{Ni}(\text{PX}_3)_4$, della cui preparazione proprio in questi giorni si ha avuto comunicazione ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾.

Poichè in questi laboratori sono in corso da qualche mese ricerche sulla preparazione di prodotti di sostituzione parziale e totale dello stesso tipo ma con i fostiti alchilici e le fosfine, riteniamo opportuno di pubblicare i risultati iniziali finora acquisiti, e cioè della preparazione del nichelcarboniltri-
strietilfosfito.

$\text{Ni}(\text{CO})[\text{P}(\text{OC}_2\text{H}_5)_3]_3$: Nella reazione tra nicheltetracarbonile ed un eccesso di fosfito trietilico puro, prima a freddo poi a 100°C ed infine a 160°C si ebbe lo sviluppo di tre mol. di CO per ogni atomo di nichel. Il prodotto risultante sottoposto a distillazione con un vuoto di 0,1 mm. passò a $120-130^\circ\text{C}$ sotto forma di un liquido incolore, piuttosto vischioso, stabile all'aria secca. Il punto di congelamento, non ancora esattamente determinato, è poco inferiore alla temperatura ambiente. L'analisi del prodotto distillato diede $\text{Ni} = 9,84\%$; $\text{P} = 15,50\%$ (calcolato per $\text{Ni}(\text{CO})[\text{P}(\text{CC}_2\text{H}_5)_3]_3$: $\text{Ni} = 10,03\%$; $\text{P} = 15,88\%$). Il prodotto reagisce con fenilcarbamilamina dando la nichel-
tetrafenilcarbamilamina:



Le ricerche continuano.

Fisiologia. — *Sul meccanismo del riflesso condizionato della secrezione salivare* (*). Nota di ANTONINO ALIBRANDI e GIUSEPPE ALIBRANDI, presentata (**) dal Socio C. CIACCIO.

Il meccanismo dei riflessi condizionati motori è stato dalla nostra Scuola esaurientemente analizzato: esso è essenzialmente rappresentato da un fenomeno di facilitazione a livello del tratto centrale della via del corrispondente riflesso congenito ^(1, 2).

L'energia del segnale condizionato appare del tutto insufficiente a scatenare il riflesso allorchè vengano aboliti o comunque fortemente diminuiti di numero gli eccitamenti afferenti partenti dalla zona riflessogena congenita.

Il segnale condizionato potrebbe paragonarsi, nei riguardi della sua azione sui centri, al segnale elettrico che, in radiotecnica, viene applicato alla griglia di

(4) J. W. IRVINE e G. WILKINSON, « Science », 113, 742 (1951).

(5) G. WILKINSON, « J. Am. Chem. Soc. », 73, 5501 (1951).

(6) J. CHATT e A. WILLIAMS, « J. Chem. Soc. », 3061 (1951).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale della Università di Messina.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) G. MARTINO e A. ALIBRANDI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 11, 763 (1936); « Arch. Fisiol. », 37, 534 (1937).

(2) A. ALIBRANDI, Questi « Rendiconti », 27, 479 (1938).

un triodo. Un tale segnale, anche se debole, è capace di controllare (favorendolo od ostacolando) il passaggio di una corrente di elettroni dal filamento alla placca di una valvola. Applicato da solo nessuna corrente esso è però capace di produrre, la sua azione limitandosi solo a modulare una preesistente corrente.

Nel caso del riflesso condizionato motorio è stato dimostrato come gli eccitamenti afferenti, dipartendosi dalla zona riflessogena, sono altrettanto necessari quanto il flusso di elettroni, che dal filamento si diparte, è indispensabile per il funzionamento della valvola termoionica. Così come sopprimendo questo flusso (abbassando ad esempio la temperatura del filamento) nessuna corrente più circola nell'interno della valvola, per quanto si continuino sulla griglia di questa ad applicare segnali, così la soppressione degli eccitamenti afferenti che consegue all'anestesia della zona riflessogena congenita è costantemente capace di impedire la manifestazione del riflesso condizionato motorio per quanto forte e prolungata possa essere la stimolazione condizionata.

Per quanto riguarda i riflessi condizionati della vita vegetativa parrebbe ovvio ammettere il medesimo meccanismo ma dimostrazioni sperimentali in tal senso non sono state ancora fornite da alcuno che anzi lo stesso Pavlov riferisce che il taglio dei nervi sensitivi della lingua permette ancora il manifestarsi del riflesso condizionato della secrezione salivare⁽³⁾.

Ci è sembrato pertanto interessante verificare se la soppressione funzionale delle aree riflessogene della secrezione salivare fosse capace di abolire il relativo riflesso condizionato.

A questo scopo istituimmo un gruppo di esperienze in cui non ci limitammo a sopprimere, come in quelle ora citate del Pavlov, l'innervazione sensitiva della lingua ma ci preoccupammo di abolire o comunque fortemente diminuire la sensibilità delle superfici mucose del cavo orale e dello stomaco.

È noto come gli eccitamenti afferenti capaci di destare il riflesso congenito della secrezione salivare per quanto principalmente si dipartano dalle estremità linguali del trigemino e del glosso faringeo, possano anche, fra l'altro, dipartirsi dalle estremità gastriche del vago^(4, 5).

La soppressione di gran parte degli eccitamenti afferenti, responsabili del riflesso salivare congenito, si ottenne con vari mezzi consistenti soprattutto nella novocainizzazione delle mucose orali e nel taglio alto dei due vaghi al collo o nella loro anestesia o anche semplicemente nella loro compressione o nel loro raffreddamento.

I cani in cui era stato contemporaneamente elaborato, a mezzo di un segnale sonoro, un forte riflesso per la secrezione salivare ed un riflesso motorio si riprovò l'efficacia di questo segnale dopo aver soppresso coi mezzi su detti buona

(3) «Dopo la sezione di tutti i nervi sensitivi della lingua la maggior parte delle sostanze introdotte in bocca assieme al cibo o per forza danno luogo esattamente alla medesima secrezione salivare come prima della sezione» (PAVLOV, Conferenza tenuta nel 1904 a Stoccolma in occasione del Premio Nobel).

(4) R. TIGERSTEDT, *Trattato di Fisiologia dell'uomo*, vol. I, p. 187, Torino 1934.

(5) Un esauriente contributo alla conoscenza della sensibilità dello stomaco è dovuto al DUCCESCHI («Arch. Fisiol.», 2, 523 (1905)).

parte degli eccitamenti afferenti indispensabili per l'estrinsecazione del riflesso salivare congenito. In tali condizioni l'efficacia del segnale condizionato sonoro apparve completamente annullata nei riguardi del riflesso della secrezione salivare mentre continuò a persistere nei riguardi del riflesso motorio.

Questi risultati, se si tiene presente che i riflessi condizionati della secrezione salivare si instaurano, a parità di condizioni, con maggior facilità e si estinguono con maggior difficoltà dei riflessi condizionati motori, inducono ad ammettere, anche per i riflessi condizionati della vita vegetativa l'identico meccanismo che la nostra Scuola ha dimostrato per i riflessi condizionati motori.

Fisiologia. — *Azione del benzoato di estradiolo sulla sopravvivenza dei ratti maschi tiro-paratiroidectomizzati.* (*) Nota di GIOVANNI MANUNTA, presentata (**) dal Socio G. LEVI.

In ricerche eseguite in questo Istituto è stato notato che in un gruppo di ratti, ai quali era stata praticata la tiroparatiroidectomia totale, le femmine sopravvivono più a lungo dei maschi. In successive esperienze è stato messo in evidenza che mentre i maschi e le femmine castrate non presentano praticamente differenze nel periodo di sopravvivenza dopo paratiroidectomia, le femmine non ovariectomizzate invece restano in vita per un periodo più lungo. Questi fatti indicano chiaramente che l'ovaio protegge gli animali dalla morte a breve scadenza in seguito a paratiroidectomia totale (Rowinski e Manunta 1951 *a, b*).

Dalla letteratura circa l'influenza degli ormoni ovarici sul metabolismo del calcio (per la quale rimandiamo al lavoro di Rowinski e Manunta 1951 *b*) risulta che mentre l'ormone del corpo luteo non ha alcuna azione, l'estradiolo e gli estrogeni hanno una notevole influenza; questa però è molto più evidente negli anfibi e negli uccelli che nei mammiferi. Negli anfibi le femmine hanno durante la stagione della riproduzione una calcemia più alta e questa s'innalza pure per la somministrazione di estratti ovarici. Anche negli uccelli (piccione, pollo, anitra) la calcemia si eleva notevolmente sia durante la maturazione del tuorlo, sia per azione degli estrogeni; contemporaneamente si osserva la neoformazione di tessuto osseo nelle cavità midollari specialmente delle ossa con midollo ematopoietico. Nei mammiferi invece l'azione degli estrogeni sulla calcemia sarebbe discutibile: alcuni Autori hanno trovato ipercalcemia, alcuni ipocalcemia, altri non hanno osservato alcun effetto; la crescita però viene inibita per precoce ossificazione delle cartilagini di accrescimento. Nelle femmine è stata anche notata una maturazione più precoce dello scheletro.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Veterinaria dell'Università di Sassari.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

Tenendo presente questo complesso di fattori abbiamo voluto vedere se il benzoato di estradiolo somministrato a piccole quantità potesse proteggere i ratti, di sesso maschile paratiroidectomizzati, dalla morte rapida per insufficienza paratiroidea. Avendo osservato che in un gruppo di venti ratti maschi l'asportazione delle due paratiroidi (che vengono ritenute le sole presenti in questa specie) non era sempre seguita da morte, come era stato osservato in precedenti esperimenti, e ritenendo questo fatto dovuto alla presenza in questo ceppo di tessuto paratiroideo ectopico, abbiamo, in un secondo gruppo di animali provenienti dallo stesso allevamento, praticato la tiroparatiroidectomia per asportare anche eventuali paratiroidi accessorie.

MATERIALE E TECNICA. — Vennero impiegati n. 12 ratti albin, di sesso maschile, dell'età di un anno circa, provenienti dallo stesso allevamento.

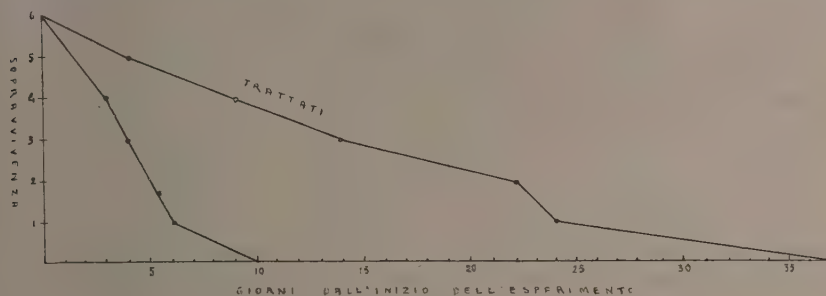


Fig. 1.

Il 19 luglio 1951 i soggetti vennero tiroparatiroidectomizzati; della tiroide venne lasciato *in situ* soltanto il ponte di unione dei due lobi. A tutti i soggetti venne iniettata nei primi giorni dopo l'intervento, della penicillina. Non si ebbero complicazioni infettive.

N. 6 ratti vennero trattati con mg. 0,05 di benzoato di estradiolo in soluzione oleosa, *pro die e pro capite* ⁽¹⁾. I rimanenti 6 ratti vennero tenuti come controlli. La dieta degli animali è stata uniforme sia nel periodo che precedette l'intervento, sia per tutto il decorso postoperatorio. Essa era costituita da orzo, avena, pane, fieno *ad libitum*, più piccoli quantitativi di erba fresca.

RISULTATI. — Riportiamo nella fig. 1 l'andamento dell'esperimento. Sull'ordinata è riportato il numero dei capi sopravvissuti, sull'ascissa i giorni trascorsi dall'intervento. I valori per ciascun gruppo di animali (trattati con benzoato di estradiolo e controllo) sono stati riuniti nello stesso grafico.

(1) Ringraziamo la Ditta Recordati per l'«ESTROFOL» gentilmente messo a nostra disposizione.

Da questo diagramma risulta che i ratti controllo soccombono più rapidamente in seguito alla tiroparatiroidectomia di modo che al 10° giorno dall'intervento tutti i soggetti erano morti. Gli animali invece che avevano ricevuto l'estrogeno presentarono un periodo di sopravvivenza più lungo per cui sono occorsi 37 giorni dall'exeresi per avere la morte di tutti i soggetti del gruppo.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. - Da questi esperimenti e da quelli preliminari ricordati alla fine dell'introduzione risulta che la presenza di tessuto paratiroideo accessorio può essere un carattere proprio di alcuni ceppi di ratti albin. Infatti mentre nel gruppo usato per gli esperimenti di Rowinski e Manunta (loc. cit.) era bastata l'asportazione delle due paratiroidi per provocare la morte degli animali, in questi altri soggetti provenienti da altro allevamento, si è dovuto ricorrere alla tiroparatiroidectomia per asportare tutto il tessuto paratiroideo. Questo fatto potrebbe spiegare la bassissima mortalità dei soggetti paratiroidoprivi riscontrata da qualche Autore (Dragsted 1927).

La tiroidectomia quasi totale non può aver influito sull'andamento dell'esperimento perchè è noto che i disturbi dovuti all'ipotiroidismo nel ratto cominciano a manifestarsi dopo un mese circa dall'intervento in quanto esiste probabilmente una certa scorta di tiroxina e non è escluso che anche il fegato, i muscoli scheletrici e lisci possano produrre piccole quantità di ormone come risulta dagli esperimenti di Morton e collaboratori (1943) eseguiti su ratti tiroidectomizzati e trattati con ioduri radioattivi.

Le paratiroidi sono in genere più pesanti nel sesso femminile che in quello maschile come hanno dimostrato Blumenfeld e Rice (1938), Campbell e Turner (1942) nel ratto, Juhn e Mitchell (1929) nella Leghorn bruna, Pappenheimer e Wilens (1935) e Gilmour e Martin (1937) nella donna, da ciò si è portati a concludere che la presenza dell'ovaio debba comportare una maggiore attività delle paratiroidi. La spiegazione di questo reperto potrebbe essere la seguente: la produzione di estrogeni che tende a diminuire il calcio diffusibile, provoca una iperattività delle paratiroidi per mantenere invariato il rapporto calcio diffusibile-calcio proteico.

I presenti esperimenti sembrano contrastare con il fatto che l'estro e la somministrazione di forti dosi di estrogeni in animali paratiroidectomizzati e tenuti in vita con la somministrazione di quantità minimali di sali di calcio e vitamina D possono provocare la tetania e la morte (Luckhardt e Blumenstock 1922, Dragsted e collaboratori 1924, Evans e collaboratori 1936, Clavert 1948). Ma la nostra attenzione deve essere rivolta anche ad altri fattori che possono opporsi all'insorgenza della tetania dei soggetti paratiroidectomizzati. Se si somministrano a questi animali subito dopo l'intervento quantità sufficienti di sali di calcio facilmente assorbibili, i soggetti possono sopravvivere indefinitamente. Uguali risultati si hanno con la somministrazione di vitamina D che favorisce l'assorbimento del calcio dal tubo digerente. Con un meccanismo simile agiscono anche gli estrogeni; infatti

è stato dimostrato da Buckner e collaboratori (1930) che nella gallina che ovula la quantità di calcio presente nel sangue delle vene mesenteriche è notevolmente superiore a quella delle arterie. Ugualmente Dallemagne e collaboratori (1949) hanno trovato che la follicolina influenza l'assorbimento intestinale del calcio. Nei nostri casi la più lunga sopravvivenza dei soggetti trattati con piccole dosi di benzoato di estradiolo potrebbe essere dovuta al fatto che la sostanza migliora l'assorbimento del calcio contenuto negli alimenti. Ciò non esclude che forti dosi di estrogeni possano invece provocare la morte degli animali paratiroidectomizzati aumentando il calcio legato a spese di quello ionizzato. Per quanto riguarda invece la morte spontanea per tetania delle femmine non castrate e paratiroidectomizzate è stato osservato negli esperimenti di Rowinski e Manunta (loc. cit.) che le ovaie erano occupate quasi totalmente da corpi lutei. Tale fatto metterebbe la morte degli animali in relazione piuttosto con la fase luteoide che con quella folliculoide del ciclo sessuale.

La morte più tardiva dei ratti maschi trattati con benzoato di estradiolo e delle femmine non castrate non sembra invece dovuta a tetania, ma al complesso di alterazioni funzionali ed anatomiche che dipendono probabilmente da una alterata permeabilità dei tessuti e che si manifestano, fra altro, con le lesioni intestinali messe in evidenza dallo Spadolini.

CONCLUSIONI. — Nei ratti maschi tiroparatiroidectomizzati il benzoato di estradiolo prolunga la durata della vita. La maggior sopravvivenza delle femmine così operate rispetto a quella dei maschi dev'essere perciò attribuita all'attività degli ormoni folliculoidi.

BIBLIOGRAFIA.

- BLUMENFELD C. M. e RICE H. M., « Anat. Rec. », 70, 227 (1938).
BUCKNER G. D., MARTIN J. H. e HULL F. E., « Am. J. Physiol. », 93, 86 (1930).
CAMPBELL I. L. e TURNER C. W., « Agr. Expt. Sta. Missouri Res. Bull. », 352, 134 (1942).
CLAVERT J., « Bull. Biologique de la France et de la Belgique », 4, 289 (1948).
DALLEMAGNE M. J., GOVAERT J. e MELON J., « Experientia », 5, 331 (1949).
DRAGSTEDT L. R., « Physiol. Revs. », 7, 449 (1927).
DRAGSTEDT L. R., SUDAN A. C. e PHILLIPS K., « Am. J. Physiol. », 69, 477 (1924).
EVANS E. I., SZUREK S. e KENS R., « Am. J. Physiol. », 117, 405 (1936).
GILMOUR J. R. e MARTIN W. J., « Path. Bact. », 44, 431 (1937).
JAHN M. e MITCHELL J. B., « Am. J. Physiol. », 88, 177 (1929).
LUCKHARDT A. B. e BLUMENSTOCK J., « Science », 56, 257 (1922).
MORTON M. E., CHAIKOFF I. L., REINHARDT W. O. e ANDERSON E. L., « J. Biol. Chem. », 147, 757 (1943).
PAPPENHEIMER A. M. e WILENS S. L., « Am. J. Path. », 11, 73 (1935).
ROWINSKI P. e MANUNTA G., « B.S.I.B.S. », 27, 36 (1951 a).
ROWINSKI P. e MANUNTA G., « Atti Acc. Naz. dei Lincei », 10, 495 (1951 b).
SPADOLINI I., *Trattato di Fisiologia Umana*. U.T.E.T., Torino 1946.

Microbiologia. — *Un nuovo «Mycobacterium» patogeno: «Mycobacterium minetti» n. sp.* (*). Nota preliminare di GIUSEPPE PENSO, GINA CASTELNUOVO, ALDO GAUDIANO, MARIO PRINCIVALLE, LUCIANO VELLA e ALFREDO ZAMPIERI, presentata (**) dal Socio D. MAROTTA.

Minett⁽¹⁾, isolava nel 1930 e 1931 da alcuni bovini che reagivano positivamente alla tubercolina aviaria, alla paratubercolina di John e, a volte, anche alla tubercolina bovina, alcuni ceppi acidoresistenti che egli interpretava come bacilli tubercolari aviari. Dal lavoro originale di Minett non si possono però trarre elementi sufficienti e probativi per riconoscere negli acidoresistenti isolati, ceppi di *Myc. avium* (Chester 1901).

I ceppi del Minett giunsero a noi dalla National Collection di Londra col nome di Cow 18, 19, 70 e 75.

Tali ceppi venivano lisati dal *Phagus lacticola* su loro indotto, fago che non era capace di agire su nessun altro ceppo, salvo che su due ceppi giunti a noi, uno come *Myc. avium* Goring e l'altro come *Myc. enteritidis* C 42.

I sei ceppi in questione repertati attraverso la tipizzazione fagica attrassero subito la nostra attenzione per cui volemmo studiarli a fondo per vedere se essi fossero realmente degli aviari «sui generis» o specie nuova. Potemmo così constatare come i sei ceppi in questione non venissero bloccati nemmeno da 1000 µg di PAS per cm³, mentre gli aviari veri non sono bloccati da 100 µg di PAS per cm³ ma lo sono sempre da 1000 µg.

I nostri ceppi quindi, sia attraverso la tipizzazione fagica sia attraverso la loro resistenza al PAS, si rivelarono differenti dagli aviari. Tali ceppi si distinguevano anche dagli aviari veri per la loro facilità di crescita nei comuni terreni; tale facilità era evidente nei ceppi mantenuti in collezione ma diminuiva qualora si procedesse all'isolamento del germe dagli animali inoculati.

Lo studio morfologico dei germi in questione ha messo in evidenza come essi presentino, strisciati su vetrino, la morfologia generale degli acidoresistenti: nelle colture giovani sono a bastoncino, abbastanza grossi, nelle colture più vecchie sono coccoidi. Osservandoli *in situ* nelle microcolonie, essi si presentano sempre ramificati. I germi giovanissimi sono cianofili, per divenire acidoresistenti verso il quarto o quinto giorno e ritornare quindi cianofili nelle vecchie colture. Al microscopio elettronico si mettono facilmente in evidenza i corpi rotondi presenti in tutti gli acidoresistenti, corpi che, come quelli del *Myc. phlei*, non vengono attaccati nè durante la lisi fagica, nè da solventi, nè da enzimi (alcol, etere, etere di petrolio, acetone, cloriformio, lipasi, ribonucleasi).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) «Jorn. Comp. Path. and Ther.», 45, 317 (1932).

Culturamente i germi in questione crescono sui vari terreni dando tipiche colonie rugose e varianti lisce; in brodo crescono in superficie con qualche difficoltà dato che i frustoli seminati galleggiano difficilmente.

Dal punto di vista metabolico questi ceppi utilizzano come fonte di carbonio, l'alcool amilico, l'alcool butilico, il glicerolo, il glicosio e il levuloso, non utilizzano l'acetone, l'alcool etilico, l'alcool metilico, l'adonite, la dulcite, l'eritrite, l'inosite, il mannitolo, la sorbite, l'arbutina, l'esculina, la salicina, l'arabinoso, il ramnoso, lo xiloso, il galattoso, il mannosio, il sorboso, il lattoso, il maltoso, il saccarosio, il trealoso, la destrina, l'inulina, il raffinoso. Non coagulano il latte, non fluidificano la gelatina, non producono indolo nè acido solfidrico, riducono i nitrati a nitriti, non dànno emolisi su agarsangue.

Questi ceppi sono per solito biancastri con qualche sfumatura color avorio. Col metodo cromatografico è possibile mettere in evidenza almeno tre pigmenti liposolubili presenti in quantità piccolissima. Questi pigmenti sono attualmente in corso di studio.

L'optimum di crescita si ha a un pH 6,8 e a una temperatura di 37°C, con possibilità di crescita tra temperatura ambiente e 40°C e tra pH 5,5 e pH 8,5.

I ceppi in questione sono risultati patogeni per i topi, le cavie i conigli, i vitelli e per la membrana corioallantoidea dell'embrione di pollo. Non sono risultati patogeni per i piccioni, i polli e i pulcini.

Sulla membrana corioallantoidea questi ceppi producono placche e tubercoli di varia grandezza a differenza degli altri tubercolari aviari da noi usati che, inoculati nella stessa dose, non produssero mai tubercoli.

Nei topini, cavie e conigli si hanno localizzazioni ai reni, alle linfoghiandole e all'orecchio medio e interno.

Nei vitelli le lesioni prodotte dall'inoculazione di questi ceppi riguardano le linfoghiandole, che divengono enormemente ingrossate con flogosi da parte dei reticolociti e ipertrofia connettivale, i reni e l'intestino in cui si producono forti emorragie.

Dall'insieme di questi dati esposti riteniamo di trovarci di fronte a una nuova specie di *Mycobacterium* per la quale proponiamo il nome di *Mycobacterium minetti* in onore di F. C. Minetti che la isolò.

N. B. - Nel lavoro definitivo che uscirà prossimamente sui « Rendiconti dell'Istituto Superiore di Sanità » verrà pubblicata tutta la documentazione iconografica costituita da fotografie ottiche ed elettroniche dei germi, fotografie di pezzi anatomici, microfotografie di preparati istologici, tabelle e curve di crescita; verranno forniti inoltre tutti i ragguagli batteriologici sulla nuova specie e descritte particolarmente le lesioni anatomopatologiche ch'essa provoca.

Biologia. — *Il nucleo nei fenomeni della determinazione e del differenziamento della cellula di Mauthner dei Teleostei (« Brachydanio rerio »)* (*). Nota di ALBERTO STEFANELLI e GIORGIO M. BAFFONI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Nella estensione delle indagini sulla determinazione e il differenziamento delle cellule nervose iniziate sperimentalmente da Stefanelli (1945) ⁽¹⁾, quale conseguenza delle sue osservazioni sulle cellule di Mauthner (M.) degli Anfibi anuri (1942) ⁽²⁾, abbiamo potuto mettere in evidenza negli embrioni di un Teleosteo, il *Brachydanio rerio* (Hamilton-Buchanan), delle condizioni peculiari del nucleo dei neuroblasti che hanno subita la determinazione istogenetica particolare di elementi di M. Riteniamo utile annunciare questi risultati quale premessa di un lavoro analitico e documentato in corso.

Secondo le ricerche di Stefanelli (1945, 1946, 1947) ⁽³⁾ la determinazione della cellula di M. in *Rana esculenta* si attua durante la gastrulazione tra lo stadio di tappo vitellino piccolo (corrispondente allo stadio 12 di Harrison) e quello a tappo introflesso (stadio 13), stadio che è raggiunto (a 18°) dopo 48 ore circa. Ma le manifestazioni del differenziamento sono molto più tardive e occorre giungere allo stadio 20 (dopo 120 ore circa) perchè la cellula si manifesti in modo evidente. Così pure le osservazioni di Baffoni e Catte (1951) ⁽⁴⁾ sulla cellula di M. di *Hyla arborea* ci mostrano il primo aspetto del differenziamento, che permette il riconoscimento di questa cellula, allo stadio 23, 24 (di Eakin), dopo circa 120 ore di sviluppo.

Se ci riferiamo alle precedenti osservazioni di Leghissa sullo sviluppo della cellula di M. degli Urodeli (*Amblystoma*) ⁽⁵⁾ vediamo come questo autore dica che ancora negli stadi 32, 33, 34 di Harrison «... non si riscontri alcun elemento che per posizione e caratteristiche morfologiche si possa riferire alla cellula di Mauthner». Solo allo stadio 35-36 (che si presume raggiunto, secondo le tabelle di Rough, circa 360 ore dalla fecondazione) si vengono ad identificare queste cellule per la loro sede, per la loro forma affusata e le loro maggiori dimensioni.

Desumendo da queste osservazioni si può pertanto asserire che negli Anfibi la cellula di M. non è riconoscibile se non con l'iniziarsi dell'au-

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze della Università di Roma; ricerche eseguite con un contributo del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) A. STEFANELLI, « Acta Acc. Pont. », VIII, 1945.

(2) A. STEFANELLI e A. OSTI, « Boll. Zool. », vol. 13, 1942.

(3) A. STEFANELLI, « Acta Acc. Pont. », vol. VII, 1945; « Mem. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. I, 1946; « Ric. Morfol. », vol. 22, 1947.

(4) G. M. BAFFONI e G. CATTE, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. IIX, 1950; « Riv. Biol. », vol. XLIII, 1951.

(5) S. LEGHISSA, « Arch. Zool. », vol. XIX, 1941.

mento della grandezza cellulare che si accompagna con il differenziamento generale (formazione della sostanza cromofila e delle neurofibrille e particolare (forma affusata, fibra e dendriti caratteristici).

Nello studio dello sviluppo e del differenziamento delle cellule nervose del *Brachydanio rerio* si è potuto constatare, eseguendo una completa serializzazione degli stadi, sia colorati con ematossilina ferrica che col blu di tolui-

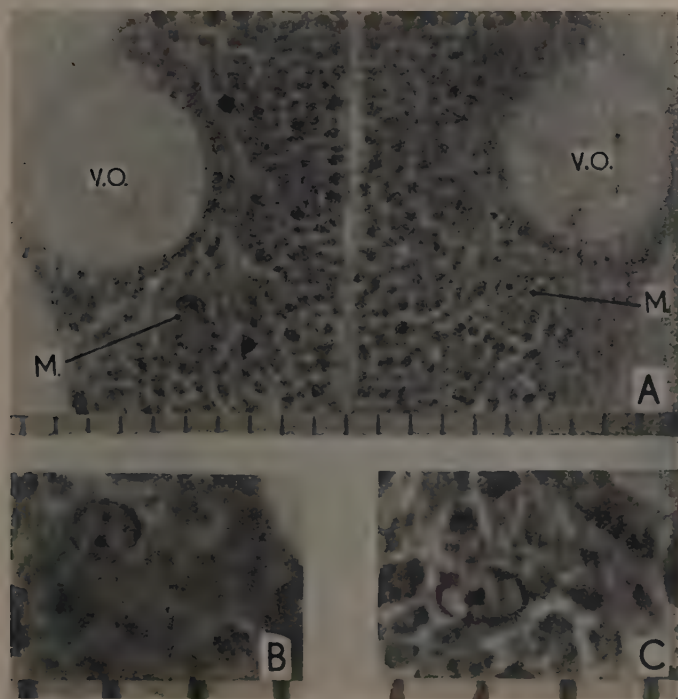


Fig. 1.

A - Sezione frontale di *Brachydanio rerio* allo stadio 12 (24 ore di sviluppo); V. O. = vescicola otica; M. = nuclei dei neuroblasti mauthneriani (Met. di Bodian). B - Nucleo del neuroblasto di M. allo stadio 9-10; notare i tre nucleoli (Emat. ferr.). C - Nucleo del neuroblasto mauthneriano allo stadio 12 (particolare della fig. A; Met. Bodian). Ogni intervallo delle scale = 10 μ .

dina, sia impregnati con l'argento colloidale (Bodian, come il neuroblasto che darà origine col differenziamento alla cellula di M. sia riconoscibile, sino in stadi precocissimi stadio 9-12 di Tavolga e Rough per le dimensioni del nucleo notevolmente maggiori di quelle delle altre cellule del neurasse a questo stadio, quando ancora attivissime sono le cariocinesi degli elementi germinativi. Questo neuroblasto si trova già nella caratteristica posizione al lato mediale della vescicola otica (Fig. 1 A).

Portiamo nella seguente tabella i valori citometrici medi, in μ , che riguardano questi primi stadi della cellula di M. del *Brachydanio*.

TABELLA I.

Stadio	Ore sviluppo	Nucleo						Cellula	
		Neuroblasta cellula di M.		Neuroblasti tegmentali		Cellule embrion. indeterm.		Neurobl. o cell. di M. diam.	Neurobl. tegm. diam.
		Diam.	Vol.	Diam.	Vol.	Diam.	Vol.		
9-12	24	7	180	5	65	4	33		
16-18	36	7,5	220	5,5	87	4	33	11 × 7,5	
23	48	8,4	310	6,5	133	4	33	15 × 8	9 × 8
schiusa	100	9	380	6,7	150	4	33	20 × 12	12 × 8

Da questi dati si può desumere che il neuroblasta di M. di questo Teleosteo ha un nucleo che allo stadio 9-12 è in volume 2,75 volte quello dei neuroblasti tegmentali (i più voluminosi) e 5,4 volte quello delle cellule embrionali indifferenziate del tubo neurale a quello stadio; che allo stadio 16-18 i valori sono rispettivamente 2,5 e 6,7 e allo stadio 23 sono 2,5 e 9,1. Alla schiusa il nucleo della cellula di M. è 2,5 volte quello delle altre cellule tegmentali e 11,5 volte quello delle cellule indifferenziate. Si può anche constatare che il maggior incremento nell'accrescimento del nucleo della cellula di M. rispetto alle altre cellule nervose si ha nei primissimi stadi per poi accrescersi parallelamente sino alla schiusa (nel lavoro in corso di Baffoni e Serra sarà preso in considerazione l'accrescimento successivo).

TABELLA II.

Età	Dimensioni dell'animale in mm.	Pirenoforo			Nucleo	
		Lunghezza	Larghezza	Volume	Diametro medio	Volume
4 gg. (schiusa)	3,25	20	12	1200	9	380
1 mese	12	35	14	5250	11	1100
1 anno	37	75	25	9000	15,2	1500
3 anni	40	85	25	10400	16	1600

Nei primi stadi il citoplasma del neuroblasta non è delimitabile, per lo meno nei nostri preparati, e la cellula è identificabile solo per le cospicue dimensioni del nucleo; questo appare già con alcune caratteristiche del nucleo

della cellula nervosa: è vescicoloso, povero di cromatina, ma, a differenza della cellula nervosa differenziata, (Fig. 1 B), possiede 2-3 nucleoli ribonucleinici (la presenza di più nucleoli nei nuclei dei neuroblasti unipolari è stata già descritta da His, Held, Cajal e successivamente da molti altri).

Solo allo stadio 16 appare attorno al nucleo distinto il citoplasma, particolarmente ispessito dal lato mediale rispetto alla sua posizione nell'allun-

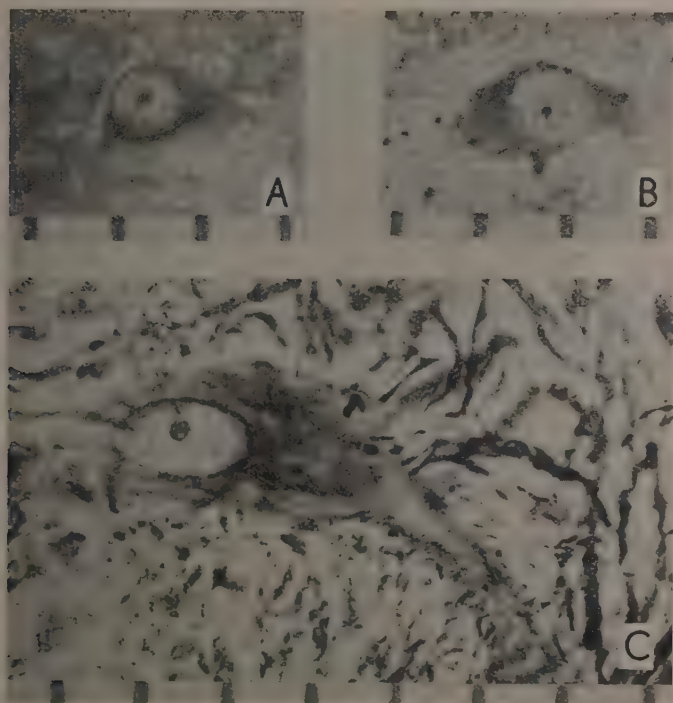


Fig. 2.

A - Cellule di M. di embrione di *Brachydanio rerio* di due giorni (stadio 16-18); notare la sostanza cromofila ammassata attorno al nucleo (Bleu di toluidina). B - Cellula di M. di larva di *Brachydanio* di sedici giorni; zelle di tigroidi evidenti (Bleu di toluidina). C - Cellula di M. di giovine *Brachydanio* di un mese; notare il completo differenziamento e lo sviluppo del sistema sinaptico a bottoni (*endfeet clubs*). (Met. Bodian). Ogni intervallo delle scale = 10 μ .

gato; allo stadio 23 l'elemento assume l'aspetto bipolare e appare la prima traccia delle neurofibrille e della sostanza basofila (Vedi figura 2 A).

In seguito, dopo la schiusa, la cellula di M. continua ad accrescersi, ma tale accrescimento avviene prevalentemente a carico del citoplasma; i nuclei aumentano di volume molto più lentamente che negli stadi precoci descritti. Riportiamo nella tabella II i dati citometrici medi dell'accrescimento della cellula di M. dopo la schiusa (vedi anche fig. 2 B e C).

Da questi dati possiamo pertanto concludere che l'aumento in grandezza del nucleo anticipa le condizioni di gigantismo delle cellule e si pre-

senta di notevoli dimensioni, superiori a quelle degli altri neuroblasti, già nei neuroblasti che hanno appena subita la determinazione istogenetica particolare (vedi per tale concetto i lavori di Stefanelli del 1946 e 1950).

L'importanza di questo dato di fatto è evidente per i problemi che riguardano la determinazione e il differenziamento delle cellule nervose.

Non ci risulta dalla letteratura che tale fenomeno sia stato descritto per altri neuroblasti e riteniamo opportuno far notare che l'accrescimento del nucleo da noi descritto non va confuso con quel rigonfiamento del nucleo che si accompagna sempre nelle cellule nervose che iniziano il differenziamento; quello infatti precede notevolmente questo, e supera in modo evidente quello dei nuclei delle altre cellule nervose embrionali così da apparire nettamente specifico. Per maggiori ragguagli sull'accrescimento dei neuroblasti rimandiamo alla monografia di Hydén (1943) ⁽⁶⁾.

In altre parole, possiamo concludere che il neuroblasta mauthneriano di *Brachydanio*, appena determinato come tale con il processo della determinazione particolare, si pone, con l'accrescimento del nucleo, nelle migliori condizioni per raggiungere quelle dimensioni cospicue che sono peculiari di questa cellula differenziata. Tale condizione è un esempio in cui, tra il fenomeno invisibile della determinazione e quello visibile del differenziamento specifico a carico del citoplasma, esiste una condizione preparatoria specifica a carico del nucleo.

Secondo le ricerche ormai classiche del Levi e della sua Scuola ⁽⁷⁾, vi è un diretto rapporto tra le dimensioni delle cellule nervose e l'estensione dei loro prolungamenti e quindi della mole dell'animale con l'accrescimento. Secondo Stefanelli ⁽⁸⁾ (per le cellule giganti del tegmento dei Ciclostomi) tale rapporto sussiste anche tra neuroni omologhi di animali di specie diversa e con mole specifica diversa. La presenti osservazioni ci dimostrano come nella determinazione della grandezza dei neuroni, per lo meno di quelli di elevata specificità (quali questi mauthneriani), entrino in gioco, più che l'aumento di mole e l'accrescimento dei prolungamenti, quei fattori intrinseci, « ereditari », che vengono acquisiti all'atto della determinazione istogenetica particolare e che rispondono alle future necessità funzionali.

Da questo punto di vista le presenti osservazioni rappresentano un'altra documentazione di quanto Stefanelli ha potuto dimostrare per la cellula di M. degli Anfibi anuri: che cioè, isolando comunque il neuroblasta di M. (o il presunto tale), in cavità di un embrione ospite o *in vitro*, con la tecnica degli espianti, se esso ha subita la determinazione particolare si sviluppa sempre come cellula di M. con le specifiche caratteristiche di grandezza e di forma (alle volte questa può essere alterata da condizioni meccaniche); e ciò avviene pur essendo questa cellula separata dalle influenze di mole dell'insieme e pur non potendo in queste condizioni produrre come

(6) H. HYDÉN, « Acta Physiol. Scand. », vol. 16, Suppl. XVII, 1943.

(7) G. LEVI, *Trattato di Istologia*. (UTET Torino). 1946.

(8) A. STEFANELLI, « Zeitschr. Zellf. », 18 Bd., 1933.

di norma i propri prolungamenti. In tali condizioni, inoltre, non si possono nemmeno invocare quelle attività funzionali che sarebbero, secondo alcuni autori, le responsabili del differenziamento specifico. L'interpretazione di Leghissa (loc. cit.) che il differenziamento della cellula di M. di Axolotl «...sia dipendente dagli impulsi nervosi che la presunta cellula di M. riceve dalle sue molteplici connessioni encefaliche e periferiche» non può essere pertanto accettata; quello che possiamo constatare è che la cellula, una volta determinata, assume quell'aspetto e quelle dimensioni che sono adatte per la funzione che dovrà espletare quando si saranno differenziati gli altri centri e vie che si conetteranno con essa: sono questi fenomeni sincroni e non di dipendenza.

Tuttavia le condizioni « ambientali » hanno il loro valore anche per lo sviluppo e il differenziamento delle cellule nervose e le condizioni strutturali « ereditarie » possono essere alterate più o meno da queste (condizioni meccaniche, umorali e, successivamente, fisiologiche); i fenomeni di ipertrofia e di atrofia ne sono evidenti esempi. Così le condizioni di involuzione delle cellule di M. con la metamorfosi degli Anfibi anuri, quando cessano le condizioni funzionali (come ha messo in luce Stefanelli 1942, 1949, 1950, ed è stato controllato anche dai suoi collaboratori Baffoni e Catte, 1950, 1951), rientrano in quest'ordine di fenomeni. Così, sempre per riferirci ai neuroni di M., si hanno profonde alterazioni involutive quando vengano recise le fibre che si dirigono al midollo spinale codale (esperienze inedite sui tritoni di Stefanelli e allievi). Per la letteratura sulle cellule di M. vedi la rivista di Stefanelli del 1951⁽⁹⁾.

Prima di chiudere queste note facciamo osservare come il fenomeno qui descritto, del precoce accrescimento del nucleo del neuroblasto mauthneriano, non appare dalle ricerche di Stefanelli e di Baffoni e Catte negli Anuri (*Rana*, *Hyla*) nè, dalle ricerche di Leghissa (loc. cit.) negli Urodeli (*Amblystoma*). Questo autore afferma infatti che «... nei tre stadi 32-33-34 non si riscontra alcun elemento che per posizione e caratteristiche morfologiche si possa riferire alla cellula di Mauthner ».

Questa diversità di comportamento di un specifico elemento nervoso comune agli Ittiopsidi può essere interpretato tenendo conto delle grandi differenze dei tempi di sviluppo che nel *Brachydanio* sono molto più brevi che nella *Rana* e nell'*Hyla*. Infatti in questi la cellula di M. è identificabile dopo circa 120 ore e nell'*Amblystoma* (Leghissa) allo stadio 35-36, che è raggiunto in media dopo 360 ore; in *Brachydanio* invece la prima identificazione della cellula di M. si ha dopo 48 ore e lo stadio corrispondente a quello in cui tale cellula si identifica negli Anfibi è raggiunto solo dopo 96 ore.

Solo ulteriori ricerche potranno dirci se questa condizione del *Brachydanio* è generale nei Teleostei o se anche in questi animali vi sia un comportamento differente in relazione alla velocità di sviluppo. Così pure sarà da controllare cosa accade negli Anfibi accelerandone lo sviluppo sperimentalmente.

(9) A. STEFANELLI, « Biol. Rev. », vol. 26, 1951.

In conclusione, possiamo stabilire che in un Teleosteo, il *Brachydanio rerio*, la cellula di M₁ si identifica assai precocemente allo stadio embrionale riferibile al 9-12 di Rough⁽¹⁰⁾ che è raggiunto 48 ore dalla fecondazione, quando, ancora neuroblasta, si presenta con un nucleo di dimensioni notevolmente superiori a quello di tutti gli altri nuclei dei neuroblasti dell'embrione a quello stadio e nei successivi. Esso occupa già in questo stadio, la posizione caratteristica al lato mediale della vescicola otica.

Tale condizione dimostra una precoce predisposizione della cellula per il raggiungimento delle cospicue dimensioni che si manifestano col successivo sviluppo e viene a costituire un esempio di manifestazioni strutturali differenziative del nucleo tra la fase di determinazione istogenetica particolare e la fase di differenziamento istologico specifico a carico del citoplasma.

Il fatto che tale fenomeno appaia in un Teleosteo e non negli Anfibi considerati viene interpretato in relazione alla velocità di sviluppo notevolmente maggiore nel primo.

Riteniamo infine che la condizione da noi chiaramente dimostrata, sebbene per ora in un caso determinato, di una anticipazione della struttura del nucleo, qui rappresentata dalle peculiari dimensioni, sulla differenziazione particolare della cellula, rivesta un interesse teorico generale nel problema della determinazione e del differenziamento istologico.

Biologia. — *Nuove osservazioni intorno alle cellule basofile nell'ipofisi del Tritone crestato*^(*). Nota di VALDO MAZZI, presentata^(**) dal Socio N. BECCARI.

Nel 1940 Romeis⁽¹⁾, utilizzando nel suo metodo Cresazan la tecnica di Berblinger e Burgdorf (1935)⁽²⁾, distinse le cellule basofile dell'ipofisi umana in due categorie, convenzionalmente indicate come β e δ . Ambedue questi elementi cellulari si colorano con il bleu di anilina, ma soltanto i primi prendono la resorcin fucsina di Weigert. Successivamente Galgano (1947)⁽³⁾ ha confermato i reperti di Romeis nell'uomo e nel bove. Egli ha perfezionato una modificazione del metodo Mallory, nella quale vengono usati come coloranti elettivi delle β , il reso- e il pirocarminio (mescolanze del carminio con la resorcina e il pirogallolo rispettivamente). Galgano ha osservato inoltre che la colorazione delle β può essere rafforzata trattando le sezioni, già colorate con uno dei sopracitati coloranti, con il bleu di metilene secondo Löffler.

(10) R. ROUGH, *Experimental embryology*. (Burgess.), 1948.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) *Handbuch mikr. Anat. Mensch.*, di W. MOLLENDORFF, VI, 3, *Hypophyse* (1940).

(2) « *Endokrinol.* », 18, 381 (1935).

(3) « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », ser. VIII, 3, 629 (1947).

La tecnica di Romeis è stata scarsamente applicata, ma i reperti dell'A. tedesco hanno avuto piena conferma, nell'ipofisi umana, da Herlant ⁽⁴⁾, il quale inoltre ha sperimentato con successo un nuovo metodo, consigliato da P. Masson, più semplice del Cresazan.

Successive ricerche hanno chiarito che l'affinità per la cresofucsina è dovuta alla presenza, esclusivamente nelle β , di una particolare sostanza, adsorbita a livello delle granulazioni basofile, che determina anche l'affinità, sia pur debole, per il mucicarminio e la muciemateina (Romeis ⁽¹⁾), la metacromasia con il bleu di toluidina (Herlant ⁽⁵⁾), e la proprietà di dare una reazione PAS positiva (Mac Manus ⁽⁶⁾, Catchpole ⁽⁷⁾, Pearse ⁽⁸⁾), Herlant ⁽⁴⁾). Secondo Herlant ⁽⁴⁾ questa sostanza conterrebbe polisaccaridi e sarebbe identificabile con l'ormone follicolostimolante, la cui natura glicoproteica sembrerebbe dimostrata. Secondo Catchpole ⁽⁷⁾, ed Herlant ⁽⁴⁾ quindi riceverebbe nuova conferma la tesi, sostenuta da diversi Autori, secondo la quale l'ormone follicolostimolante sarebbe elaborato dalle cellule basofile del tipo β . Questo modo di vedere viene appoggiato anche da Principe e Toracca (1951) ⁽⁹⁾. Questi Autori sono riusciti a dimostrare istologicamente una ossidasi (fenolasi) a livello delle cellule basofile dell'ipofisi dell'uomo, e ritengono che questo enzima prenda parte attiva nella sintesi dell'ormone follicolostimolante. Essi ammettono inoltre che l'azione di blocco esercitata dagli estrogeni sulla fase follicolostimolante del ciclo ipofisario si espliciti in ragione della forte azione antiossidante caratteristica degli estrogeni stessi.

Per quanto mi consta la possibilità di separare le cellule basofile in due classi nei bassi Vertebrati è stata ammessa soltanto negli Anfibi Urodeli da Aplington ⁽¹⁰⁾ (*Necturus maculosus*), da Kent ⁽¹¹⁾ (*Triturus viridescens*) e da me (1947) ⁽¹²⁾ nel Tritone crestato. Applicando all'ipofisi del Tritone crestato tanto il Cresazan che il II metodo di Galgano, io giunsi ad identificare, in un primo tempo, cellule basofile aventi un contegno cromatico del tutto simile a quello proprio delle cellule β e δ dell'uomo e dei Mammiferi. Tali cellule hanno una ripartizione topografica distinta; le β sono meno numerose e in gran parte confinate nella zona I dell'adenoipofisi; le δ sono più numerose e distribuite nelle zone II e III (cfr. Mazzi, 1949 ⁽¹³⁾, fig. 7, f). Inoltre sussistono anche differenze citologiche; infatti nelle β i granuli sono minuti e

(4) « Arch. De Vecchi », 15, 849 (1950).

(5) « Arch. de Biol. », 54, 225 (1943).

(6) « Nature », London, 158, 202 (1946).

(7) « J. Endocrinol. », 6, 218 (1949).

(8) « Nature », 162, 652 (1948).

(9) « Riv. Ostetricia e Ginecol. », 6, 272 (1951).

(10) « Amer. J. Anat. », 70, 201 (1942).

(11) « J. Tenn. Acc. Sc. », 20, 139 (1945).

(12) « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 3, 651 (1947).

(13) « Arch. Ital. Anat. Embriol. », 54, 1 (1949).

numerosi, più grandi e radi nelle δ . Successive ricerche, se da un lato hanno accertato che le differenze nel comportamento tintoriale fra le β e le δ , sulle quali la distinzione fu in un primo tempo fondata, appaiono particolarmente nette soltanto nei mesi estivi, dall'altro hanno chiarito anche che il ciclo secretorio è molto diverso nei due tipi cellulari. Il più complesso è quello delle δ , caratterizzato fra l'altro dalla comparsa nel citoplasma di granulazione acidofila (δ globulari).

Malgrado la poca attendibilità del criterio tintoriale, la costante differenza nella distribuzione topografica e le particolarità del ciclo secretorio, mi indussero a mantenere la separazione in due classi delle basofile del Tritone cretato.

Però misi già allora in dubbio la identità fra le due categorie di cellule basofile dell'ipofisi del Tritone cretato e le β e le δ dei Mammiferi e del-

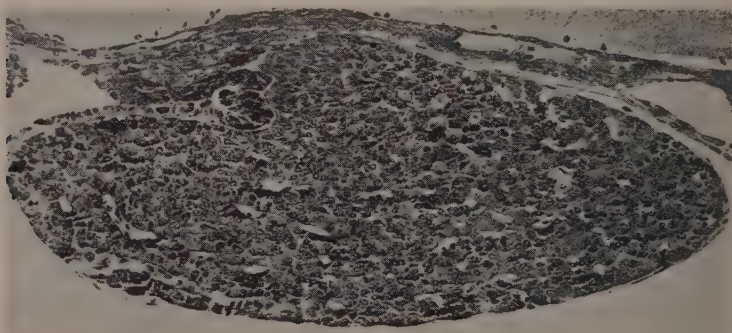


Fig. 1. - Ipofisi di Tritone cretato sacrificato in marzo. Reazione PAS + emallume. Reazione positiva a livello della colloide del lobo posteriore e degli elementi basofili del lobo anteriore; reazione mediocrementemente positiva nelle cellule del lobo intermedio. Fiss. Stieve. $\times 90$.

l'uomo, tanto più che nel Tritone cretato sembrano funzionalmente più importanti le cellule del tipo δ , le cui funzioni nei Mammiferi invece sono del tutto sconosciute (Herlant ⁽¹⁴⁾).

Poichè le recenti ricerche più sopra ricordate hanno posto le differenze fra cellule β e δ nei Mammiferi su basi istochimiche, ho ritenuto utile estendere i nuovi metodi di indagine (ricerca della metacromasia, PAS reazione) anche all'ipofisi del Tritone cretato.

Per le attuali ricerche ho impiegato ipofisi di $\sigma\sigma$ di *Triturus cristatus carnifex*, prelevate in tutti i mesi dell'anno, fissate in Sanfelice, Stieve e Bouin, incluse in paraffina e celloidina secondo Jordan, sezionate a 5μ . A tutte le ipofisi è stata praticata la PAS reazione, secondo le avvertenze dettate da Boni (1951) ⁽¹⁴⁾. Sezione contigue sono state colorate con il metodo

(14) «Quaderni Anatomia Pratica», 6, 22 (1951).

di Galgano, e, in qualche caso, anche con il metodo dell'arricchimento. In poche ipofisi ho ricercato la metacromasia con il bleu di toluidina, ottenendo però scarse indicazioni.

Se si osserva a piccolo ingrandimento l'ipofisi di un animale invernale (cfr. fig. 1), alla quale sia stata praticata la PAS reazione, si nota che appaiono colorate in rosso dalla fucsina basica del reattivo di Schiff: 1° la colloide del lobo nervoso; 2° le cellule del lobo intermedio; 3° le cellule che occupano la prima zona e alcune cellule della II e della III zona del lobo anteriore. Il confronto con preparati eseguiti con il metodo di Galgano insegna che queste ultime cellule corrispondono tanto alle cellule basofile del tipo β che a quelle del tipo δ .

Un esame più approfondito ha permesso di accertare che la reazione PAS delle cellule del lobo intermedio, sempre mediocre, va incontro, nel corso dell'anno, a variazioni di intensità parallele alle variazioni dell'intensità della basofilia dimostrabili con il



Fig. 2. - Cellule del lobo intermedio dell'ipofisi di un animale sacrificato in marzo; reazione PAS più intensa che in fig. 1. In basso qualche cellula basofila. Fiss. Stieve. $\times 260$.

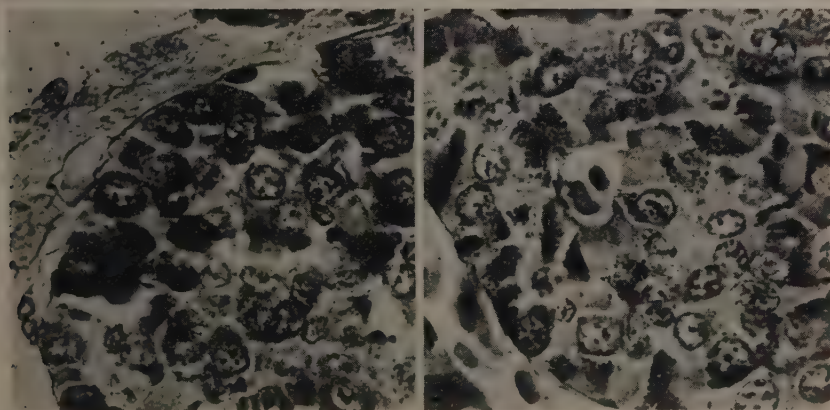


Fig. 3. — Particolari a forte ingrandimento della fig. 1. *A sinistra*: cellule basofile del I tipo (β), con citoplasma completamente ripieno di minutissimi granuli PAS positivi. *A destra*: cellule basofile del II tipo (δ globulari), contenenti nel citoplasma granuli grossi e radi PAS positivi. $\times 500$.

metodo Galgano. Il massimo di positività della reazione è proprio dei mesi invernali, il minimo dei mesi estivi.

Con la PAS reazione si colorano elettivamente tanto le granulazioni delle cellule del tipo β che quelle del tipo δ . La diversità nella mole delle granulazioni viene confermata (cfr. fig. 3). Inoltre, il confronto con preparati eseguiti con il metodo Galgano ha accertato che danno una reazione positiva anche le granulazioni acidofile delle cellule δ globulari, che appaiono invece incolori con il metodo dell'arricchimento. Le granulazioni basofile delle cellule δ aglobulari sono quelle che danno la PAS reazione più intensa, mentre le granulazioni delle δ globulari pallide a globuli pallidi sono quelle che danno la reazione PAS più debole.

In nessun caso ho osservato granuli PAS positivi nelle cellule cromofobe o nelle cellule acidofile dei due tipi, o nei vasi.

Le brevi osservazioni compiute offrono indicazioni assai utili.

In primo luogo si deve sottolineare che le differenze citologiche nei due tipi di cellule basofile, osservabili con il metodo di Galgano, sono rilevabili anche con il PAS. Quindi la opportunità di separare in due classi distinte le cellule basofile dell'ipofisi del Tritone crestato riceve nuova conferma. D'altra parte però, poichè la reazione PAS è positiva in ambedue le classi di cellule basofile, si deve concludere che la identità fra queste e le cellule β e δ dei Mammiferi e dell'uomo non è perfetta. Sarebbe quindi consigliabile, forse, abbandonare, per il Tritone crestato, la dizione di cellule del tipo β e del tipo δ , adottandone una meno impegnativa, come, per esempio, cellule basofile del I e del II tipo.

Particolare valore riveste la constatazione che anche le granulazioni e sferule acidofile delle cellule del II tipo danno una reazione PAS positiva. Infatti i sostenitori della teoria unitaria vedevano nelle cellule basofile contenenti granulazioni fucsinofile (osservabili non solo negli Anfibi, ma anche nei Mammiferi) stadi di transizione fra cellule basofile e cellule acidofile. Orbene la reazione PAS insegna che da un punto di vista chimico non esiste differenza fra le granulazioni colorate dal bleu di anilina e quelle colorate dalla fucsina acida nelle cellule basofile. È quindi più corretto considerare le cellule basofile del tipo globulare come stadi del ciclo secretorio degli elementi basofili anzichè stadi di transizione verso elementi acidofili. Infatti le granulazioni delle cellule acidofile sono sempre PAS negative.

Poichè la PAS reazione viene considerata elettiva per i polisaccaridi si deve concludere che questi idrati di carbonio sono presenti in tutte le cellule basofile dell'ipofisi del Tritone; al contrario nei Mammiferi e nell'uomo solo le β ne conterrebbero.

L'applicazione della PAS reazione, che si è rivelato un metodo assai sensibile per la messa in evidenza delle cellule basofile, credo che sarà molto vantaggiosa nelle ricerche tendenti alla localizzazione citologica della sede di elaborazione delle gonadostimoline; ricerche che, almeno per il Tritone crestato, ancora si impongono. Infatti mentre Tuchmann ⁽¹⁵⁾ ritiene che le

(15) « Thèse Un. Paris » (1945).

cellule basofile siano responsabili della elaborazione del FSH e le acidofile del LH, io ho raccolto diverse prove in base alle quali le acidofile del II tipo non sarebbero estranee alla elaborazione del FSH ⁽¹⁶⁾. Anche nei Mammiferi del resto, pur essendo accreditata l'ipotesi che vede nelle basofile la sede della elaborazione del FSH, non è da escludersi affatto anche una compartecipazione delle acidofile (cfr. Lemaire, Delbarre e Michard ⁽¹⁷⁾).

Mi limito semplicemente a sottolineare la positività della reazione PAS a livello delle cellule intermedie, e le variazioni di intensità che contraddistinguono il ciclo secretorio, non avendo per il momento elementi per una discussione.

Una parola di commento merita invece il fatto che la colloide del lobo posteriore è PAS positiva. Nel lavoro di Herlant del 1950 ⁽⁴⁾ viene ricordato che la colloide delle cisti del lobo anteriore e del lobo intermedio dei Mammiferi dà una reazione positiva con la PAS, ma non viene fatto cenno del comportamento della colloide del lobo posteriore.

Io non ho fatto osservazioni in proposito nei Mammiferi; ho notato però che in alcuni Pesci (*Anguilla anguilla*, *Crenilabrus pavo*, *Cristiceps argentatus*), mentre sono PAS positive le cisti di colloide nel lobo anteriore e nel lobo di transizione, è PAS negativa la colloide del lobo posteriore. Va ricordato a questo proposito che, stando alle ricerche di Bargmann e della sua scuola ⁽¹⁸⁾, la colloide del lobo posteriore vi perverrebbe dai nuclei preottici, convogliata lungo ed entro gli assoni del fascio preottico-ipofisario. Le ricerche istochimiche di Schiebler ⁽¹⁹⁾ avrebbero dimostrata la natura lipoproteica del neurosecreto, e quindi della colloide postipofisaria, neurosecreto che d'altra parte, secondo l'A., dà una reazione Bauer e Best negativa. Osservazioni preliminari da me compiute indicano che, mentre il neurosecreto rilevabile nelle cellule del nucleo magnocellulare preottico dei Pesci dà una reazione PAS negativa, quello del Tritone crestato dà una reazione PAS positiva. Questa circostanza spiegherebbe il diverso comportamento della colloide postipofisaria nei Pesci e nel Tritone e starebbe anche ad indicare una diversità nella composizione chimica del neurosecreto nelle diverse classi di Vertebrati. Le osservazioni da me compiute richiedono più ampia conferma, onde qui mi limito semplicemente a segnalare il reperto.

(16) « Riv. Biol. », 41, 271 (1949); « Boll. Zool. », 17 (suppl.), 385 (1950).

(17) *Les stimulines hypophysaires*, Masson, Paris (1951).

(18) Per una rivista sintetica cfr: « Acta Neurovegetativa », 1, 233 (1950).

(19) « Acta Anat. », 13, 233 (1951).

Biologia. - *Blocco da cianuro dell'effetto stimolatore auxinico sulla sintesi dell'amido in stomi isolati*^(*). Nota di ERASMO MARRÈ e PAOLA PROFUMO, presentata^(**) dal Corrisp. E. REMOTTI.

Notevoli contributi circa il problema del meccanismo di azione delle sostanze di crescita sono giunti negli ultimi anni dalle ricerche sulla relazione tra attività respiratoria e fenomeni di accrescimento. Che le auxine attuino la loro caratteristica azione attraverso l'interessamento di meccanismi respiratori, è stato, per la prima volta, prospettato da Bonner⁽¹⁾. Successivamente (per citare solo i dati di maggior rilievo) Commoner e Thimann⁽²⁾, Sweeney e Thimann⁽³⁾, Bonner⁽⁴⁾ hanno indicato, in reazioni del tipo del ciclo di Krebs (metabolismo degli acidi C₄-2-carbossilici), la frazione respiratoria interessata alla crescita. Parallelamente altri autori (Smith⁽⁵⁾, Kelly e Avery⁽⁶⁾) ritrovano, per auxine sintetiche di tutt'altra natura dall'indolacetico (studiato nelle precedenti esperienze), come l'acido 2-4-diclorofenossiacetico, un rapporto tra modificazioni respiratorie e stimolo della crescita.

Particolare interesse, di fronte a questi risultati, acquista lo studio dei rapporti tra respirazione e le altre azioni molteplici indotte dall'auxina: per esso infatti, oltre a una migliore conoscenza dei particolari meccanismi di queste, si può sperare di giungere a una più completa comprensione del meccanismo generale dell'azione auxinica.

In queste prime ricerche ci siamo proposti di studiare i rapporti tra respirazione e effetto dell'acido indolacetico sulla sintesi d'amido dal Glucosio 1-fosfato in stomi isolati (Marrè e Profumo⁽⁷⁾), mediante l'uso di un tipico inibitore della fase aerobia, quale il cianuro.

Le ricerche sono state condotte su stomi di *Iris florentina*, ottenuti mediante spellature epidermiche da piante preventivamente oscurate, nei quali la sintesi d'amido era condizionata dalla cultura in liquido di Shive tamponato e addizionato di Glucosio 1-fosfato.

Ai fini della ricerca, si trattava di studiare comparativamente la velocità della sintesi in presenza di indolacetico e di cianuro. Naturalmente

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico « Hanbury » dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) J. BONNER, « Arch. Biochem. », 17, p. 311 (1948).

(2) B. COMMONER and K. V. THIMANN, « Jour. Gen. Phys. », 24, p. 278 (1941).

(3) B. M. SWEENEY and K. V. THIMANN, « Jour. Gen. Phys. », 25, p. 841 (1942).

(4) J. BONNER, « Am. J. Bot. », 36, p. 429 (1949).

(5) F. G. SMITH, « Plant Phys. », 23, p. 40 (1948).

(6) S. KELLY and G. S. AVERY, « Am. J. Bot. », 36, p. 421 (1949).

(7) E. MARRÈ e P. PROFUMO, « Atti Acc. Lincei », questo volume (*Azione dell'eteroauxina sulla sintesi d'amido*, ecc.).

l'esperienza veniva a risolversi in una serie di quattro saggi comparabili: *a*) stomi di controllo; *b*) stomi trattati con solo indolacetico; *c*) stomi trattati con solo cianuro; *d*) stomi trattati con indolacetico e cianuro.

Nell'esecuzione pratica, il trattamento sia con auxina, sia con cianuro, sia con ambedue le sostanze insieme, veniva a precedere di una o due ore l'aggiunta, nel liquido di cultura, del Glucosio 1-fosfato, in modo che la reazione della sintesi trovasse, negli stomi, preventivamente attuate le condizioni volute, per l'auxina come per il cianuro.

A determinati intervalli di tempo, dopo l'aggiunta (fino a conc. dello 0,3 %) del Gl. 1 P, i brani epidermici venivano prelevati, fissati e passati al reattivo jodo-jodurato. L'attività di sintesi veniva valutata in base al numero di stomi che davano per l'amido reazione nettamente positiva.

RISULTATI.

TABELLA.

Azione dell'indolacetico, del cianuro, dell'indolacetico e cianuro associati, sulla sintesi d'amido in stomi di Iris. Gl. 1P a conc. 0,25 % pH 6,9.

Trattamento	Percentuale di stomi carichi d'amido dopo			
	30'	90'	150'	210'
Controlli	0,9	1,4	2	13
Indolac. 10^{-5}	4	6	9	25
KCN $2 \cdot 10^{-4}$ M	0,8	1,2	2,6	14
KCN $2 \cdot 10^{-4}$ M e Indolac. 10^{-5}	1	1,1	2,5	17

Dalla tabella risulta:

a) A conferma dei dati precedenti, gli stomi trattati con sola auxina offrono maggiori valori di sintesi in confronto dei controlli non trattati.

b) Negli stomi trattati con solo cianuro la sintesi è sensibilmente vicina a quella osservabile nei controlli.

c) Il trattamento simultaneo con auxina e cianuro ci riporta a valori sostanzialmente identici a quelli dei controlli. *Il cianuro elimina quindi completamente l'effetto attivante dell'indolacetico sulla sintesi.*

Il blocco esplicato dal cianuro sull'effetto di stimolo caratteristico dell'indolacetico è quindi tanto più significativo in quanto, in assenza di auxina, il cianuro, a queste concentrazioni (2×10^{-4} M), non esercita alcuna inibizione sulla sintesi.

La tabella si riferisce alla serie più completa di esperienze; numerose altre che, per brevità, non vengono riportate, concordano pienamente con

l'andamento sopra riferito. Ove il cianuro venga usato a concentrazioni alquanto più elevate ($2 \cdot 10^{-3}$), la capacità di sintesi si abbassa al di sotto di quella dei controlli, indipendentemente dal trattamento o meno con auxina.

CONCLUSIONI E CONSIDERAZIONI. - Il comportamento degli stomi di fronte ad elevate concentrazioni di cianuro non può non essere riferito alle gravi alterazioni che questo veleno induce sul protoplasma. Il suo interesse sta, evidentemente, nel dimostrarci l'intervento, nella sintesi fosforilatica degli stomi, di una componente fisiologica che deve verosimilmente ricercarsi nell'assorbimento selettivo del glucosio 1-fosfato.

Ma il dato, per noi, di maggior importanza è il blocco che il cianuro esplica sull'azione specifica di stimolo dell'eteroauxina sulla sintesi, a concentrazioni compatibili con la vitalità della cellula e che, secondo dati raccolti su altro materiale (Allen e Price su *Physarum polycephalum* ⁽⁸⁾), non sembrano incidere gravemente, ad esempio, sulle correnti citoplasmatiche. Peraltro, anche per queste concentrazioni, l'attività respiratoria è indubbiamente fortemente ridotta ed è proprio in questa frazione respiratoria cianuro-sensibile che ci sembra dover ricercare il momento del blocco dell'azione auxinica.

Nè fosforilasi nè amilasi sono, infatti, inibite dal cianuro, chè, anzi, la prima ne è, se mai, almeno *in vitro*, protetta (Green, Cori e Cori ⁽⁹⁾, Sumner e Somers ⁽¹⁰⁾); mentre, d'altra parte, il fatto che manchi, *in vitro*, ogni effetto dell'auxina sull'amilasi (Marrè ⁽¹¹⁾), per contro nettamente inibita *in vivo* (Marrè ⁽¹²⁾), ci dimostra che l'azione dell'indolacetico sul ricambio dell'amido è legata alla vitalità della cellula e quindi evidentemente, in qualche modo, alla respirazione.

Sembra quindi potersi ragionevolmente concludere che *il cianuro inibisce l'azione dell'auxina sulla sintesi dell'amido, attraverso la sua tipica azione di veleno della fase aerobia respiratoria.*

Per tal modo, anche nel rapporto auxina-metabolismo dell'amido si innesta, come nel rapporto auxina-crescita, una tappa dei processi respiratori, a rendere possibile l'azione stimolante dell'auxina. Ritroviamo cioè quella comunanza di vie di azione che abbiamo visto a proposito dell'intervento della luce (Marrè e Profumo ⁽¹³⁾).

(8) P. J. ALLEN and W. H. PRICE, « Am. J. Bot. », 37, p. 292 (1950).

(9) GREEN, G. CORI and C. CORI, « J. Biol. Chem. », 158, 2 (1942).

(10) J. B. SUMNER and G. F. SOMERS, « Arch. of Bioch. », 4, p. 11 (1943).

(11) E. MARRÈ. Dati tuttora inediti.

(12) E. MARRÈ, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 25, 3 (1949).

(13) E. MARRÈ e P. PROFUMO, « Rendiconti Acc. Lincei », questo volume (*Luce e reazione della sintesi d'amido all'auxina in stomi isolati*) (1951).

Biologia. — *Ricerche citologiche sugli ibridi di Ascidie* (*). Nota di ANTONIO MINGANTI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

In lavori precedenti (Reverberi, 1933 ⁽¹⁾; Minganti, 1948, 1950 ⁽²⁾) si è dimostrato come la capacità di sviluppo degli ibridi di Ascidie vari a seconda degli incroci. In alcune combinazioni l'ibrido raggiunge lo stadio di larva natante; in altre invece lo sviluppo si arresta all'inizio della gastrulazione (ibridi letali); vi è infine il caso in cui l'uovo è solo attivato, ma non si segmenta. Un'altra osservazione è che in genere le uova ibridate si sviluppano col ritmo proprio della specie materna e che le larve ibride presentano caratteri morfologici essenzialmente materni.

Per introdursi nella spiegazione dei risultati delle ibridazioni è necessario conoscere il comportamento nucleare degli ibridi. Nello studio che ci siamo proposti di fare al riguardo i punti presi in considerazione sono i seguenti: 1° nell'uovo ibridato, ha luogo l'anfimissi, o invece lo sviluppo dell'ibrido è partenogenetico? 2° l'arresto dello sviluppo negli ibridi letali è da attribuire ad anomalie nucleari? 3° negli ibridi che raggiungono lo stadio di larva natante, ha luogo una eliminazione di cromatina, e, in caso di eliminazione, si ristabilisce il numero diploide di cromosomi?

A proposito degli ibridi letali, Reverberi (1935) ⁽³⁾, nell'ibrido letale *Ciona* ♀ × *Phallusia* ♂ ha descritto una imponente eliminazione di cromatina all'inizio della gastrulazione. Ma i problemi sopra accennati hanno avuto una molto più ampia trattazione per altri gruppi animali, nei quali i risultati delle ibridazioni presentano molte analogie con quelli ottenuti nelle Ascidie. Si ricordano soprattutto le ricerche citologiche di Baltzer (1910) ⁽⁴⁾ e di Tennent (1912) ⁽⁵⁾ su Echinodermi; di Morris (1914) ⁽⁶⁾ su Teleostei; di Bataillon e Tchou (1929) ⁽⁷⁾ e di Tchou (1931) ⁽⁸⁾ su Anuri (cfr. la rassegna di Montalenti, 1938 ⁽⁹⁾); di Schönmann (1938) ⁽¹⁰⁾ su Urodeli. È perciò possibile fare degli utili raffronti.

Circa il corredo cromosomico delle Ascidie, si ritrovano nella letteratura solo alcuni dati relativi al numero di cromosomi di pochissime specie; non

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della Università di Palermo.

(**) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) G. REVERBERI, « Rend. Acc. Lincei », 17, 737 (1933).

(2) A. MINGANTI, « Nature » (London), 161, 643 (1948); « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 22, 293 (1950).

(3) G. REVERBERI, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 15, 175 (1935).

(4) F. BALTZER, « Arch. Zellforsch. », 5, 497 (1910).

(5) D. H. TENNENT, « J. Exp. Zool. », 12, 391 (1912).

(6) M. MORRIS, « J. Exp. Zool. », 16, 501 (1914).

(7) E. BATAILLON e TCHOU-SU, « Roux' Arch. », 115, 779 (1929).

(8) TCHOU-SU, « Arch. Anat. Micr. », 27, 1 (1931).

(9) G. MONTALENTI, « Attualità Zool. », 4, 157 (1938).

(10) W. SCHÖNMANN, « Roux' Arch. », 138, 345 (1938).

se n'è studiata la forma nè la costituzione, a causa della loro estrema piccolezza e scarsa colorabilità (cfr. Boveri, 1890⁽¹¹⁾). Abbiamo perciò dovuto colmare questa lacuna, almeno per le specie prese in esame nei nostri esperimenti di ibridazione. I metodi più adatti si sono dimostrati quelli di schiacciamento e colorazione conorceina acetica. La ricerca è stata condotta sull'uovo vergine maturo: com'è noto, a tale stadio i cromosomi si trovano nella prima metafase maturativa, e l'ulteriore svolgersi della meiosi sarà determinato dall'entrata dello spermio.

Il numero di cromosomi è risultato essere: $2n = 18$ in *Ciona intestinalis* (in accordo con il dato di Boveri, 1890⁽¹¹⁾) e *Ascidia mentula* (Hill, 1895⁽¹²⁾); $2n = 16$ in *Phallusia mamillata* (Boveri, 1890⁽¹¹⁾), *Ascidia malaca* e *Ascidiaella aspersa*. Nell'uovo vergine i cromosomi omologhi appaiono uniti in bivalenti, e la loro grandezza e forma sono abbastanza tipiche nelle singole specie: non solo le piastre metafasiche delle cinque specie nominate si distinguono agevolmente, ma in qualcuna di esse (per esempio *A. mentula*; *Phallusia m.*) vi sono delle coppie di cromosomi diverse dalle altre. Purtroppo i metodi di schiacciamento non hanno dato risultati altrettanto buoni negli stadi successivi alla fecondazione, e abbiamo dovuto ricorrere allo studio di sezioni, dove le differenze tra cromosomi non sono più tanto evidenti.

Nella presente Nota riferiamo i risultati relativi alla coppia di incroci tra *Phallusia* e *A. malaca*.

1. Le uova di *Phallusia*, fecondate con spermatozoi di *A. malaca*, si sviluppano nell'87 % dei casi, e il loro sviluppo si arresta costantemente all'inizio della gastrulazione (Minganti, 1950⁽²⁾). L'uovo, alla inseminazione, presenta le tipiche modificazioni di forma, emette i due globuli polari, e *in vivo* si possono seguire, grazie alla trasparenza dell'uovo, i processi di coniugazione dei pronuclei. Alla metafase della prima segmentazione il numero di cromosomi è 16. Dalla loro forma non è possibile distinguere cromosomi paterni e materni; ma che coesistano i due lotti cromosomici è indicato, oltre che dalle osservazioni *in vivo* su riferite, anche dal comportamento nucleare all'inizio della gastrulazione. A tale stadio, accanto a mitosi normali si osservano mitosi anomali, con fusione di cromosomi o con la formazione, all'anafase, di ponti cromatinici; in altri nuclei, di lato ai cromosomi metafasici si notano masse cromatiniche poste fuori del fuso, e verosimilmente in via di eliminazione; infine vi sono dei nuclei aploidi, con 8 cromosomi, che, almeno in qualche cellula, si comportano in modo normale, e che con ogni probabilità sono i materni: un carattere distintivo potrebbe essere dato dalla presenza di un cromosoma un po' più grande, che pare tipico di *Phallusia*. Non abbiamo fatto uno studio statistico della distribuzione di queste anomalie nucleari, ma pare che esse siano distribuite a caso in tutte le cellule del germe. Ne risulta che prima o poi tutte le cellule eliminano la metà dei cromosomi, vero-

(11) TH. BOVERI, « Jena, Ztschr. Nat. Wiss. », 24, 314 (1890).

(12) B. A. HILL, « Quart. J. Micr. Sci. », 38, 315 (1895).

similmente i paterni. In uno stadio ulteriore non si osservano più mitosi e tutti i nuclei appaiono picnotici. Gli ibridi letali, dopo molte ore di stasi allo stadio di gastrula incipiente, vanno in citolisi.

2. Dall'incrocio inverso del precedente, cioè *A. malaca* ♀ × *Phallusia* ♂ derivano, nel 68 % dei casi, larve natanti (Minganti, 1950⁽²⁾). Tali larve non solo hanno caratteri morfologici (quali la grandezza del corpo e la forma dei palpi) di tipo materno; ma anche il ritmo di sviluppo resta quello proprio dell'uovo, senza alcuna influenza da parte dello spermio. Infatti gli ibridi raggiungono lo stadio di larva natante nello stesso tempo dei controlli di *A. malaca*, quando i controlli di *Phallusia* sono appena larve incipienti, avvolte ancora dalle membrane.

Anche in questi ibridi si osserva la espulsione dei due globuli polari; non è stato possibile seguire la coniugazione dei pronuclei, a causa della relativa opacità dell'uovo. Comunque sia, i nuclei del germe in sviluppo presentano 16 cromosomi. Sorge la questione se questi siano la somma degli 8 materni e degli 8 paterni, o se invece la cromatina paterna sia stata eliminata molto precocemente e i cromosomi materni si siano duplicati per un processo di regolazione. Possiamo dire che lo studio citologico in nessun momento ci rivela una eliminazione di cromatina; inoltre la coesistenza di cromosomi di *Phallusia* ci sembra indicata anche in questo caso dalla presenza di un grosso cromosoma impari. Si hanno quindi indicazioni che si tratti di un vero ibrido e non di un falso ibrido diploide.

I presenti risultati saranno discussi quando sarà completato lo studio citologico degli altri ibridi di Ascidie.

Scienza dell'alimentazione. — *Azione della bile sull'assorbimento di emulsioni di olio di cocco in ansa alla Thiry Vella di cane normale e spancreato.* Nota di TULLIO MONTINI e SANDRO PONTREMOLI, presentata^(*) dal Socio U. LOMBROSO.

In un gruppo di precedenti ricerche^{(1) (2)} è stato studiato il comportamento di emulsioni di grasso (olio di cocco, olio di oliva) introdotte in ansa alla Vella di animali spancreati. Ricordiamo brevemente che negli animali spancreati i grassi introdotti nel segmento intestinale non vengono assorbiti o per essere più esatti la quantità di grasso recuperato corrisponde in peso a quello introdotto; mentre nel cane normale in un uguale periodo di tempo si ha una scomparsa di grasso pari al 40-45 % circa.

(*) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) L. ARRIGO e T. MONTINI, «S.I.P.S.» in corso di stampa, Lucca 1950.

(2) U. LOMBROSO, L. ARRIGO, T. MONTINI, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», 27, 620 (1951).

Parallelamente ricerche condotte sulle costanti chimiche del materiale grasso recuperato dall'ansa alla Vella di cane normale avevano rivelato un processo di deidrogenazione sulla catena degli acidi grassi, fenomeno questo che si esaltava ulteriormente se lo stesso materiale veniva incubato, in termostato a 37° C. Nell'animale spancreato al mancato assorbimento si associava costantemente una scomparsa di tale attività enzimatica ⁽³⁾. Risultati analoghi sono stati da noi osservati nell'assorbimento di emulsioni di grasso per via peritoneale da parte di animali parzialmente spancreati o florizinati ⁽³⁾ ⁽⁴⁾ e più recentemente nell'ansa alla Vella di cani scapsulati ⁽⁵⁾.

In numerose indagini, rivolte precisamente a controllare se particolari sostanze potessero ripristinare la capacità da parte dell'ansa intestinale estrinsecata di cane spancreato ad assorbire i grassi sono stati controllati vari materiali (tripsina, lipocaic, metionina, colina, pancreas crudo, ecc.), su parte dei quali abbiamo riferito o riferiremo in seguito ⁽⁶⁾.

Il fenomeno più interessante, emerso da tali ricerche, era che alcune di queste sostanze, quali ad esempio il pancreas crudo, si dimostrarono capaci di ripristinare l'assorbimento, ciò che avveniva però in misura diversa, a seconda del materiale impiegato. Col ripristino dell'assorbimento si ristabiliva pure l'attività enzimatica deidrogenante gli acidi grassi con modalità identiche a quelle osservate nell'animale normale. Analogamente nei cani scapsulati il ripristino dell'assorbimento in ansa alla Vella, dopo somministrazione di acetato di desossicorticosterone, procedeva in parallelo con la ripresa di questa attività enzimatica ⁽⁵⁾.

Dobbiamo senz'altro escludere per quanto riguarda le sostanze da noi sperimentate, e che avevano condotto ad un ripristino dell'assorbimento un'azione diretta deidrogenante sui grassi. Infatti esse erano somministrate per via orale e quindi non a diretto contatto con l'emulsione dei lipidi introdotti nell'ansa alla Vella, nel segmento cioè dell'intestino separato dal tubo digerente. Si poteva dunque prospettare l'ipotesi che il ripristino dell'attività enzimatica potesse dipendere da un intervento indiretto, ad un'influenza cioè che esse esercitavano sul succo enterico che appunto riacquistava le sue proprietà deidrogenanti.

Questi risultati ci hanno suggerito di indagare, in cani spancreati, la azione svolta dalla bile introdotta nell'ansa alla Vella in aggiunta alla emulsione di grasso.

Volevamo controllare, data l'interdipendenza da noi osservata tra assorbimento dei grassi e modificazione del loro grado di insaturazione, se la bile contenendo una deidrogenasi degli acidi grassi superiori (Quagliariello ⁽⁷⁾) modificasse l'assorbimento dei lipidi in ansa alla Vella di cane spancreato.

(3) U. LOMBRoso e S. PONTREMOLI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 26, 1122 (1950).

(4) U. LOMBRoso e S. PONTREMOLI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 26, 1475 (1950).

(5) T. MONTINI e S. PONTREMOLI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 27, 704 (1951).

(6) L. ARRIGO e T. MONTINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » in stampa.

(7) G. QUAGLIARIELLO, « Atti Acc. Naz. Lincei », 16, 387, 552 (1932).

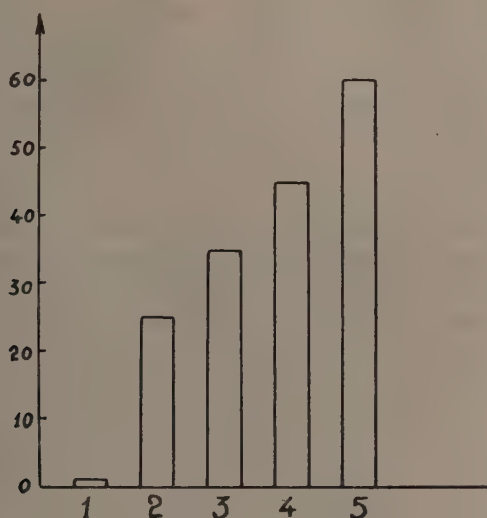


Fig. 1.

- 1 = cane spancreato;
 2 = cane spancreato con somministrazione orale di pancreas crudo;
 3 = cane spancreato con aggiunta bile all'emulsione grasso;
 4 = cane normale;
 5 = cane normale con aggiunta bile all'emulsione grasso.

TABELLA I.

Azione della bile sull'assorbimento di emulsioni di olio di cocco in ansa alla Vella di cane normale e spancreato.

	Materiale introdotto	N. assorb.	Grasso introdotto mg	Grasso ricuperato mg	Assorbim. %
Cani normali (4) . . .	Emulsione	18	950	523	45
Cani normali (4) . . .	Emulsione + bile	20	980	392	60
Cani normali (2) (1) . .	Emulsione	10	930	698	25
Cani normali (2) (1) . .	Emulsione + bile	14	950	494	48
Cani spancreti (5) . . .	Emulsione	14	985	980	0
Cani spancreti (5) . . .	Emulsione + bile	10	926	602	35
Cani spancreati con somministrazione orale di pancreas crudo (4) . .	Emulsione	12	934	716	25

(1) Cani normali il cui segmento intestinale dimostrava una minore capacità ad assorbire l'emulsione di grasso.

CONDIZIONI SPERIMENTALI. - Cani di ambo i sessi del peso medio di kg. 8-10 venivano operati di estrinsecazione alla Thiry Vella di un tratto di ansa ileale (della lunghezza di cm. 30-40 circa), scelta convenzionalmente distante circa cm. 50-70 dalla valvola ileo-cecale. Trascorso il periodo necessario alla guarigione chirurgica, si saggiava la capacità da parte del segmento intestinale isolato ad assorbire il grasso introdotto sotto forma di finissima emulsione.

Si operava quindi l'animale di pancreasectomia totale di modo che ogni gruppo di ricerche veniva condotto sullo stesso animale.

Tecnica eseguita: 5 cc di un'emulsione di olio di cocco al 20 % (pari in peso ad una quantità di grasso di 900 mg. circa) venivano introdotti nel segmento intestinale, previo lavaggio ripetuto dell'ansa con soluzione fisiologica tiepida. Trascorso un periodo di tempo pari a 30 minuti primi (tempo standard) si lavava nuovamente l'ansa con soluzione fisiologica tiepida, il materiale recuperato veniva utilizzato per i vari dosaggi ⁽⁸⁾.

L'aggiunta di bile freschissima di bove all'emulsione di olio di cocco veniva operata (in parti uguali: 5 cc di emulsione + 5 cc di bile) prima dell'introduzione del materiale nel segmento intestinale.

Il numero di jodio dei lipidi ottenuti mediante estrazione alcoolica bollente veniva eseguito secondo il metodo di Chargaff da noi usato in precedenti ricerche ⁽⁹⁾.

Alcune esperienze sono state condotte, come risulta dalla tabella I, anche in animali normali, il cui segmento intestinale estrinsecato dimostrava una minore capacità ad assorbire i grassi.

Il fenomeno che appare di particolare importanza è che la bile oltreché esaltare l'assorbimento del grasso neutro da parte dell'ansa alla Vella dell'animale normale, lo ripristina anche in animali spancreati conducendolo a delle cifre elevate, per quanto non uguali a quelle riscontrabili nel cane normale.

Questo risultato è apparentemente in contraddizione con il dato di fatto che la somministrazione di grasso per via orale in un cane spancreato è seguita da una stearrea pari in peso al materiale lipidico somministrato, benchè come nell'animale normale la bile si riversi nel lume intestinale a contatto quindi del grasso stesso ⁽¹⁰⁾.

Questo diverso comportamento da noi ottenuto sperimentando nell'ansa alla Vella o nell'animale *in toto* potrebbe trovare una spiegazione nel dato da noi osservato che l'emuntorio intestinale rappresenta per i cani spancreati la via di eliminazione del materiale lipidico. Questo fenomeno,

(8) Ogni qualvolta si allestiva una esperienza, si prelevava una quantità perfettamente corrispondente a quella introdotta nel segmento intestinale e la si sottoponeva direttamente ad estrazione in alcool bollente. Ai valori così ottenuti venivano paragonati di volta in volta, sia quantitativamente, sia come numero di jodio, quelli ottenuti sul materiale recuperato dopo lavaggio dall'ansa intestinale.

(9) T. MONTINI e S. PONTREMOLI, «S.I.P.S.» in stampa, Lucca 1950.

(10) U. LOMBROSO, U. DACHA, O. ROSSI, «Boll. Soc. It. Sper.», 25, 759 (1949).

riscontrabile anche in condizioni normali, è infatti particolarmente esaltato in assenza di pancreas ⁽¹¹⁾.

A conferma di questo ricordiamo come la perfusione di emulsioni di grasso nel cane spancreato è seguita da una stearra pari in peso al grasso somministrato per via orale, aumentato di quello introdotto per via endovenosa ⁽¹²⁾.

Considerando quindi l'emuntorio intestinale come un sistema, che al pari di quello renale, permette all'organismo di eliminare il materiale non utilizzabile, si potrebbe pensare che nell'animale spancreato l'assorbimento del grasso può essere più o meno conservato, ma in questo caso mascherato dal fenomeno della sua espulsione da parte dell'emuntorio intestinale.

TABELLA II.

Azione della bile sul comportamento del numero di jodio dei lipidi introdotti in ansa alla Vella.

	Materiale introdotto	Assorb. ‰	Valori nel n. di jodio		
			dopo 30' in ansa	24 h incu- bazione 37°	48 h incu- bazione 37°
Cani normali (4) . . .	Emulsione (media 18 assorb.)	45	18	28	48
Cani normali (4) . . .	Emulsione + bile (media 20 assorb.)	60	20	28	39
Cani spancreati (5) . .	Emulsione (media 14 assorb.)	0	9	9	10
Cani spancreati (5) . .	Emulsione + bile (media 10 assorb.)	35	12	21	27
Cani spancreati con som- ministrazione orale di pancreas crudo(5) . .	Emulsione (media 12 assorb.)	25	17	25	30

Il numero di jodio di controllo dell'emulsione, eseguito per ogni esperienza ha sempre dimostrato nei campioni, con o senza aggiunta di bile, valori di ± 1 .

Per quanto riguarda poi il meccanesimo d'azione con il quale la bile interviene nell'assorbimento dei lipidi nell'ansa intestinale di cane spancreato riferiamo che nelle nostre esperienze il ripristino dell'assorbimento dell'emulsione di olio di cocco si accompagna ad una ripresa dei processi

(11) L. ARRIGO e T. MONTINI, «ATHENA», 6, 155 (1951).

(12) U. LOMBROSO e U. DACHA, «Bol. Soc. It. Biol. Sper.», 25, 1277 (1949).

deidrogenativi sul materiale introdotto. Questo fenomeno, come già abbiamo ricordato scomparire nel cane spancreato in parallelo con il potere di assorbimento dell'ansa alla Vella.

Nelle presenti ricerche, abbiamo cioè osservato che, come nell'animale normale, il punto di iodio dei grassi recuperati dopo lavaggio del segmento intestinale è aumentato e che tale fenomeno si evidenzia quando lo stesso materiale viene incubato a 37°C (ved. Tabella II).

È interessante avvertire, per quanto su questo preciso quesito le ricerche siano appena iniziate, che la bile di cane spancreato non manifesta alcun potere deidrogenante, quando incubata con emulsioni di olio di cocco *in vitro* (esperienze eseguite con la bile di tre spancreati).

Ci riserviamo comunque di riferire su queste indagini quanto avremo potuto ampliarne i controlli.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Anziano G. Levi è lieto d'informare i Colleghi delle migliorate condizioni di salute del Senatore Castelnuovo e, interpretando gli unanimi sentimenti della Classe, formula il fervido voto augurale che la prossima adunanza possa essere da lui presieduta.

Il Presidente informa quindi i Colleghi che il Socio E. Amaldi ha richiesto all'Accademia un contributo alle spese per la spedizione in India per ricerche sulla radiazione cosmica, organizzata dall'Istituto di Fisica dell'Università di Roma in collaborazione con il Centro di Studio per la Fisica Nucleare del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Il Segretario Accademico comunica che la citata richiesta è stata già esaminata favorevolmente, in linea di massima, dal Consiglio di Presidenza il quale ha ritenuto però opportuno deferirla alla Classe per le decisioni del caso.

La Classe delibera che, sui fondi a disposizione, sia stanziato un contributo a favore della predetta spedizione.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta quindi un plico suggellato consegnato all'Accademia dal sig. Nicola Rollo dal titolo: « Il principio metafisico noumenico e trascendente del Motore Immobile realizzato fisicamente nella contingenza fenomenica ». La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia conservato nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

Il Socio Vernoni comunica il giudizio della Commissione per l'esame del lavoro del dott. Antonio M. Stella dal titolo: « Trattamento medico complementare della chirurgia e fisioterapia del cancro », contenuto nel

plico suggellato, aperto su richiesta dell'interessato, nella seduta dell'8 dicembre 1951.

La Classe approva le conclusioni formulate dalla Commissione secondo le quali il citato lavoro non può essere preso in considerazione dall'Accademia.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che è uscito il fascicolo n. 6 (dicembre 1951) dei Rendiconti Fisici.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente dà la parola al Socio Vercelli che offre in omaggio il suo volume dal titolo: « Il Mare – I Laghi – I Ghiacciai », facendo rilevare che l'opera prende in considerazione soltanto i grandi ammassi delle acque, poichè gli argomenti collaterali, i fenomeni atmosferici, le reti fluviali e le questioni geografiche sono già ampiamente illustrati in altri volumi della stessa Casa Editrice U.T.E.T. Dopo aver ricordato che sul mare, i laghi e i ghiacciai non vi sono finora in Italia altre opere sintetiche, condotte con rigore scientifico, il Socio Vercelli fa notare che la trattazione ha forma elementare poichè il volume persegue fini divulgativi e confida che, come già avvenne per l'opera gemella « L'Aria », anche la presente possa incontrare il favore del pubblico.

Il Socio Semerano presenta il primo dei tre volumi contenenti gli Atti del 1° Congresso Internazionale di Polarografia, svoltosi a Praga dal 4 all'8 agosto 1951, mettendo in evidenza che nel volume stesso sono pubblicate, nelle principali lingue, le comunicazioni di studiosi che non furono presentate al Congresso, ma inviate, quali contributi scientifici, per essere pubblicate in onore del prof. Heyrovsky fondatore della Polarografia, nonchè le comunicazioni svolte al Congresso stesso in lingua russa e nelle lingue occidentali.

Presenta inoltre il supplemento n. 4, a cura della dott.ssa Elena Gagliardo, della Bibliografia Polarografica.

Il Presidente ringrazia i Colleghi che hanno offerto e presentato le pubblicazioni sopra ricordate.

Il Presidente presenta quindi le pubblicazioni ricevute in omaggio, mettendo in particolare evidenza il volume « Elementi di mineralogia » del Socio Gallitelli, una pubblicazione del Socio Almagià sull'Istituto di Geografia dell'Università di Roma, in occasione del 75° anniversario dell'Istituto stesso, un opuscolo contenente una relazione dal titolo « Problèmes d'ensemble » svolta dal dott. Luigi Morandi nel II° « Congrès Mondial des Engrais Chimiques », tenuto a Roma nell'ottobre 1951 e un volume della Rockefeller Foundation dal titolo: « Directory of Fellowship Awards » (For the Years 1917-1950).

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio Chiarugi presenta (a nome del Collega Cappelletti) due Memorie dello stesso prof. Cappelletti, rispettivamente dal titolo: « Ricerche quantitative sulla fertilità del *Lilium candidum* L. in relazione all'azione del cemento pollinico » e « Funzioni armoniche nella impollinazione di *Lilium candidum* L. ».

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Carobbi, Tonzig, Cotronei, Zagar, Sansone, Carrelli, Vallauri, Segre, Cambi, Tonolo e Picone (a nome del Collega Caccioppoli).

Il prof. Picone presenta la seconda parte della Memoria di U. Wegner, alla quale seguirà prossimamente la terza.

Il Socio Cassinis propone che l'esame della seconda e, a suo tempo, della terza parte, siano affidate alla stessa Commissione che si è occupata della prima e che possibilmente si stampi la Memoria completa.

Il Socio U. Amaldi fa notare che la stampa delle varie parti separate sembra necessaria per ragioni d'indole finanziaria, in modo da poter distribuire la spesa sui vari esercizi.

Il Socio Armellini osserva che la Classe è competente a deliberare sul valore scientifico dei lavori e che l'organo qualificato a decidere sulla spesa è il Consiglio di Presidenza. Si associa pertanto alla proposta del Collega Cassinis per quanto concerne l'esame delle varie parti della Memoria ad opera di un'unica Commissione, con l'intesa che il Consiglio di Presidenza prenderà le deliberazioni che riterrà più opportune in merito alla stampa della Memoria stessa, in relazione alle disponibilità finanziarie.

La Classe approva quanto sopra, deferendo pertanto l'esame della seconda e terza parte della Memoria sopra ricordata ai Soci Picone e U. Amaldi.

Il Segretario Accademico legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CACCIOPPOLI R. - Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati. Nota II.

MAJORANA Q. - Nuove considerazioni cinematiche sulla relatività speciale.

BAFFONI G. M. - La rigenerazione della coda e gli effetti reattivi delle cellule di Mauthner in anfibii anuri ed urodeli (pres. dal Socio G. COTRONEI).

BAIADA E. - L'equazione $p = f(x, y, z, q)$ e l'unicità (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

CAFIERO F. - Sulle famiglie di funzioni additive d'insieme, uniformemente continue (pres. dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI).

CENNAMO F. - Diffrazione di raggi X nella naftalina allo stato solido ed allo stato liquido (pres. dal Socio A. CARRELLI).

CONTI R. — Sul problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma $z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(i)})$. Nota II (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

LEONE V. — Effetti di trattamento con urea su espianti ventrali di gastrule di rana esculenta L. (pres. dal Socio S. TONZIG).

ORTOLANI G. — Risultati sulla distribuzione dei territori presuntivi degli organi nel germe di ascidie allo stadio ottavo — determinati con le marche al carbone (pres. dal Socio G. COTRONEI).

VOLPATO M. — Sulla derivazione sotto il segno di integrale (pres. dal Corrisp. A. TONOLO).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Picone, anche a nome del Collega U. Amaldi, legge la relazione sulla prima parte della Memoria di U. Wegner dal titolo: « Contributi alla teoria dei procedimenti iterativi per la soluzione dei sistemi di equazioni lineari ». Detta relazione, che conclude proponendo la pubblicazione del lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti e approvata dalla Classe.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 12 gennaio 1952

ALMAGIÀ Roberto. — *L'Istituto di Geografia dell'Università di Roma*. Roma, Tip. del Senato, 1951. Pp. 19, in-8°

BARNARD Chester I. — Vedi: THE ROCKFELLER FOUNDATION.

THE COMMITTEE OF THE FIRST INTERNATIONAL POLAROGRAPHIC CONGRESS IN PRAGUE. — *Proceedings*. Prague, 1951. Pp. 865 in-8°, con figg.

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE CENTRO DI STUDIO PER LA POLAROGRAFIA. — *Bibliografia Polarografica* (1922-1951). P. I. *Elenco dei Quadri e indice degli Autori*. Suppl. n. 4 a « La Ricerca Scientifica », a. XXI, 1951.

DYŻEWSKI Aleksander. — *Doktryna pracy równomiernej w realizacji budowlanej*. Warszawa, Polskie Wydawnictwa Gospodarcze, 1949. Pp. 22, in-4°, con tavv.

FATTOVICH Giovanni. — *I problemi medico-sociali della psichiatria*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1951. Pp. 80, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, 14).

GALLITELLI Paolo. — *Elementi di mineralogia*. Pisa, Nistri-Leschi, 1951. Pp. XVI-574, in-8°.

GIACALONE Antonino. — *Calore di reazione e temperatura*. Catania, Tip. Zuccarello & Izzi, 1951. Pp. VIII-110, in-8°.

MORANDI Luigi. — *Problèmes d'ensemble*. Rapport général présenté au II^{me} Congrès Mondial des engrais chimiques. Rome, 1951. Pp. 16, in-8°.

PEROTTI Renato. — *Torniamo in principio al Vitalismo in applicazione all'Umismo*. Divagazioni di un vecchio biologo. « Memorie dell'Istituto di Patologia Vegetale e di Microbiologia Agraria e Tecnica dell'Università degli Studi di Pisa », n. 240.

RICCI Giovanni. — *La Relatività tramonta. Gravitazione: mistero svelato. Spazismo*. Reggio Emilia, Movini, 1951. Pp. 62 in-8°.

THE ROCKEFELLER FOUNDATION. — *Directory of Fellowship Awards*. For the

- Years 1917-1950. With an Introduction by Chester I. Barnard. New York, 1951.
- RUCKI Rafael. — *Zasady i Metoda projektowania mechanizacji budowy*. Warszawa, Instytut Techniki Budowlanej, 1951. Pp. VIII, 130, in-8°.
- SCHEIBERT Peter. — *Lage und Erfordernisse der westdeutschen wissenschaftlichen Bibliotheken*. Godesberg, Rotgemeinschaft, 1951. Pp. 29, in-8°.
- VERCELLI Francesco. — *Il mare, i laghi, i ghiacciai*. Torino, UTET, 1951. Pp. xv, 622, in-8°, con figg. e tavv.

D. DE BLASI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 febbraio 1952

Presiede il Socio anziano G. LEVI

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati.* Nota (*) II del Corrisp. RENATO CACCIOPOLI.

12. La precedente teoria si estende naturalmente a spazî ad n dimensioni ed insiemi $(n - 1)$ -dimensionalmente orientati. In particolare nel piano si definiscono gli insiemi *linearmente orientati*: un dominio D di classe Ω ha frontiera di misura piana nulla ed è approssimabile in media con poligoni a contorni di lunghezze equilimitate; la funzione $\varphi(I, D)$ misura la *lunghezza relativa* della proiezione su una retta orientata r di IC, C essendo il contorno orientato di D ; le funzioni φ_1, φ_2 relative agli assi x, y , ed il vettore $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2]$ danno con le loro variazioni totali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ le *lunghezze assolute* delle proiezioni e la *lunghezza o misura 1-dimensionale* dell'insieme orientato; le derivate $d\varphi_1/d\lambda, d\varphi_2/d\lambda$, coseni direttori dell'*asse tangente*, definiscono (quasi ovunque) l'*elemento lineare*; ecc.

13. Torniamo agli insiemi superficialmente orientati $S = IF$ dello spazio. Indichiamo in generale con $\mu(S)$ la misura della proiezione ortogonale di $\|S\|$ su un piano π : μ è una funzione non negativa sub-additiva di S su F (o di $\|S\|$, o di I). La disuguaglianza

$$(8) \quad |\varphi(S)| = |\varphi(IF)| = |\varphi(I, D)| \leq \mu(S),$$

φ essendo relativa al piano π , è ovvia se F è poliedrica, e quindi sussiste in generale per continuità. Altrettanto dicasi nel caso del piano, con μ misura della proiezione su una retta.

(*) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1952.

Sia ora D un dominio di classe Ω , e indichiamone con $D_1^{(\xi)}, D_2^{(\eta)}, D_3^{(\zeta)}$ i domini di sezione, cioè gli involucri delle sezioni di ∂D , con i piani $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$; quasi tutti questi domini piani saranno di classe Ω , perchè una successione poliedrica approssimante $\{\Pi_n\}$ può supporre convergente in media in quasi tutte le sezioni (n. 4), con minimo limite finito per le lunghezze delle sezioni delle superficie Σ_n .

Siano $S_1^{(x)}, S_2^{(y)}, S_3^{(z)}$ le sezioni, quasi tutte linearmente orientate, di $S = IF$,

$$\varphi_{12}^{(y)}, \varphi_{13}^{(z)}; \quad \varphi_{23}^{(z)}, \varphi_{21}^{(x)}; \quad \varphi_{31}^{(x)}, \varphi_{32}^{(y)}$$

le corrispondenti coppie di funzioni additive relative agli assi $y, z; z, x; x, y$, e $\lambda_{12}^{(x)}, \lambda_{13}^{(x)}$, ecc. le relative variazioni totali. Sussistono le *formole di riduzione*

$$(9) \quad \varphi_1 = \int \varphi_{23}^{(y)} dy = \int \varphi_{32}^{(z)} dz; \quad \varphi_2 = \int \varphi_{31}^{(z)} dz = \int \varphi_{13}^{(x)} dx; \quad \varphi_3 = \int \varphi_{12}^{(x)} dx = \int \varphi_{21}^{(y)} dy,$$

$$(10) \quad \sigma_1 = \int \lambda_{23}^{(y)} dy = \int \lambda_{32}^{(z)} dz; \quad \sigma_2 = \int \lambda_{31}^{(z)} dz = \int \lambda_{13}^{(x)} dx; \quad \sigma_3 = \int \lambda_{12}^{(x)} dx = \int \lambda_{21}^{(y)} dy,$$

le integrazioni essendo estese agli intervalli $(-\infty, \infty)$.

Dimostriamo per esempio la prima delle (9): essa è elementare per i poliedri di una successione approssimante $\{\Pi_n\}$, e si tratta di passare al limite per $n \rightarrow \infty$. Basta supporre S della forma RF , R essendo un dominio rettangolare: $x_1 \leq x \leq x_2, a \leq y \leq b, c \leq z \leq d$. Poniamo per semplicità $\varphi_{23}^{(y)}(R, \Pi_n) = f_n(y; x_1, x_2)$, ed osserviamo che $|f_m - f_n|$ non supera la somma delle lunghezze delle intersezioni delle parallele all'asse z , di tracce (x_1, y) e (x_2, y) , con la differenza $(\Pi_m - \Pi_n \Pi_n) + (\Pi_n - \Pi_m \Pi_n)$. Il volume di questa differenza tende a zero per $m, n \rightarrow \infty$, sicchè la successione $\{f_n(y; x_1, x_2)\}$ converge in media, nelle tre variabili, e però anche quasi ovunque, ove si passi ad un'opportuna successione estratta. Ne segue che nella formola considerata è lecito il passaggio da Π_n a D per quasi tutti i valori di x_1 e x_2 , convergendo l'integrando per quasi tutti i valori di y , ed essendo d'altra parte questo integrando uniformemente limitato (da $d - c$, come dalla (8) nel caso del piano).

Dalle (9) stabilite per quasi tutti gli insiemi $S = RF$ si passa subito al caso generale, ed alle (10) relative alle variazioni totali.

14. Consideriamo ora su F l'insieme $S = IF$ variabile con I , e siano $V(S)$ la variazione totale della funzione $\varphi(S)$ relativa ad un piano π , $\mu(S)$ la funzione sub-additiva dianzi definita: dimostreremo che $V(S)$ è assolutamente continua rispetto a $\mu(S)$, cioè che $V(S) \rightarrow 0$ per $\mu(S) \rightarrow 0$.

Dell'insieme $\|S\|$, che possiamo supporre chiuso, sia per esempio Z la proiezione sul piano $\pi \equiv xy$. Se $\mu(S) < \varepsilon$, possiamo ricoprire Z mediante un numero finito di domini rettangolari (piani) aventi lati piccoli a piacere ed area complessiva $< \varepsilon$. $\|S\|$ si lascia racchiudere in domini rettangolari

R_1, R_2, \dots aventi rispetto a z altezze $< \sqrt{\varepsilon}$, e sul piano xy proiezioni la somma delle cui aree sia $< N \sqrt{\varepsilon}$, con N numero fisso; ne segue, per la (8),

$$\sum_k |\varphi_3(R_k, D)| < N \sqrt{\varepsilon}.$$

Ora in generale la somma a primo membro risulta arbitrariamente prossima a $\sigma_3(\Sigma R_k, D)$ non appena siano sufficientemente piccoli i dominî R_k : quindi per $\varepsilon \rightarrow 0$ tende a zero $\sigma_3(\Sigma R_k, D)$, ed a maggior ragione $\sigma_3(S)$.

Se ne trae, indicando con μ_1, μ_2, μ_3 le funzioni μ relative ai tre piani coordinati, ed osservando che $\sigma \leq \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, che l'area σ è assolutamente continua rispetto a $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, e però che *l'area di S è nulla quando il sostegno $\|S\|$ ha proiezioni di misura nulla.*

Questi risultati, e quelli del numero precedente espressi dalle (8), (9), (10), si estendono a tutti gli insiemi della classe $\{S\}$ (n. 10). Beninteso, l'assoluta continuità di $V(S)$ rispetto a $\mu(S)$ va intesa al variare di S sopra un insieme orientato fisso S_0 .

Risultati analoghi sussistono naturalmente nel piano ed a quantesivogliano dimensioni.

15. Passiamo ora agli *insiemi linearmente orientati*, o *insiemi di elementi lineari raccordati*, nello spazio.

Un caso particolare è ovvio, quello di un insieme K contenuto in un piano *orientato* π dello spazio, per esempio come porzione della frontiera di un dominio di questo piano⁽¹⁾: proiettando π sui tre piani coordinati, si ottengono da K tre insiemi linearmente orientati, le cui funzioni φ relative alle coppie di assi forniscono le tre funzioni $\varphi_1(K)$, $\varphi_2(K)$, $\varphi_3(K)$ relative agli assi x, y, z . Di qui si passa poi al caso di un insieme somma di un numero finito di insiemi K contenuti in piani diversi.

La teoria degli insiemi piani, accennata nel n. 12, si estende così immediatamente alla superficie orientata Σ di un poliedro Π . Le considerazioni del n. 3 vanno ripetute definendo i dominî ed i loro interni *su* Σ . La convergenza in media (n. 4) si definisce con riguardo all'area su Σ , e delle sezioni di un dominio si considerano le misure (lunghezze) sulle poligonali sezioni di Σ . Dal contorno orientato Γ di un dominio Δ di classe Ω su F risulta definita, in corrispondenza di ogni retta orientata r , la funzione, additiva in I ,

$$\varphi(I\Gamma) = \varphi(I, \Delta)$$

che misura la *lunghezza relativa* della proiezione di $I\Gamma$ su r ; agli assi coordinati x, y, z corrisponderanno tre funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, e si avrà

$$\varphi = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3,$$

α, β, γ , essendo i coseni direttori di r . In particolare $\varphi(\Gamma) = 0$.

(1) L'orientazione è determinata da quella delle frontiere dei dominî regolari, definita dal verso della terna costituita da normale interna, tangente ed asse normale al piano.

16. Siano ora D un dominio spaziale di classe Ω , F la sua frontiera. Su F si lasciano definire, come dianzi sulla superficie Σ del poliedro Π , i *domini superficiali* T ed i loro tipi di convergenza. La convergenza in media,

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty}^* T_n,$$

definita rispetto all'area su F , implicherà per una successione estratta, analogamente a quanto avviene per gli ordinari domini piani o spaziali, lo stesso tipo di convergenza in quasi tutte le sezioni (che sono insiemi linearmente orientati); ciò segue dalle formole di riduzione (10).

Consideriamo un poliedro Π , le facce della cui superficie Σ seghino $\mathfrak{F}D$ in insiemi di misura nulla, le relative sezioni di D essendo di classe Ω (v. n. 13); e siano Δ e P i domini superficiali $D \cdot \Sigma$ e $\Pi \cdot F$, su Σ e su F rispettivamente ⁽²⁾. P può dirsi un *poligono superficiale su F* : il suo contorno orientato Γ (*poligonale su F*) si definisce ponendo $\Gamma = -\Gamma'$, dove Γ' è il contorno di Δ su Σ ; cioè

$$\varphi(\Gamma) = \varphi(I, P) = -\varphi(\Gamma') = -\varphi(I, \Delta).$$

Dopo ciò, gli sviluppi analoghi a quelli dei nn. 6 e 7 non presentano difficoltà. Un dominio T su F , a frontiera di area nulla, si dirà *di classe Ω* se suscettibile di approssimazione in media con poligoni a contorni di lunghezze equilimate; se

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty}^* P_n,$$

si avrà, per il contorno orientato C di T ,

$$\varphi(C) = \varphi(IC) = \varphi(I, T) = \lim_{n \rightarrow \infty}^* \varphi(I, P_n);$$

e la proprietà di continuità consisterà in ciò che

$$(11) \quad \varphi(I, T) = \lim_{n \rightarrow \infty}^* \varphi(I, T_n)$$

sempre che T_n tenda in media a T , le variazioni totali delle funzioni $\varphi(I, T_n)$ conservandosi equilimate.

Anche le considerazioni più generali del n. 8 si estendono, introducendo la classe Ω' di insiemi aperti su F .

La precedente relazione fra D e il poliedro Π , che ci ha condotto alla posizione $\Gamma = -\Gamma'$, rientra in altra più generale. Se F e F' sono le frontiere orientate di D e D' , e i domini superficiali $T = D' \cdot F$ e $T' = D \cdot F'$ sono di classe Ω (su F e F' rispettivamente), per i contorni orientati C e C' di T e T' si ha $C = -C'$; T e T' risultando domini complementari di classe Ω sulla frontiera orientata di $D \cdot D'$.

(2) Precisamente, gli *involucri* di $(\mathfrak{F}D) \Sigma$, $(\mathfrak{F}\Pi) F$.

17. L'insieme $L = IC$ è un insieme *linearmente orientato*, individuato non dal solo sostegno $\|L\|$, ma da questo e dal dominio superficiale T ; l'*opposto* (ossia di *verso* opposto) — L se ne ottiene cambiando T nel complementare $@T$ su F . Se $\varphi_1(L)$, $\varphi_2(L)$, $\varphi_3(L)$ sono le funzioni φ relative agli assi, di variazioni totali $\lambda_1(L)$, $\lambda_2(L)$, $\lambda_3(L)$, e Φ è il vettore $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$, la variazione totale di Φ ,

$$\lambda(L) = \lambda(IC) = \int_I |d\Phi| = \int_I \sqrt{d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + d\varphi_3^2} \left(= \int_I \sqrt{d\lambda_1^2 + d\lambda_2^2 + d\lambda_3^2} \right)$$

dà la *lunghezza*, o *misura 1-dimensionale*, di L .

Le derivate

$$\frac{d\varphi_1}{d\lambda} = \alpha \quad , \quad \frac{d\varphi_2}{d\lambda} = \beta \quad , \quad \frac{d\varphi_3}{d\lambda} = \gamma$$

sono i coseni direttori dell'*asse tangente* τ , definito *quasi ovunque* su C (cioè a prescindere da un insieme di lunghezza nulla). Mediante somme di insiemi L del tipo IC si definiscono i più generali insiemi linearmente orientati, e si individua la più generale classe $\{L\}$ degli insiemi di lunghezza finita ⁽³⁾. V'ha anche luogo, sempre in analogia con le considerazioni fatte al n. 10, a considerare somme *assolute*, definite dalle successioni $\{\varphi_i(1L^{(n)})\}$ delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ relative agli insiemi $L^{(n)}$.

Al risultato del n. 14 corrisponde quello dell'*assoluta continuità* di $\lambda_i(L)$ rispetto a $\mu_i(L)$, al variare di L su un dato L_0 ; μ_1, μ_2, μ_3 essendo le misure delle proiezioni di $\|L\|$ sugli assi. Quindi è di *lunghezza nulla un insieme L il cui sostegno abbia proiezioni di misura nulla*.

18. A questo punto possiamo ritenere acquisite le nozioni di *integrali estesi ad insiemi linearmente o superficialmente orientati*, come generalizzazioni degli ordinari integrali curvilinei o di superficie,

$$(12) \quad \int_S f(x, y, z) d\sigma \quad , \quad \int_L f(x, y, z) d\lambda;$$

gli integrali di forme differenziali si definiranno ponendo

$$(13) \quad \int_S [a(x, y, z) dy dz + b(x, y, z) dz dx + c(x, y, z) dx dy] = \\ = \int_S [a d\varphi_1 + b d\varphi_2 + c d\varphi_3] = \int_S [a \cos(\nu, x) + b \cos(\nu, y) + c \cos(\nu, z)] d\sigma$$

(3) La considerazione separata dei tre assi conduce alle classi $\{H_i\}$ di insiemi *parzialmente orientati* analoghe alle classi $\{U_i\}$ di insiemi superficiali (n. 10, nota (15)). Gli insiemi per esempio di $\{H_1\}$ si costruiscono a partire da contorni di domini su frontiere delle classi $\{U_2\}$ e $\{U_3\}$.

$$(14) \quad \int_L [a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz] = \\ = \int_L [a d\varphi_1 + b d\varphi_2 + c d\varphi_3] = \int_L [a \cos(\tau, x) + b \cos(\tau, y) + c \cos(\tau, z)] d\lambda$$

indicando nella (13) ν l'asse normale, nella (14) τ l'asse tangente.

Una funzione $f(x, y, z)$ si dirà *superficialmente sommabile* o *2-sommabile* se il primo integrale (12) esiste finito per ogni insieme di $\{S\}$; *linearmente sommabile* o *1-sommabile* se è finito per ogni insieme di $\{L\}$ il secondo integrale (12).

L'esistenza dell'integrale (13) implica poi soltanto, per i coefficienti a, b, c della forma integranda la sommabilità *rispetto ai piani* (giaciture) yz, xz, xy rispettivamente; e analogamente dai coefficienti a, b, c dell'integrando in (14) si richiede la sommabilità *rispetto agli assi* (direzioni) x, y, z (4).

19. Si vede facilmente che il primo integrale (12) $\left(0, \text{cioè che è lo stesso,} \int_S |f| d\sigma\right)$ è una funzione additiva di S assolutamente continua rispetto a σ , o come diremo σ -assolutamente continua.

Invero sia $\{\varepsilon_n\}$ una successione decrescente infinitesima di numeri positivi: se l'integrale non fosse σ -assolutamente continuo, esisterebbero un numero $\eta > 0$ ed una successione $\{S_n\}$ tali che

$$\sigma(S_n) < \varepsilon_n \quad , \quad \int_{S_n} |f| d\sigma > 0,$$

ed è immediato che sostituendo $\eta/2$ a η possiamo supporre che $|f| > \eta/2 \varepsilon_n$ su S_n .

Poniamo $S'_1 = S_1 - \|S_2\| S_1$: è chiaro che, fissato S_1 , risultano arbitrariamente prossimi, purchè ε_2 sia abbastanza piccolo, gli integrali estesi a S_1 ed a S'_1 , (per la sommabilità stessa di f su S_1); analogamente, posto $S'_2 = S'_1 + S_2 - \|S_3\| (S'_1 + S_2)$, risultano arbitrariamente prossimi per ε_3 sufficientemente piccolo gli integrali estesi a $S'_1 + S_2$ e S'_2 ; si considererà poi $S'_3 = S'_2 + S_3 - \|S_4\| (S'_2 + S_3)$, ecc. Si vede così come, sostituendo a $\{\varepsilon_n\}$ una successione estratta abbastanza rapidamente decrescente, si possa costruire una successione $\{S'_n\}$ tale che $\int |f| d\sigma$ superi $n \eta/2$ su S'_n . Sull'insieme limite

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[S_n - \sum_{p=n+1}^{\infty} \|S_p\| S_n \right].$$

la funzione f non sarà sommabile, pur appartenendo S' a $\{S\}$.

(4) Queste varie sommabilità parziali assicurano (per i singoli termini in (13) e (14) separatamente considerati) la convergenza degli integrali nelle corrispondenti classi $\{U_i\}$, $\{H_i\}$ (ved. le note ai nn. 10 e 17).

Analogamente, il secondo integrale (12) è assolutamente continuo rispetto a λ , ossia λ -*assolutamente continuo*.

I termini degli integrali (13) e (14) sono poi rispettivamente σ_i — e σ_i -*assolutamente continui* ⁽⁵⁾.

20. Non sembra facile una caratterizzazione semplice e completamente generale delle funzioni superficialmente o linearmente sommabili. Simili funzioni non vanno peraltro univocamente definite, in quanto ognuna di esse è *equivalente*, ai fini dell'integrazione, ad infinite altre. Propriamente, nel caso della sommabilità superficiale, due funzioni sono equivalenti quando differiscono soltanto sopra un insieme E che stacchi su ogni S una porzione di area nulla; e analogamente per due funzioni linearmente sommabili equivalenti l'insieme E stacca una porzione di lunghezza nulla su ogni L . Un insieme spaziale E , dotato della prima o della seconda di queste proprietà, ha ovviamente misura spaziale nulla; e proporremmo di chiamarlo *di misura superficiale interna nulla* nel primo caso, *di misura lineare interna nulla* nel secondo.

Tralasciando qui di approfondire l'argomento, osserviamo che sono sommabili linearmente e superficialmente tutte le funzioni limitate di Baire. La semplice misurabilità o quasi-continuità *spaziale* non sarebbe ovviamente sufficiente ⁽⁶⁾; sono però sufficienti (per quanto non necessari) certi tipi di quasi-continuità recentemente considerati da vari Autori, e chiamati «regolari» ⁽⁷⁾. Una funzione limitata $f(x, y, z)$ risulti continua quando si prescinda dai suoi valori su certi insiemi aperti A : se A si può scegliere in modo che le sue proiezioni o sui piani o sugli assi coordinati abbiano misura piccola a piacere, f sarà sommabile superficialmente nel primo e linearmente nel secondo caso. Tanto discende immediatamente dal risultato del n. 15 e dall'analogo del n. 17 ⁽⁸⁾.

Nella teoria dell'integrazione delle forme differenziali l'interesse si concentra peraltro su funzioni i cui integrali godono di proprietà di continuità analoghe a quelle delle funzioni φ (nn. 7 e 16). Poniamo $S = IF$,

$$u(I, D) = u(S) = \int_S f(x, y, z) d\varphi,$$

φ essendo definita relativamente ad un piano π . Se sussiste la relazione di limite, analoga alla (3),

$$u(I, D) = \lim_{n \rightarrow \infty}^* u(I, D_n)$$

(5) Nelle relative classi $\{U_i\}, \{H_i\}$ (ved. note al numero precedente).

(6) D'altronde è anche problematico che la condizione sia necessaria.

(7) TIBALDO, questi «Rendiconti», VIII, 2, p. 146 (1947); SCORZA-DRAGONI, «Rendiconti Sem. Mat. Padova», 17, p. 102 (1948); BAIADA, *ibid.*, p. 201. Uno studio esauriente dei vari tipi di quasi-continuità regolare, per funzioni di n variabili, è stato fatto da STAMPACCHIA in una Memoria di imminente pubblicazione in «Ricerche di Matematica», I (1951).

(8) Per gli integrali curvilinei delle funzioni di due variabili, il teorema è stato dimostrato da BAIADA (*loc. cit.*).

sotto le stesse condizioni che assicurano la validità della (3), cioè la relazione (4) e la condizione delle variazioni V_n equi-limitate, diremo che $f(x, y, z)$ è *regolarmente 2-integrabile*; precisando *rispetto a π* quando la giacitura non sia arbitraria. Analogamente, posto $L = IC$,

$$u(I, T) = u(L) = \int_L f(x, y, z) d\varphi,$$

φ essendo relativa ad un asse r , definiremo la *1-integrabilità regolare* in base alla relazione

$$u(I, T) = \lim_{n \rightarrow \infty}^* u(I, T_n),$$

sotto le stesse condizioni che assicurano la validità della (11).

Per l'integrabilità regolare è sufficiente la continuità dell'integrando, e necessaria la limitatezza (come equivalenza ad una funzione limitata ⁽⁹⁾).

Per un integrale della forma generale (13) (e analogamente per (14)) la proprietà di continuità in questione ⁽¹⁰⁾ consiste in ciò che *l'integrale esteso alla frontiera F di D risulta infinitesimo con la misura di D quando limitata a priori (ma comunque) l'area di F* . Si può dire allora che la forma $a dy dz + b dz dx + c dx dy$ è regolarmente integrabile ⁽¹¹⁾.

21. Della teoria esposta sono conseguenze quasi immediate *le formole integrali classiche, stabilite nel loro campo naturale di validità* (per luoghi di integrazione *univalenti*).

Nel campo dei vettori $\mathbf{v}(P)$ supponiamo per semplicità (fine essenziale della nostra trattazione essendo la generalità dei luoghi di integrazione) continue le derivate rispetto alle coordinate x, y, z del punto P . Come sin qui, F denoti la frontiera di un dominio spaziale D , C il contorno di un dominio superficiale T su F (domini di classe Ω); e indichiamo con \mathbf{n} il versore della normale a F , con \mathbf{t} quello della tangente a C , con $d\omega$ l'elemento di volume $dx dy dz$.

La formola di Gauss-Green

$$\int_F \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = \int_D \text{div } \mathbf{v} d\omega,$$

(9) Equivalenza ai fini dell'integrazione considerata. Ad esempio per $\int f dx dy$ saranno equivalenti integrandi che differiscano sopra un insieme di *misura superficiale interna nulla rispetto al piano xy* .

L'integrabilità regolare può mancare per funzioni limitate anche con un sol punto di discontinuità.

(10) Nella classe $\{S\}$.

(11) Questa locuzione può dar luogo ad equivoco, atteso il diverso significato dell'« integrabilità » nella teoria delle forme differenziali, cui dedicherò una prossima Nota; ma si evita ogni ambiguità chiamando *chiuse* le forme integrabili nel senso accennato. Cfr. B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali* (Docet, Roma), n. 44.

si stabilisce immediatamente con un passaggio al limite attraverso una successione poliedrica di approssimazione per D ⁽¹²⁾.

Per dimostrare la formola di Stokes

$$\int_C \mathbf{v} \times \mathbf{t} \, d\lambda = \int_T \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \, d\sigma,$$

osserviamo in primo luogo che l'integrale a secondo membro, nullo quando esteso alla superficie di un poliedro, si conserva tale per continuità su ogni frontiera F . Acquisita la formola per una qualunque superficie poliedrica, la si stabilisce mediante passaggio al limite per un dominio sulla superficie Σ di un poliedro Π (n. 15). L'osservazione fatta conduce allora a poligoni superficiali su F (n. 16) ⁽¹³⁾; e con un nuovo passaggio al limite, da siffatti poligoni a T , si consegue il risultato generale.

22. Per illustrare la nostra definizione di insieme linearmente orientato, consideriamo il dominio D del secondo esempio addotto nel n. 11, ed il dominio superficiale T intercettato sulla frontiera F dal dominio somma di cilindri (con basi interne alla curva c) costruito nel primo esempio. T è di classe Ω su F ; il suo contorno C si compone di infinite curve regolari e della curva di accumulazione, ed ha per lunghezza la somma delle lunghezze delle prime.

La formola di Stokes è applicabile a T , nonchè al complementare $@T$ di contorno $-C$. Se però a D si sostituisce l'altro dominio D' di cui all'esempio ricordato, T non risulta più di classe Ω su F' , ma soltanto il suo interno di classe Ω' . La formola di Stokes si applica allora all'interno di T ed a C per un verso, al dominio complementare $@T$ (su F') ed a $-C$ per l'altro ⁽¹⁴⁾.

23. Abbiamo limitato per brevità la nostra esposizione ai casi degli insiemi superficialmente e linearmente orientati dello spazio ordinario; ma l'estensione al caso generale degli insiemi $J^{(k)}$ k -dimensionalmente orien-

(12) Questo risultato assorbe naturalmente tutti i precedenti (citati in (2) al n. 1 della Nota I), laboriosi nella deduzione e artificiosi nelle ipotesi. Per esempio Federer, nel primo dei lavori citati, suppone che la frontiera abbia finita una cosiddetta « φ -misura », che l'Autore ritiene affine a quella di Carathéodory, laddove si tratterebbe se mai di quella di Gross (data l'arbitrarietà degli insiemi aperti ricoprenti), ed introduce la normale in base ad una proprietà abbastanza intuitiva, ma piuttosto da dedurre da una definizione generale (come sarebbe facile con la nostra) anzichè riguardare come la definizione stessa; dopo di che deve ammettere varie ipotesi supplementari per condurre a termine la dimostrazione. Nel secondo lavoro, rifacendosi a tutti gli sviluppi del primo, l'Autore stabilisce il risultato per frontiere di misura finita secondo Hausdorff. Ora si vede subito che i domini a frontiera quadrabile secondo Carathéodory (in particolare secondo Hausdorff) rientrano fra quelli che abbiamo detti di classe Ω .

(13) Per la proprietà additiva degli integrali (13).

(14) In generale le formole di Gauss-Green e di Stokes si estendono agli insiemi approssimabili in media, spazialmente o superficialmente, mediante poliedri o poligoni superficiali a frontiere di misure equilimitate (ved. la nota (12) al n. 8).

tati in uno spazio ad n -dimensioni non presenterebbe più a questo punto che qualche complicazione formale.

Gli insiemi $J^{(n-1)}$ si definiranno a partire dalle frontiere $F^{(n-1)}$ di domini n -dimensionali; si considereranno poi i domini $(n-1)$ -dimensionali sulle $F^{(n-1)}$, le loro frontiere $F^{(n-2)}$, e si otterranno così gli $J^{(n-2)}$; e continuando in tal modo si giungerà infine alle definizioni di $F^{(k)}$ e $J^{(k)}$. Il procedimento si fonderà su formole generali di riduzione, dei tipi (9) e (10), esprimenti le misure k -dimensionali delle $\binom{n}{k}$ proiezioni di $J^{(k)}$ ognuna mediante k integrali delle misure $(k-1)$ -dimensionali di proiezioni di sezioni iperpiane.

Un insieme k -dimensionalmente orientato è in ultima analisi un *insieme di elementi k -dimensionali raccordati*, ognuno definito da un punto non neutro e dallo spazio lineare a k -dimensioni *tangente*, o da quello a $n-k$ dimensioni *normale*; l'insieme neutro ha misura k -dimensionale nulla su $J^{(k)}$ ⁽¹⁵⁾.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulla derivazione sotto il segno di integrale.* Nota di MARIO VOLPATO, presentata ^(*) dal Corrisp. A. TONOLO.

In questa Nota mi propongo di dimostrare un teorema, di notevole generalità, circa la derivazione dell'integrale

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

e la sua assoluta continuità. Pervengo a una formula di derivazione del tutto simile a quella classica, supponendo in sostanza $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ monotone ed assolutamente continue, $f(x, y)$, misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y , minore in modulo, al pari dei suoi rapporti incrementali rispetto ad y , di una funzione sommabile della sola x .

Mi è stato possibile pervenire a questo risultato, giovandomi del seguente teorema: Se $f(x, y)$ è misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nel rettangolo R ($a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$), riuscendo ivi in modulo minore di una funzione sommabile della sola x , allora risulta

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{x_0}^{x_0 + \delta} f(x, y) dx = f(x_0, y)$$

(15) Definiti in generale gli integrali di forme differenziali esterne di grado k , estesi ad insiemi $J^{(k)}$, $F^{(k)}$, si estendono le formole integrali del n. 21 nella formola generale di Green-Stokes.

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

per tutti i punti x_0 di una porzione di $a \dashv b$, la quale non dipende da y ed ha come misura $b - a$, teorema recentemente dimostrato da G. Scorza Dragoni ⁽¹⁾.

I. ENUNCIATO DEL TEOREMA. — Siano $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ due funzioni assolutamente continue e monotone in senso stretto nell'intervallo

$$I: \quad c \leq y \leq d,$$

soddisfacenti la disuguaglianza

$$\alpha(y) < \beta(y) \quad \text{per } c < y < d;$$

siano a il minimo di $\alpha(y)$ e b il massimo di $\beta(y)$; e si consideri l'insieme

$$B: \quad \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \quad ; \quad c \leq y \leq d.$$

Sia poi $f(x, y)$ una funzione reale delle variabili reali (x, y) definita in B , continua rispetto ad y , misurabile rispetto ad x , tale che esista una funzione non negativa $M(x)$, sommabile ⁽²⁾ nel tratto $a \leq x \leq b$, per la quale risulti

$$(1) \quad |f(x, y)| \leq M(x),$$

$$(2) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M(x) |y_1 - y_2|$$

se $(x, y), (x, y_1), (x, y_2)$ sono punti qualunque di B , di guisa che su quasi tutte le intersezioni di B con le orizzontali esista quasi ovunque $f'_y(x, y)$ finita ⁽³⁾.

In queste ipotesi la funzione

$$(3) \quad F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

(1) G. SCORZA DRAGONI, *Una applicazione della quasi continuità semi regolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile* [questi «Rendiconti», questo fascicolo]. Mi è grato di ringraziare il prof. G. Scorza Dragoni per avermi fatto prendere visione del manoscritto del suo lavoro e per i consigli datimi in una conversazione avuta con Lui sull'argomento.

(2) L'integrabilità in tutto il corso della Nota va intesa nel senso di Lebesgue.

(3) Infatti nelle ipotesi del testo $f(x, y)$ è misurabile in virtù di un teorema di G. SCORZA DRAGONI, (cfr., *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, «Rendiconti del Seminario Matematico di Padova», vol. XVII (1948), pp. 102-106). Quindi l'insieme dei punti in cui la $f'_y(x, y)$ manca o è infinita è misurabile. D'altra parte a norma della (2) e della sommabilità di $M(x)$, le sezioni di questo insieme con quasi tutte le verticali hanno misura nulla; quindi questo insieme ha misura superficiale nulla. Da cui l'affermazione del testo.

è assolutamente continua in I e ivi risulta quasi ovunque:

$$(4) \quad F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y).$$

Naturalmente, e la cosa sarà implicita anche nella deduzione che segue, il teorema continua a sussistere anche se una delle due funzioni $\alpha(y)$, $\beta(y)$ è costante ⁽⁴⁾.

2. DIMOSTRAZIONE DELL'ASSOLUTA CONTINUITÀ. - Possiamo supporre che $f(x, y)$ sia addirittura definita nel rettangolo R ($a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$) ed abbia ivi tutte le proprietà dichiarate nell'enunciato, perchè, dette rispettivamente $y = \bar{\alpha}(x)$ e $y = \bar{\beta}(x)$ le funzioni inverse di $x = \alpha(y)$ e $x = \beta(y)$, possiamo (eventualmente) considerare la funzione $\Phi(x, y)$ così definita:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \\ f(x, \bar{\alpha}(x)) & \text{se } x \leq \alpha(y) \\ f(x, \bar{\beta}(x)) & \text{se } x \geq \beta(y). \end{cases}$$

Sia allora $p \leq y \leq q$ un sottointervallo di I ed osserviamo che risulta:

$$\begin{aligned} |F(p) - F(q)| &\leq \left| \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} f(x, p) dx - \int_{\alpha(q)}^{\beta(q)} f(x, p) dx \right| + \left| \int_{\alpha(q)}^{\beta(q)} [f(x, p) - f(x, q)] dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\alpha(p)}^{\alpha(q)} f(x, p) dx \right| + \left| \int_{\beta(p)}^{\beta(q)} f(x, p) dx \right| + \left| \int_{\alpha(q)}^{\beta(q)} |p - q| M(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\alpha(p)}^{\alpha(q)} M(x) dx \right| + \left| \int_{\beta(p)}^{\beta(q)} M(x) dx \right| + |p - q| \int_a^b M(x) dx \end{aligned}$$

Di qui, dall'assoluta continuità delle funzioni $\int_a^x M(t) dt$, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ e dalla monotonia di queste ultime, segue l'assoluta continuità di $F(y)$ nell'intervallo I ⁽⁵⁾.

3. FORMULA DI DERIVAZIONE. - Detti $a' (> a)$ il massimo di $\alpha(y)$ in I e $b' (< b)$ il minimo di $\beta(y)$ in I , $\bar{\alpha}(x)$ e $\bar{\beta}(x)$ sono definite, rispettivamente, nei sottointervalli (a, a') , (b', b) e risultano monotone in senso

(4) Nel caso che $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ siano entrambe costanti si veda il passo citato in (8).

(5) Cfr. L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni* [Zanichelli, Bologna (1921)], cap. I, § 5, g), p. 65.

stretto e assolutamente continue perchè tali sono $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ ⁽⁶⁾. Quindi $\bar{\alpha}(x)$ e $\bar{\beta}(x)$ possiedono la nota proprietà N di Lusin ⁽⁷⁾.

Indichiamo ora con E l'insieme dei punti ξ di (a, b) ove risulta

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{\xi}^{\xi+\delta} M(x) dx = M(\xi),$$

con $E_{\bar{\alpha}}$ ed $E_{\bar{\beta}}$ i due sottoinsiemi di E contenuti, rispettivamente, in (a, a') e (b', b) . È noto che la $\text{mis}(E_{\bar{\alpha}}) = a' - a$ e la $\text{mis}(E_{\bar{\beta}}) = b - b'$. Se E_{α} ed E_{β} sono gli insiemi nei quali vengono mutati, rispettivamente, l'insieme $E_{\bar{\alpha}}$ dalla funzione $y = \bar{\alpha}(x)$ e l'insieme $E_{\bar{\beta}}$ dalla funzione $y = \bar{\beta}(x)$, attesa la proprietà N delle due funzioni $\bar{\alpha}(x)$ e $\bar{\beta}(x)$, tanto E_{α} quanto E_{β} , e quindi la loro intersezione $E_{\alpha} \cdot E_{\beta}$, riempiono, ognuno, quasi tutto l'intervallo I. Sicchè se y_0 è un punto di $E_{\alpha} \cdot E_{\beta}$, ad y_0 sono ammesse quasi tutte le posizioni di I e in questo punto si ha:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0)+\delta} M(x) dx = M(\alpha(y_0)) \quad \text{e} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0)+\delta} M(x) dx = M(\beta(y_0)).$$

Supponiamo ora che y_0 sia anche tale che sulla intersezione di B con l'orizzontale $y = y_0$ esista quasi ovunque finita, $f_y(x, y_0)$ e che esistano, pure finite, $\alpha'(y_0)$ e $\beta'(y_0)$.

È naturale che ad y_0 sono ancora consentite quasi tutte le posizioni di I. Ebbene, costruiamo ora il rapporto incrementale di $F(y)$ relativo al punto y_0 . Si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{F(y_0+h) - F(y_0)}{h} &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y_0+h) - f(x, y_0)}{h} dx + \frac{1}{h} \left[\int_{\alpha(y_0+h)}^{\beta(y_0+h)} f(x, y_0+h) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0+h) dx \right] = \\ &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y_0+h) - f(x, y_0)}{h} dx + \frac{1}{h} \int_{\alpha(y_0+h)}^{\alpha(y_0)} f(x, y_0+h) dx + \frac{1}{h} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+h)} f(x, y_0+h) dx. \end{aligned}$$

(6) La monotonia è ovvia. Per quanto riguarda l'assoluta continuità, per esempio di $\bar{\alpha}(x)$ in (a, a') , si osservi che, esistendo quasi ovunque $\bar{\alpha}'(x)$ finita e sommabile in (a, a') ,

basta provare che: $\int_a^x \bar{\alpha}'(x) dx = \bar{\alpha}(x) - \bar{\alpha}(a)$. A tale scopo, supponiamo per fissare le

idee, che $\bar{\alpha}(x)$ sia crescente in (a, a') , di guisa che tale è pure la sua inversa $\alpha(y)$ in (c, d) , ed eseguiamo il cambiamento di variabile $x = \alpha(y)$. Si ottiene (cfr. loc. cit. in (3) il n. 63, b) p. 179):

$$\int_a^x \bar{\alpha}'(x) dx = \int_c^{\bar{\alpha}(x)} \bar{\alpha}'(\alpha(y)) \alpha'(y) dy = \int_c^{\bar{\alpha}(x)} d\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(x) - \bar{\alpha}(a).$$

(7) Cfr. S. SAKS, *Theory of the integral* [Monografie Matematyczne, Varsavia 1937, seconda edizione], cap. II, § 6, p. 224.

Osserviamo anzitutto che la (2) e considerazioni del tipo noto ⁽⁸⁾ porgono:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx,$$

mentre, ancora per la (2), si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \int_{\alpha(y_0+h)}^{\alpha(y_0)} f(x, y_0 + h) dx - \frac{1}{h} \int_{\alpha(y_0+h)}^{\alpha(y_0)} f(x, y_0) dx \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\alpha(y_0+h)}^{\alpha(y_0)} M(x) dx \right| = 0,$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+h)} f(x, y_0 + h) dx - \frac{1}{h} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+h)} f(x, y_0) dx \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+h)} M(x) dx \right| = 0.$$

Allora la nostra formula di derivazione (4) sarà acquisita non appena si provi che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha(y_0+h)}^{\alpha(y_0)} f(x, y_0) dx = -\alpha'(y_0) f(\alpha(y_0), y_0)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+h)} f(x, y_0) dx = \beta'(y_0) f(\beta(y_0), y_0).$$

Occupiamoci del primo di questi due limiti, perchè in modo analogo si calcola il secondo.

Dato che, ponendo $\alpha(y_0 + h) - \alpha(y_0) = \delta$, si può scrivere

$$\frac{1}{h} \int_{\alpha(y_0+h)}^{\alpha(y_0)} f(x, y_0) dx = -\frac{\delta}{h} \cdot \frac{1}{\delta} \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0)+\delta} f(x, y_0) dx,$$

che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(y_0 + h) - \alpha(y_0)}{h} = \alpha'(y_0),$$

e che δ è infinitesimo con h , la questione è subito ricondotta a dimostrare che per quasi tutti gli y_0 di I risulta

$$(5) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0)+\delta} f(x, y_0) dx = f(\alpha(y_0), y_0).$$

E questo, atteso che $\bar{\alpha}(x)$ gode della proprietà N, equivale a dimostrare che per quasi tutti gli x_0 di (a, b) risulta:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x, \bar{\alpha}(x_0)) dx = f(x_0, \bar{\alpha}(x_0)).$$

E nel fatto questo è vero appunto per il teorema di G. Scorza Dragoni; donde la conclusione.

(8) Cfr. E. J. MCSHANE, *Integration* [Princeton University Press (1947)] p. 216 e 169.

Analisi matematica. — *Sul problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma* $z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(i)})$. Nota II di ROBERTO CONTI, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

7. Cominciando dal punto a) per ogni intero n si costruiscono k funzioni definite in σ nel seguente modo. Si divide anzitutto σ mediante le n rette $x = 0, \delta, 2\delta, \dots, n\delta = a$ in n strisce parziali

$$\sigma_l: \quad (l-1)\delta \leq x \leq l\delta \quad , \quad -\infty < y < \infty \quad (\delta = a/n)$$

quindi, a partire dalla prima di queste, σ_1 , si definiscono in ogni σ_l k funzioni $\varphi^{(n,i,l)} = \varphi^{(n,i,l)}(x, y)$, ($i = 1, 2, \dots, k$) con la legge ricorrente

$$(6) \quad \varphi^{(n,i,l)}(x, y) = \frac{1}{2} \left[\omega^{(n,i,l-1)} \left(y + \frac{x - (l-1)\delta}{2} \right) + \omega^{(n,i,l-1)} \left(y - \frac{x - (l-1)\delta}{2} \right) \right] + \\ + \int_{y - \frac{x - (l-1)\delta}{2}}^{y + \frac{x - (l-1)\delta}{2}} f^{(i)}((l-1)\delta, t; \omega^{(n,1,l-1)}(t), \dots, \omega^{(n,k,l-1)}(t); \dot{\omega}^{(n,i,l-1)}(t)) dt,$$

$$(7) \quad \omega^{(n,i,l-1)}(t) = \begin{cases} \omega^{(i)}(t) & \text{per } l = 1 \\ \varphi^{(n,i,l-1)}((l-1)\delta, t) & \text{per } l = 2, \dots, n; \end{cases}$$

$$(7') \quad \dot{\omega}^{(n,i,l-1)}(t) = \begin{cases} \dot{\omega}^{(i)}(t) & \text{per } l = 1 \\ \varphi_y^{(n,i,l-1)}((l-1)\delta, t) & \text{per } l = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Indichiamo con $S^{(n,i)} = S^{(n,i)}(x, y)$ la funzione eguale alla $\varphi^{(n,i,1)}(x, y)$ in σ_1 , alla $\varphi^{(n,i,2)}(x, y)$ in σ_2, \dots , alla $\varphi^{(n,i,n)}(x, y)$ in σ_n ; evidentemente le $S^{(n,i)}$ soddisfano le (4) e risultano continue in σ rispetto a (x, y) .

Si calcolano facilmente le derivate $S_y^{(n,i)}$, $S_{yy}^{(n,i)}$ ed anche le $S_x^{(n,i)}$, ma queste ultime non sono definite in generale nei punti appartenenti alle rette $x = \delta, 2\delta, \dots, (n-1)\delta$. In tali punti infatti la differenza $\varphi_x^{(n,i,l-1)}((l-1)\delta, y) - \varphi_x^{(n,i,l)}((l-1)\delta, y)$ è in generale diversa da zero. D'altronde avendosi dalle (6), (7)

$$(8_1) \quad \varphi_x^{(n,i,1)}(0, y) = f^{(i)}(0, y; \omega^{(1)}(y), \dots, \omega^{(k)}(y); \dot{\omega}^{(i)}(y))$$

e per $l = 2, \dots, n$

$$(8_2) \quad \varphi_x^{(n,i,l)}(0, y) =$$

$$= f^{(i)}((l-1)\delta, y; \varphi^{(n,1,l)}((l-1)\delta, y), \dots, \varphi^{(n,k,l)}((l-1)\delta, y); \varphi_y^{(n,i,l)}((l-1)\delta, y))$$

se poniamo per definizione $S_x^{(n,i)}((l-1)\delta, y) = \varphi_x^{(n,i,l)}((l-1)\delta, y)$ segue che le $S^{(n,i)}$ soddisfano il sistema (B) nei punti appartenenti alle rette $x = 0, \delta, 2\delta, \dots, (n-1)\delta$.

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

8. Passiamo ora al punto δ) della dimostrazione. Definiamo, perciò 3 n numeri positivi M_l, N_l, R_l ($l = 1, 2, \dots, n$) ponendo ($\delta = a/n$):

$$M_0 = M, \quad N_0 = N, \quad R_0 = R$$

$$M_l = M_{l-1} + K(R_{l-1}^2 + kM_{l-1})\delta, \quad N_l = N_{l-1} + KR_{l-1}\delta$$

$$R_l = 1 + M_l + kN_l = R_{l-1} + KR_{l-1}\delta + k(KM_{l-1} + KN_{l-1})\delta.$$

I numeri M_l, N_l, R_l dipendono da n , ma facendo intervenire la disuguaglianza (D) si trova senza difficoltà che essi ammettono una limitazione superiore finita indipendente da n , precisamente

$$(9) \quad M_l \leq M + a, \quad N_l \leq N + a, \quad R_l \leq R + a; \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

D'altronde, mediante calcoli analoghi a quelli usati in [2], si prova che è in σ_l

$$(10) \quad |\varphi_y^{(n,i,l)}(x, y)| \leq N_l, \quad |\varphi_{yy}^{(n,i,l)}(x, y)| \leq M_l; \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

cosicchè per le (9), (10) le $S_y^{(n,i)}(x, y)$, $S_{yy}^{(n,i)}(x, y)$ risultano equilimitate ed inoltre, fissato x , avremo

$$(11_x) \quad |S_y^{(n,i)}(x, y') - S_y^{(n,i)}(x, y)| \leq (M + a)\delta; \quad |y' - y| < \delta.$$

Ancora ripetendo i calcoli di [2], tenuto conto delle (10), si ha in σ_l

$$|\varphi_y^{(n,i,l)}(x, y) - \varphi_y^{(n,i,l)}((l-1)\delta, y)| \leq \left[\frac{1}{2} M_{l-1} + K R_{l-1}\right]\delta;$$

dunque per le (9) si ha che, fissato y , è

$$(11_2) \quad |S_y^{(n,i)}(x', y) - S_y^{(n,i)}(x, y)| \leq \frac{3}{2} [M + a + K(R + a)]\delta, \quad |x' - x| < \delta.$$

Dalle (11_x) e (11₂) segue l'esistenza di un numero Λ indipendente da n per cui è

$$(11) \quad |S_y^{(n,i)}(x', y') - S_y^{(n,i)}(x, y)| \leq \Lambda\delta; \quad |x' - x| < \delta, \quad |y' - y| < \delta.$$

Anche per le $S_x^{(n,i)}(x, y)$ vale la medesima proprietà; ciò si prova come in [2] valendosi delle (8_i), (8_l) dalle quali risulta

$$(12_1) \quad |S_x^{(n,i)}((l-1)\delta, y') - S_x^{(n,i)}((l-1)\delta, y)| \leq K(R + a)\delta, \quad |y' - y| < \delta$$

e delle disuguaglianze, anch'esse immediate

$$|\varphi_x^{(n,i,l)}(x, y) - \varphi_x^{(n,i,l)}((l-1)\delta, y)| \leq \left[\frac{1}{4} M_{l-1} + \frac{1}{2} K R_{l-1}\right]\delta,$$

da cui segue

$$(12_2) \quad |S_x^{(n,i)}(x', y) - S_x^{(n,i)}(x, y)| \leq \left[\frac{3}{4} (M + a) + \frac{3}{2} K(R + a)\right]\delta, \quad |x' - x| < \delta.$$

Quindi per le (12₁), (12₂) esiste un numero Λ' indipendente da n per cui è

$$(12) \quad |S_x^{(n,i)}(x', y') - S_x^{(n,i)}(x, y)| \leq \Lambda'\delta, \quad |x' - x| < \delta, \quad |y' - y| < \delta.$$

9. Sia y_0 un numero $> a/2$ e del resto *arbitrario* e consideriamo il trapezio T dei punti (x, y) definito da

$$T: \quad 0 \leq x \leq a, \quad |y| \leq -x/2 + y_0.$$

Per la (12) le $S_x^{(n,i)}$ risultano (in σ è quindi) in T equioscillanti per meno di $\Lambda'a$ e poichè qualunque sia n , come si è già detto,

$$S_x^{(n,i)}(0,0) = f^{(i)}(0,0; \omega^{(1)}(0), \dots, \omega^{(k)}(0); \dot{\omega}^{(i)}(0)),$$

segue che le $S_x^{(n,i)}$ sono equilimate in T (7).

Dunque le $S^{(n,i)}$, dotate di derivate prime equilimate in T risultano equicontinue, ed avendosi $S^{(n,i)}(0,0) = \omega^{(i)}(0)$ qualunque sia n , esse sono necessariamente equilimate in T .

Per un classico teorema di Arzelà (caso particolare di quello, dello stesso A., che sarà usato tra breve) ognuna delle successioni

$$(13) \quad \{S^{(n,1)}\}, \{S^{(n,2)}\}, \dots, \{S^{(n,k)}\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ammette in T almeno una funzione limite continua $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(k)}$.

Dalle (13) possiamo estrarre, con procedimento « diagonale », k successioni, che per semplificare indicheremo ancora con le (13), uniformemente convergenti in T rispettivamente verso $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(k)}$.

Le successioni delle derivate

$$(14) \quad \{S_y^{(n,1)}\}, \{S_y^{(n,2)}\}, \dots, \{S_y^{(n,k)}\}$$

sono composte di funzioni equilimate ed in virtù delle (11) ognuna di esse ammette almeno una funzione limite continua $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(k)}$ (8).

Possiamo ancora estrarre con procedimento diagonale dalle (14) k successioni

$$\{S_y^{(v,1)}\}, \{S_y^{(v,2)}\}, \dots, \{S_y^{(v,k)}\}$$

uniformemente convergenti verso $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(k)}$ rispettivamente.

Lo stesso accade, in virtù di (15) per le successioni $\{S_x^{(v,1)}\}, \{S_x^{(v,2)}\}, \dots, \{S_y^{(v,k)}\}$ dalle quali possiamo estrarre k successioni $\{S_x^{(u,1)}\}, \{S_x^{(u,2)}\}, \dots, \{S_x^{(u,k)}\}$ uniformemente convergenti verso k funzioni continue $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(k)}$.

Che sia $U^{(1)} = S_y^{(1)}, U^{(2)} = S_y^{(2)}, \dots, U^{(k)} = S_y^{(k)}$ si deduce subito dal classico teorema di derivazione per serie, mentre per provare che è anche $V^{(1)} = S_x^{(1)}, V^{(2)} = S_x^{(2)}, \dots, V^{(k)} = S_x^{(k)}$ occorrono alcune semplici considerazioni supplementari.

(7) Ricordiamo che più funzioni $T^{(n)}$ definite in un campo D del piano x, y si dicono equioscillanti per meno di ε se esiste un certo numero $\delta > 0$ tale che in ogni parte di D avente un diametro non superiore ad un opportuno $\delta > 0$ l'oscillazione di tutte le $T^{(n)}$ sia $\leq \varepsilon$. Se le $T^{(n)}$ sono equioscillanti in un campo D limitato e sono equilimate in un punto di D esse sono equilimate in tutto D (cfr. C. ARZELÀ [1]).

(8) In virtù del teorema di Arzelà (cfr. [1]): « Data una successione di funzioni $T^{(n)}$ definite in un campo D del piano x, y , equilimate, affinché esista almeno una funzione limite continua è necessario e sufficiente che si possano assegnare numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero, $\{\varepsilon_v\}$, ($v = 1, 2, \dots$) e in corrispondenza successioni estratte dalla data, ognuna delle quali sia contenuta nella precedente e composta di funzioni equioscillanti per meno di ε_v ».

tari ⁽⁹⁾, a causa delle possibili discontinuità (ordinarie) delle $S_x^{(\mu,1)}, S_x^{(\mu,2)}, \dots, S_x^{(\mu,k)}$ sulle rette $x = l\delta$.

I ragionamenti precedenti valgono per il trapezio T la cui base maggiore ha un'ampiezza $2y_0$ arbitrariamente grande, quindi i risultati ottenuti sono indipendenti da y_0 e valgono per l'intera striscia σ .

Infine le $S^{(\mu,1)}, S^{(\mu,2)}, \dots, S^{(\mu,k)}$ soddisfano (B) su μ rette verticali equidistanti, perciò le funzioni limite soddisfano (B) identicamente in σ ; $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(k)}$ è dunque soluzione di (B) in σ .

10. Concludiamo con alcune osservazioni.

Osservazione 1. - Come nel caso $k=1$ (cfr. [2]) anche nel caso nostro l'ipotesi dell'esistenza delle derivate seconde limitate $\ddot{\omega}^{(i)}$ può esser sostituita con quella meno restrittiva che le derivate prime $\dot{\omega}^{(i)}$ siano uniformemente lipschitziane con una costante M. I ragionamenti fatti sussistono con qualche maggiore complicazione di forma.

Osservazione 2. - Per quanto riguarda l'esistenza del numero K soddisfacente la disuguaglianza (D) si può ripetere l'osservazione fatta in [2] per il caso $k=1$; infatti anche qui, con un cambiamento dell'unità di misura delle ascisse

$$X = mx \quad , \quad m > 0$$

si può sempre far sì che, restringendo eventualmente l'ampiezza a di σ , la (D) sia verificata quando sono soddisfatte le altre ipotesi relative alle $f^{(i)}$.

Osservazione 3. - Si noti che la (D), la quale coincide con la disuguaglianza di [2] se $k=1$, mostra che l'ampiezza a della striscia in cui il teorema assicura l'esistenza della soluzione diminuisce col crescere del numero k delle equazioni di cui è composto il sistema in esame.

Osservazione 4. - Le proprietà dei sistemi (B) sono notevoli anche per quanto riguarda la questione dell'unicità: a questi sistemi è possibile infatti estendere il noto criterio dimostrato da A. Haar per $k=1$ ([8], cfr. anche T. Ważewski [13]), ciò che non è possibile invece per tutti i sistemi (A) iperbolici (cfr. E. Landis [9]).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. ARZELÀ, *Esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali*. «Mem. Acc. Sc. Ist. Bologna» (6), 3, 117-141 (1906).
- [2] E. BAIADA, *Sul teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali del primo ordine*. «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa» (2), 12 (pubbl. 1947), 135-145 (1943).
- [3] E. BAIADA, *Sul problema di Cauchy per le equazioni alle derivate parziali*. «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa» (2), 12 (pubbl. 1947), 185-188; (1943).
- [4] M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sopra il problema di Cauchy per i sistemi di equazioni alle derivate parziali del primo ordine*. «Rend. Sem. Mat. Padova», 17, 75-96 (1948).

(9) Cfr. [1] od anche U. DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. Pisa 1878, p. 112 e sgg.

- [5] M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sopra i sistemi di equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali e multiple*. «Rend. Acc. Naz. Lincei» (8), 4, 682-688 (1948).
- [6] R. COURANT-P. LAX, *On non-linear partial differential equations with two independent variables*. «Commun. pure and appl. Math», 2, 255-273 (1949).
- [7] K. O. FRIEDRICHS, *Non-linear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables*. «Am. Jour. of Math.», 70, 555-589 (1948).
- [8] A. HAAR, *Ueber Eindeutigkeit und Analytizität der Lösungen partieller Differentialgleichungen*. «Atti Congr. Intern. Matem.», Bologna 1928, t. 3, 5-10.
- [9] E. LANDIS, *Un esempio di non esistenza della soluzione del problema di Cauchy per i sistemi della forma $\partial u_i / \partial t = \sum_j A_{ij} \partial u_j / \partial x + \sum_j B_{ij} u_j + f_i$, ($i, j = 1, 2$)* (russo), «Matem. Sbornik», 27 (69), 2, 319-323 (1950).
- [10] E. E. LEVI, *Sul problema di Cauchy*. «Rend. Acc. Naz. Lincei» (5), 16, 105-112 (1907).
- [11] O. PERRON, *Ueber Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*. «Mat. Zeits.», 27, 549-564 (1928).
- [12] J. SCHAUDER, *Cauchysches Problem für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Anwendung einiger sich auf die Absolutbeträge der Lösungen beziehenden Abschätzungen*. «Comm. Math. Helv.», 9, 263-283 (1937).
- [13] T. WAŻEWSKI, *Sur l'unicité et la limitation des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*. «Ann. Mat. pura appl.» (4) 15, 155-158 (1936).
- [14] T. WAŻEWSKI, *Sur le problème de Cauchy relatif à un système d'équations aux dérivées partielles*. «Ann. Soc. Pol. Math.», 15, 101-127 (1937).

Analisi matematica. — *Sulle famiglie di funzioni additive d'insieme, uniformemente continue*. Nota di FEDERICO CAFIERO, presentata (*) dal Corrisp. R. CACCIOPOLI.

Sia \mathcal{F} una famiglia completamente additiva d'insiemi di uno spazio astratto e $\varphi(I)$ una funzione (reale) d'insieme, additiva in senso completo, definita in \mathcal{F} . Una tale funzione è continua in \mathcal{F} , nel senso che risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(I_n) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} I_n\right)$$

per ogni successione convergente $\{I_n\}$ di insiemi di \mathcal{F} (1).

La proprietà di continuità per la funzione $\varphi(I)$ è ovviamente caratterizzata dal fatto che si ha:

$$(I) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(I_n) = 0$$

per ogni successione d'insiemi di \mathcal{F} avente limite vuoto, ed è quindi naturale chiamare *equi-continue* o *continue uniformemente* infinite funzioni completamente additive d'insieme, simultaneamente definite in \mathcal{F} , quando, assegnata comunque una successione $\{I_n\}$ d'insiemi di \mathcal{F} , avente limite vuoto, la relazione di limite (1) sia verificata uniformemente dalle infinite funzioni

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) Per la definizione di famiglia d'insiemi completamente additiva, nonché per quella di funzione completamente additiva, cfr. ad esempio S. SAKS, *Theory of the integral*. pp. 7-12.

considerate; sicchè, in corrispondenza di ogni $\varepsilon > 0$, si lascia determinare un indice ν (dipendente naturalmente dalla successione data oltre che da ε) in guisa tale che risulti:

$$|\varphi(I_n)| < \varepsilon$$

per $n > \nu$ e per tutte le φ .

Tale concetto di equi-continuità, introdotto da Caccioppoli ⁽²⁾, malgrado l'apparente semplicità, è equivalente a quello di equi-assoluta continuità dovuto a Vitali. Infatti, infinite funzioni equi-continue, che siano assolutamente continue rispetto ad una stessa funzione d'insieme $M(I)$ non negativa e completamente additiva, sono anche, come lo stesso Caccioppoli ha dimostrato ⁽³⁾, equi-assolutamente continue rispetto ad $M(I)$, e d'altro canto un risultato di Dubrovskii ⁽⁴⁾ assicura, per ogni famiglia di funzioni equi-continue, l'esistenza di una funzione d'insieme $M(I)$, rispetto alla quale ogni funzione della famiglia è assolutamente continua. È evidente poi che dalla equi-assoluta continuità, rispetto ad una qualunque funzione $M(I)$, di infinite funzioni d'insieme, segue l'equi-continuità delle funzioni stesse.

Importanti ricerche, collegate al problema dell'integrazione per serie, iniziate da Vitali e continuate da Lebesgue, Hahn, Nikodym e Saks, hanno portato ad un notevole risultato, che espresso in termini di equi-continuità è il seguente:

Sia $\{\varphi_n(I)\}$ una successione di funzioni d'insieme, completamente additive in \mathfrak{F} , e si supponga che per ogni insieme I di \mathfrak{F} esista finito il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(I) = \varphi(I).$$

(2) R. CACCIOPPOLI, *Integrali impropri di Stieltjes. Estensione del teorema di Vitali*. « Rend. dell'Acc. di Scienze Fis. e Mat. di Napoli », ser. 4, vol. XXV (1929).

Recentemente V. M. Dubrovskii ha introdotto il concetto di *additività uniforme* per una famiglia di funzioni completamente additive in \mathfrak{F} , chiamando uniformemente additive le funzioni della detta famiglia quando per ogni successione di insiemi di \mathfrak{F} , a due a due privi di punti comuni, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(I_{n+1} + I_{n+2} + \dots) = 0$$

uniformemente per tutte le funzioni φ della famiglia.

Tale concetto è, come vedremo (cfr. nota (6)), perfettamente equivalente a quello di equi-continuità.

V. M. DUBROVSKII, *Su alcune proprietà delle funzioni completamente additive di insieme e loro applicazione alla generalizzazione del teorema di Lebesgue*. (in Russo) « Rec. Math. [Mat. Sbornik] ». N. S., 20 (62), pp. 317-329 (1947). Cfr. anche « Mathematical Reviews », vol. 9, n. 1, p. 19. Avvertiamo esplicitamente che siamo venuti a conoscenza dei lavori di Dubrovskii solo attraverso le recensioni apparse in « Mathematical Reviews ».

(3) Lavoro citato in nota (2). Tale risultato è stato recentemente ritrovato da V. M. Dubrovskii, Cfr. lav. cit. in nota (2).

(4) V. M. DUBROVSKII, *Sulla base di una famiglia di funzioni completamente additive d'insieme e sulle proprietà di additività uniforme e di equi-continuità* (in Russo). « Doklady Akad. Nauk SSSR » (N. S.), 58, pp. 737-740 (1947). Cfr. anche « Mathematical Reviews », vol. 9, n. 1, p. 275.

Allora le funzioni della successione $\{\varphi_n(I)\}$ sono equi-continue e la funzione limite è completamente additiva in \mathfrak{F} ⁽⁵⁾.

In questa Nota dimostro il seguente:

TEOREMA I. — Condizione (necessaria e) sufficiente affinché le funzioni, completamente additive in \mathfrak{F} , della successione $\{\varphi_n(I)\}$ siano equi-continue, è che, per ogni successione $\{I_r\}$ di insiemi di \mathfrak{F} , a due a due privi di punti comuni, assegnato un $\varepsilon > 0$, si possa determinare un insieme I_0 di $\{I_r\}$ ed un indice v in modo tale che risulti $|\varphi_n(I_0)| < \varepsilon$ per $n > v$.

Ne deduco quindi il:

TEOREMA II. — Sia $\{\varphi_n(I)\}$ una successione di funzioni d'insieme completamente additive in \mathfrak{F} e si supponga che in ogni successione $\{I_r\}$ di insiemi di \mathfrak{F} , a due a due privi di punti comuni, esista un insieme sul quale la successione converga. Allora le funzioni $\varphi_n(I)$ ($n = 1, 2, \dots$) sono equi-continue.

Tale proposizione, essendo la completa additività in \mathfrak{F} della funzione limite $\varphi(I)$ immediata conseguenza della equi-continuità delle funzioni della successione $\{\varphi_n(I)\}$, contiene evidentemente l'enunciato teorema di Saks.

1. Premettiamo la seguente proposizione:

a) Condizione (necessaria e) sufficiente affinché infinite funzioni, completamente additive in \mathfrak{F} , siano equi-continue, è che, per ogni successione $\{I_r\}$ di insiemi di \mathfrak{F} , a due a due privi di punti comuni, assegnato un $\varepsilon > 0$, si possa determinare un indice ρ (dipendente dalla successione data oltre che da ε) in modo tale che risulti:

$$|\varphi(I_r)| < \varepsilon$$

per $r > \rho$ e per tutte le funzioni φ della famiglia considerata.

A tale scopo, riferendoci per semplicità al caso di una successione $\{\varphi_n(I)\}$, neghiamo, per assurdo, l'asserto. Esisteranno allora una successione $\{E_r\}$ di insiemi di \mathfrak{F} , convergente verso l'insieme vuoto, ed un $\varepsilon > 0$, tali che, comunque si fissi l'intero positivo N , è possibile determinare due indici v e ρ , maggiori di N , in guisa tale che risulti:

$$|\varphi_v(E_\rho)| > \varepsilon.$$

(5) G. VITALI, *Sull'integrazione per serie*. « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », Tomo XXIII (1907), pp. 137-162. M. H. HAHN, *Ueber Folgen linearer Operationen*. « Monatshefte für Mathematik und Physik. », vol. 40 (1933), pp. 427-432; O. NIKODYM, *Sur les suites convergentes de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait*. « Monatshefte für Mathematik und Physik. », vol. 40 (1933), pp. 427-432; S. SAKS, *Addition to the note on some functionals*. « Transactions of the American Mathematical Society », vol. 35, n. 4, pp. 965-970.

Il teorema enunciato è di Saks. Più precisamente il Saks si riferisce a successioni di funzioni d'insieme assolutamente continue rispetto ad una stessa funzione d'insieme $M(I)$ non negativa e completamente additiva, ma osserva poi che, data una successione di funzioni d'insieme, completamente additive, esiste sempre una funzione d'insieme $M(I)$, rispetto alla quale le singole funzioni della successione siano assolutamente continue.

Nella forma enunciata nel testo, il teorema è stato recentemente ritrovato da V. M. DUBROVSKIĭ (cfr. lav. cit. in nota (2)).

Siano φ_{n_1} ed $E_{r_{11}}$ rispettivamente una funzione della successione $\{\varphi_n\}$ ed un insieme della successione $\{E_r\}$ tali che:

$$(2) \quad |\varphi_{n_1}(E_{r_{11}})| > \varepsilon$$

e detta $V_{n_1}(I)$ la variazione totale di φ_{n_1} , sia $\rho_1 > r_{11}$ un indice tale che:

$$(3) \quad V_{n_1}(E_r) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{per } r > \rho_1.$$

Fissato $N_1 > \max(n_1, \rho_1)$ si determinino gli indici n_2 ed r_{21} , maggiori di N_1 , in modo tale che si abbia:

$$(4) \quad |\varphi_{n_2}(E_{r_{21}})| > \varepsilon.$$

Posto $E_{r_{12}} = E_{r_{11}} - E_{r_{21}}$, per la (2) e la (3) si ha ovviamente:

$$(5) \quad |\varphi_{n_1}(E_{r_{12}})| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Detta $V_{n_2}(I)$ la variazione totale di φ_{n_2} , sia $\rho_2 > r_{21}$ un indice tale che:

$$(6) \quad V_{n_1}(E_r) < \frac{\varepsilon}{8}, \quad V_{n_2}(E_r) < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{per } r > \rho_2$$

e fissato $N_2 > \max(n_2, \rho_2)$ si determinino n_3 ed r_{31} , maggiori di N_2 , in modo tale che risulti:

$$|\varphi_{n_3}(E_{r_{31}})| > \varepsilon.$$

Posto $E_{r_{13}} = E_{r_{12}} - E_{r_{21}}$, $E_{r_{22}} = E_{r_{21}} - E_{r_{31}}$, per la (5) e la (6), nonché per la (4) e la (5) si ha rispettivamente:

$$|\varphi_{n_1}(E_{r_{13}})| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8}, \quad |\varphi_{n_2}(E_{r_{22}})| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{8}.$$

Così proseguendo si verranno a determinare infinite funzioni $\varphi_{n_i}(I)$, $\varphi_{n_2}(I), \dots, \varphi_{n_j}(I), \dots$ della successione $\{\varphi_n(I)\}$ ed infinite successioni di insiemi di \mathcal{F} :

$$(7) \quad E_{r_{11}}, E_{r_{12}}, \dots; E_{r_{21}}, E_{r_{22}}, \dots; \dots; E_{r_{j1}}, E_{r_{j2}}, \dots; \dots$$

in modo tale da soddisfare alle limitazioni:

$$(8) \quad |\varphi_{n_j}(E_{r_{jm}})| > \frac{\varepsilon}{2} \quad (j=1, 2, \dots; m=1, 2, \dots).$$

Si noti che:

$$E_{r_{jm}} \supset E_{r_{j(m+1)}} \quad (j=1, 2, \dots; m=1, 2, \dots)$$

e che gli insiemi (7) della j^{ma} successione non hanno punti in comune con gli insiemi di posto superiore all' j^{mo} delle precedenti. Posto quindi:

$$I_j = E_{n_{j1}} \cdot E_{n_{j2}} \cdot \dots \quad (j=1, 2, \dots),$$

gli insiemi della successione $\{I_j\}$ sono a due a due privi di punti comuni e per la (8) si ha:

$$|\varphi_{n_j}(I_j)| > \frac{\varepsilon}{2} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Ma ciò è assurdo perchè contrario alle ipotesi ⁽⁶⁾.

2. Dimostriamo ora il teorema I enunciato in prefazione. A tale scopo, in virtù della proposizione a), basta far vedere che, nelle ipotesi del teorema I:

b) *Data una successione $\{E_r\}$ di insiemi di \mathfrak{F} , a due a due privi di punti comuni, e fissato un $\varepsilon > 0$, si può determinare un indice ρ in guisa tale che risulti:*

$$|\varphi_n(E_r)| < \varepsilon \quad \text{per } r > \rho, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Si neghi la proposizione enunciata; esisteranno allora una successione $\{E_r\}$ di insiemi di \mathfrak{F} , a due a due privi di punti comuni, ed un numero $\varepsilon > 0$, tali che, comunque si fissi l'intero positivo N , è possibile determinare due indici ν e ρ , maggiori di N , in modo tale da avere:

$$|\varphi_\nu(E_\rho)| > \varepsilon.$$

(6) Abbiamo qui fruito di un noto ragionamento di Caccioppoli; cfr. lav. cit. in nota (2).

Si noti che dalla proposizione a) discende immediatamente:

a') *Condizione (necessaria e) sufficiente per l'equi-continuità delle funzioni completamente additive in \mathfrak{F} di una famiglia è che per ogni successione $\{I_r\}$ di insiemi di \mathfrak{F} , a due a due privi di punti comuni, dato un $\varepsilon > 0$, si possa determinare un indice ρ (dipendente dalla successione oltre che da ε) in modo tale che si abbia $|\varphi(I_r + I_{r+1} + \dots)| < \varepsilon$ per $r > \rho$ e per tutte le φ della famiglia.*

Riferendoci per semplicità al caso di una successione $\{\varphi_n\}$, neghiamo la proposizione enunciata. In virtù della proposizione a) esisteranno allora una successione $\{E_r\}$ di insiemi di \mathfrak{F} , a due a due privi di punti comuni, ed un $\varepsilon > 0$, tali che, comunque si fissi l'intero positivo N , è possibile determinare due indici ν e ρ , maggiori di N , in guisa tale che risulti $|\varphi_\nu(E_\rho)| > \varepsilon$.

Siano φ_{n_1} ed E_{r_1} rispettivamente una funzione della successione $\{\varphi_n\}$ ed un insieme di $\{E_r\}$, tali che $|\varphi_{n_1}(E_{r_1})| > \varepsilon$.

Fissata una successione di numeri positivi $\{\varepsilon_i\}$ tale che $\sum \varepsilon_i < \varepsilon/2$, sia $\rho_1 > r_1$ un indice per cui $|\varphi_{n_1}(E_r)| < \varepsilon_2$ per $r > \rho_1$. Fissato $N_1 > \max(n_1, \rho_1)$, si determinino gli indici n_2 ed r_2 , maggiori di N_1 , in modo tale che $|\varphi_{n_2}(E_{r_2})| > \varepsilon$ e sia $\rho_2 > r_2$ un indice per cui $|\varphi_{n_1}(E_r)| < \varepsilon_3$, $|\varphi_{n_2}(E_r)| < \varepsilon_3$ per $r > \rho_2$. Fissato $N_2 > \max(n_2, \rho_2)$, si determinino gli indici n_3 ed r_3 , maggiori di N_2 , in modo tale che $|\varphi_{n_3}(E_{r_3})| > \varepsilon$ e sia $\rho_3 > r_3$ un indice per cui $|\varphi_{n_1}(E_r)| < \varepsilon_4$, $|\varphi_{n_2}(E_r)| < \varepsilon_4$, $|\varphi_{n_3}(E_r)| < \varepsilon_4$ per $r > \rho_3$.

Così proseguendo si verrebbe ad estrarre dalla successione $\{\varphi_n\}$ una successione $\{\varphi_{n_j}\}$ e dalla successione $\{E_r\}$ una successione $\{E_{r_j}\}$ in modo tale da soddisfare alle limitazioni:

$$|\varphi_{n_j}(E_{r_j})| > \varepsilon \quad \text{per } j = 1, 2, \dots; \quad |\varphi_{n_j}(E_{r_i})| < \varepsilon_i \quad \text{per } i > j.$$

Essendo gli insiemi E_{r_j} a due a due privi di punti comuni risulterebbe quindi:

$$|\varphi_{n_j}(E_{r_j} + E_{r_{j+1}} + \dots)| \geq |\varphi_{n_j}(E_{r_j})| - \sum_{i=j+1}^{\infty} |\varphi_{n_j}(E_{r_i})| > \frac{\varepsilon}{2} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Ma ciò è assurdo perchè in contrasto con le ipotesi.

Dalle successioni $\{\varphi_n\}$ ed $\{E_r\}$ si potranno quindi estrarre le successioni, che per semplicità di scrittura indicheremo ancora con $\{\varphi_n\}$ ed $\{E_r\}$, in modo tale che sia:

$$|\varphi_n(E_n)| > \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Fissata la successione di numeri positivi $\{\varepsilon_i\}$ tale che:

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2},$$

nelle ipotesi del teorema I, dalla successione $\{E_r\}$ se ne può estrarre una, che indicheremo ancora con $\{E_r\}$, in modo tale che si abbia:

$$|\varphi_n(E_i)| < \varepsilon_i \quad \text{per } n > v_i \quad (i = 1, 2, \dots; v_i > i).$$

Ciò posto, detto E_{r_1} un insieme della successione $\{E_r\}$, si determini un indice $\rho_1 > r_1$ per il quale risulti:

$$|\varphi_{r_1}(E_r)| < \varepsilon_{r_1} \quad \text{per } r > \rho_1.$$

Fissato ρ_1 , sia E_{r_2} un insieme della successione $\{E_r\}$, con indice $r_2 > \max(\rho_1, v_{r_1})$, e si determini $\rho_2 > r_2$ in modo da avere simultaneamente:

$$|\varphi_{r_1}(E_r)| < \varepsilon_{r_2}, \quad |\varphi_{r_2}(E_r)| < \varepsilon_{r_2} \quad \text{per } r > \rho_2.$$

Fissato ρ_2 , sia E_{r_3} un insieme della successione $\{E_r\}$, con indice $r_3 > \max(\rho_2, v_{r_2})$, e si determini $\rho_3 > r_3$ in modo da avere simultaneamente:

$$|\varphi_{r_1}(E_r)| < \varepsilon_{r_3}, \quad |\varphi_{r_2}(E_r)| < \varepsilon_{r_3}, \quad |\varphi_{r_3}(E_r)| < \varepsilon_{r_3} \quad \text{per } r > \rho_3.$$

Così proseguendo si viene ad estrarre dalla successione $\{E_r\}$ una successione $\{E_{r_k}\}$ e dalla successione $\{\varphi_n\}$ una successione $\{\varphi_{r_k}\}$, in modo tale da soddisfare alle limitazioni:

$$(10) \quad |\varphi_{r_h}(E_{r_k})| > \varepsilon \quad \text{per } h = k; \quad |\varphi_{r_h}(E_{r_k})| < \varepsilon_{r_k} \quad \text{per } h < k;$$

$$|\varphi_{r_h}(E_{r_k})| < \varepsilon_{r_{k-1}} \quad \text{per } h > k.$$

Se quindi si considera una qualunque successione estratta da $\{E_{r_k}\}$, successione che per semplicità indicheremo ancora con $\{E_{r_k}\}$, e si pone:

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_{r_k},$$

essendo gli insiemi E_{r_k} a due a due privi di punti comuni, per la (10) e la (9) si avrà:

$$|\varphi_{n_k}(E)| \geq |\varphi_{n_k}(E_{r_k})| - \sum_{h \neq k} |\varphi_{n_k}(E_{r_h})| > \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

In altri termini, presi ad arbitrio infiniti insiemi della successione $\{E_{r_k}\}$ ed indicatane con E la somma, esistono sempre infinite funzioni della successione $\{\varphi_n\}$, che su tale insieme risultano in valore assoluto maggiori di $\varepsilon/2$.

Estraiamo allora dalla successione $\{E_{r_h}\}$ infinite successioni:

$$E_{11}, E_{12}, \dots; E_{21}, E_{22}, \dots; \dots; E_{i1}, E_{i2}, \dots; \dots,$$

tali che ognuna di esse non possieda elementi delle altre. Poniamo indi:

$$I_i = E_{i1} + E_{i2} + \dots \quad (i = 1, 2, \dots)$$

e consideriamo la successione $\{I_i\}$ costituita ovviamente da insiemi di \mathfrak{F} a due a due privi di punti comuni.

Per quanto abbiamo prima osservato, per ogni insieme di $\{I_i\}$ esisterebbero infinite funzioni della successione $\{\varphi_n\}$, che su di esso risultano in valore assoluto maggiori di $\varepsilon/2$; ma ciò è assurdo perchè contro le ipotesi.

3. Per dimostrare il teorema II, basta far vedere che, nelle ipotesi ivi poste, sono verificate quelle del teorema I. A tale scopo, indicata con \mathfrak{F}_1 la sotto-famiglia di insiemi di \mathfrak{F} , sui quali la successione $\{\varphi_n\}$ converge, e posto, per ogni insieme I di \mathfrak{F}_1 ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(I) = \varphi(I),$$

premettiamo la seguente proposizione:

c) Sia $\{E_r\}$ una successione di insiemi di \mathfrak{F}_1 , a due a due privi di punti comuni; allora, fissato un $\varepsilon > 0$, si può determinare un indice ρ in modo tale che risulti $|\varphi(E_r)| < \varepsilon$ per $r > \rho$.

Si neghi l'asserto; esisterà allora un $\varepsilon > 0$ in corrispondenza del quale si potranno determinare infiniti insiemi della successione $\{E_r\}$, sui quali $\varphi(I)$ è in valore assoluto maggiore di ε . Su infiniti di tali insiemi la φ assumerà valore dello stesso segno, che senza venir meno alla generalità, possiamo supporre positivo.

Sia allora E_{r_1} , un insieme della successione tale che:

$$\varphi(E_{r_1}) > \varepsilon.$$

Poichè la successione $\{\varphi_n(E_{r_1})\}$ converge verso $\varphi(E_{r_1})$, si può determinare un indice n_1 in modo tale che si abbia:

$$\varphi_n(E_{r_1}) > \varepsilon \quad \text{per } n \geq n_1.$$

Fissata la successione di numeri positivi $\{\varepsilon_i\}$ in modo tale che:

$$(II) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon,$$

sia $\rho_1 > r_1$ un indice per il quale risulti:

$$|\varphi_{n_1}(E_r)| < \varepsilon_2 \quad \text{per } r > \rho_1.$$

Fissato ρ_1 , sia E_{r_2} un insieme della successione $\{E_r\}$, con indice $r_2 > \rho_1$, tale che:

$$\varphi(E_{r_2}) > \varepsilon$$

e si determini $n_2 > n_1$ in modo tale da avere:

$$\varphi_n(E_{r_2}) > \varepsilon \quad \text{per } n \geq n_2.$$

Sia $\rho_2 > r_2$ un indice per il quale si abbia simultaneamente:

$$|\varphi_{n_1}(E_r)| < \varepsilon_3 \quad \text{per } r > \rho_2$$

e, fissato ρ_2 , sia E_{r_3} un insieme della successione $\{E_r\}$, con indice $r_3 > \rho_2$, tale che:

$$\varphi(E_{r_3}) > \varepsilon.$$

Si determini indi $n_3 > n_2$ in modo tale che risulti:

$$\varphi_n(E_{r_3}) > \varepsilon \quad \text{per } n > n_3.$$

Così proseguendo si viene ad estrarre dalla successione $\{E_r\}$ una successione $\{E_{r_i}\}$ e dalla successione $\{\varphi_n\}$ una successione $\{\varphi_{n_k}\}$ in modo tale da soddisfare alle limitazioni:

$$(12) \quad \varphi_{n_k}(E_{r_i}) > \varepsilon \quad \text{per } i \leq k, \quad |\varphi_{n_k}(E_{r_i})| < \varepsilon_i \quad \text{per } i > k \quad (k=1, 2, \dots).$$

Se quindi si considera una qualunque successione estratta da $\{E_{r_i}\}$, successione che indicheremo ancora con $\{E_{r_i}\}$, e si pone:

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_{r_i},$$

essendo gli insiemi E_{r_i} a due a due privi di punti comuni, per la (12) e la (11) si avrà:

$$|\varphi_{n_k}(E)| \geq \sum_{i=1}^k \varphi_{n_k}(E_{r_i}) - \sum_{i=k+1}^{\infty} |\varphi_{n_k}(E_{r_i})| > (k-1)\varepsilon \quad (k=1, 2, \dots).$$

In altri termini, presi ad arbitrio infiniti insiemi della successione $\{E_{r_i}\}$ ed indicatane con E la somma, esiste sempre una successione estratta da $\{\varphi_n\}$, che su tale insieme E diverge.

Estraiamo allora dalla successione $\{E_{r_i}\}$ infinite successioni:

$$E_{11}, E_{12}, \dots; E_{21}, E_{22}, \dots; \dots; E_{i1}, E_{i2}, \dots; \dots,$$

tali che ognuna di esse non possieda elementi delle altre. Poniamo indi:

$$I_i = E_{i1} + E_{i2} + \dots \quad (i=1, 2, \dots)$$

e consideriamo la successione $\{I_i\}$ costituita ovviamente da insiemi di \mathcal{F} a due a due privi di punti comuni. Per quanto abbiamo prima osservato, per ogni insieme di $\{I_i\}$ si può estrarre dalla successione $\{\varphi_n\}$ una successione divergente su di esso; ma ciò è manifestamente assurdo perchè in contrasto con le ipotesi.

Dall'acquisita proposizione a) segue immediatamente il teorema II. Basta osservare che, nelle ipotesi ivi poste, da ogni successione di insiemi di \mathcal{F} a due a due privi di punti comuni, se ne può estrarre una, su ogni insieme della quale la successione $\{\varphi_n\}$ converge.

Analisi matematica. — *L'equazione $p = f(x, y, z, q)$ e l'unicità.*
 Nota di EMILIO BAJADA, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Il problema dell'unicità dell'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine:

$$p = f(x, y, z, q)$$

con i dati iniziali, è stato trattato da numerosi Autori (1).

Vogliamo qui far vedere, pur non trattando il problema nella sua estrema generalità, come un risultato molto indicativo si possa raggiungere mediante semplici considerazioni che non richiedono risultati che non si possano ammettere quali elementari. Il metodo qui suggerito, può però essere applicato anche a casi più complessi, ma ciò implicherebbe maggiori dettagli dimostrativi, e non è stato ritenuto opportuno, visto il valore solo indicativo del teorema di unicità raggiunto, di appesantire la trattazione.

2. Una funzione $u(x, y)$, definita sul quadrato unitario si dice *assolutamente continua rispetto a x , super uniformemente rispetto a y* quando: comunque fissato un ϵ positivo, si può determinare un δ positivo con la proprietà che se si prende un plurintervallo $\Delta = \Sigma (a_i, b_i)$ di ampiezza complessiva minore di δ , sia:

$$\sum_i |u(a_i, y_i) - u(b_i, y_i)| \leq \epsilon,$$

qualunque sia il valore di y_i , scelto però in modo che i punti (a_i, y_i) , (b_i, y_i) appartengano al quadrato di definizione.

E assolutamente continua rispetto a x , super uniformemente rispetto a y una funzione $u(x, y)$, se essa risulta assolutamente continua rispetto a x , per ogni y fissato, e la derivata $u_x(x, y)$ sia maggiorabile, in valore assoluto con una funzione della sola x sommabile in $(0, 1)$ (2). Basterà tener conto che:

$$u(x, y) = \int_0^x u_x(x, y) dx.$$

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) La Bibliografia sull'argomento specie della scuola Polacca e quella Italiana, è molto vasta, per notizie parziali confronta ad esempio E. BAJADA, *Teorema di unicità* in questi « Rendiconti », vol. XI (1951), p. 158.

(2) Riguardo all'assoluta continuità super uniforme vedere un lavoro di G. DARBO di prossima pubblicazione.

Dimostriamo ora il seguente lemma:

LEMMA. - Sia $u(x, y)$ una funzione di due variabili reali, definita e continua nel triangolo rettangolo T , isoscele, avente per ipotenusa il segmento definito da:

$$x = \bar{x} \quad ; \quad y_1 \leq y \leq y_2,$$

e con l'angolo retto diretto verso le x negative;

la funzione $u(x, y)$ sia inoltre assolutamente continua rispetto a x super uniformemente rispetto a y ;

eccetto un insieme di punti E che si proietti sull'asse x su un insieme di misura nulla, la funzione $u(x, y)$ sia o nulla oppure abbia almeno una delle derivate secondo le direzioni definite dai cateti di T positiva;

la funzione $u(x, y)$ sia nulla sulla ipotenusa $x = \bar{x}$;

allora la funzione $u(x, y)$ sarà negativa o nulla su tutto T .

Dimostrazione. - Sia P un punto non appartenente a E e supponiamo che $u(P) = k$, dove k è un numero positivo. Per le ipotesi possiamo determinare un d positivo, tale che, comunque si prenda un plurintervallo chiuso $\bar{\Delta} = \Sigma[\alpha_i, \beta_i]$ di ampiezza complessiva minore di d , avvenga:

$$(3) \quad \Sigma |u(\alpha_i, y_i) - u(\beta_i, y_i)| \leq k/2,$$

dove y_i è un valore comunque scelto, generalmente variabile con l'intervallo (α_i, β_i) .

Sempre per le ipotesi possiamo costruire un plurintervallo Δ_d aperto: $\Delta_d = \Sigma(a_i, b_i)$, di ampiezza minore di d , tale che le strisce: $\bar{E} = \Delta_d \times I$, le quali si proiettano sull'asse delle x nel plurintervallo Δ_d , contengano tutti i punti dell'insieme E .

Per ipotesi, in P , non essendo nulla la funzione u , una delle due derivate parziali lungo le direzioni d_1 e d_2 determinate dai cateti del triangolo T , esiste ed è positiva. Consideriamo allora l'insieme Γ_P dei punti Q di T per cui:

$$u(Q) \geq u(P).$$

Quest'insieme è chiuso e l'insieme $\Gamma_P - P$ non è vuoto.

Sia Q_1 uno dei punti di Γ_P che hanno minima distanza dalla retta $x = \bar{x}$ (si può precisare la scelta di uno di essi). Se questa distanza fosse nulla si avrebbe una contraddizione, poichè, evidentemente $u(Q_1) = k$. D'altra parte il punto Q_1 deve necessariamente appartenere a \bar{E} , perchè, in caso contrario, non essendo $u(Q_1)$ nullo una delle due derivate direzionali risultando positiva, esisterebbe un punto dell'insieme Γ_P più vicino dalla retta $x = \bar{x}$ che non lo sia Q_1 .

Chiamando, con $(a_i, b_i) \times I$ la striscia aperta di \bar{E} in cui si trova Q_1 , e con P_1 il punto con la stessa ordinata di Q_1 ma di ascissa uguale a b_i , avremo, a causa della relazione (3), $u(P_1) > 0$, ed in esso una delle due derivate direzionali d_1 o d_2 esiste ed è positiva.

Si ripeta la costruzione a partire da P_1 anzichè da P e si ottenga analogamente un punto Q_2 , ed eventualmente un punto P_2 in cui sarà $u(P_2) > 0$, sempre usando la (3). Si prosegue, così operando, se possibile, indefinitamente.

Dimostriamo ora che non è possibile eseguire un'infinità numerabile di operazioni senza raggiungere la ordinata $x = \bar{x}$.

Supponiamo, infatti, che dopo un'infinità numerabile di operazioni i punti P_n le cui ascisse sono sempre crescenti abbiano per punto d'accumulazione un punto P_0 non sull'ordinata $x = \bar{x}$. Naturalmente anche i punti Q_n si accumuleranno in P_0 , perchè la somma degli intervalli (a_i, b_i) è una serie convergente. Il punto P_0 non può per tanto appartenere a una striscia $(a_j, b_j) \times I$ (ricordiamo che le strisce sono considerate aperte e i punti Q_n sono interni a queste strisce) e siccome in esso, sempre per la (3), la funzione $u(x, y)$ non si annulla, ivi una almeno delle derivate direzionali esisterebbe positiva. Esisterebbe così un punto \bar{P} più vicino dalla ordinata $x = \bar{x}$ che non lo sia P_0 , in cui:

$$u(\bar{P}) > u(P_0).$$

Possiamo quindi costruire un intorno di P_0 in cui, se P è un punto qualunque di quest'intorno, è sempre:

$$u(\bar{P}) > u(P).$$

In conseguenza i punti Q_n non possono accumularsi intorno a P_0 , perchè rimarrebbe non vera, per essi, la proprietà di essere i punti più vicini dalla ordinata $x = \bar{x}$, in cui $u(Q_n) \geq u(P_n)$, esistendo il punto \bar{P} più vicino ancora da questa ordinata.

Otteniamo così che con un numero finito o tutt'al più con un'infinità numerabile di operazioni del tipo descritto sopra si raggiunge la ordinata $x = \bar{x}$, e si avrà, sempre usando la (3) che:

$$0 \geq u(P) - k/2,$$

e ciò è evidentemente assurdo.

È così provato che $u(P)$ non può essere positivo. A causa poi della continuità di $u(x, y)$, possiamo così affermare il lemma.

3. Facendo uso del lemma precedente si ottiene il seguente teorema di unicità:

TEOREMA. — *Un'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine:*

$$(I) \quad p = f(x, y, z, q),$$

dove il secondo membro sia Lipschitziano rispetto a z e a q (in senso stretto, rispetto a z) ⁽³⁾ con costante $1/\sqrt{2}$, ammette al più una sola soluzione nel triangolo isoscele T avente per ipotenusa il segmento $x = \bar{x}$, $y_1 \leq y \leq y_2$, con l'angolo retto rivolto verso le x positive, dove la (I) sia pure definita, qualunque siano z e q , quando s'intenda che la soluzione si debba annullare per $x = \bar{x}$ e debba appartenere alla classe delle funzioni continue rispetto a (x, y) e assolutamente continue rispetto a x , super uniformemente rispetto a y , ammet-

(3) S'intende con ciò che il segno di eguaglianza nella limitazione di Lipschitz, possa valere solo se $|z_1 - z_2| = 0$. Il teorema vale pure nel caso generale, ma la trattazione perderebbe un po' della sua semplicità.

tenti differenziale totale in T esclusi al più i punti di un insieme E proiettantesi sull'asse delle x su un insieme di misura nulla. E ciò anche se per soluzioni si ammettano funzioni soddisfacenti la (1) eccettuato al più un insieme qualunque che si proietti su l'asse x su un insieme di misura nulla.

Siano $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ due soluzioni della (1) soddisfacenti alle condizioni del teorema.

Se poniamo:

$$u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y) \quad , \quad v(x, y) = |u(x, y)|,$$

abbiamo che, in ogni punto ove la $u(x, y)$ non si annulla ed ammette differenziale totale, anche la funzione $v(x, y)$ ammette differenziale totale ed avremo:

$$|v_x| = |u_x| \quad ; \quad |v_y| = |u_y|;$$

conseguentemente e per la condizione di Lipschitz su la f , avremo:

$$|v_x| - |v_y| - |v| \leq 0.$$

Questa relazione si può scrivere, se $v_y \leq 0$, $v \neq 0$:

$$v_x + v_y - v < 0,$$

mentre se $v_y \geq 0$, $v \neq 0$, avremo:

$$v_x - v_y - v < 0.$$

Consideriamo ora la funzione:

$$\Phi(x, y) = e^{-x} v(x, y).$$

Questa funzione possiede le stesse proprietà di differenziabilità della funzione v , che sono poi quelle della u , laddove questa non sia nulla. Inoltre la Φ si annulla per $x = \bar{x}$. Le derivate, lungo le direzioni dei cateti di T sono:

$$D_{\nearrow} \Phi(x, y) = e^{-x} (-v_x - v_y + v),$$

$$D_{\nwarrow} \Phi(x, y) = e^{-x} (-v_x + v_y + v).$$

Una di queste derivate è positiva in ogni punto di T in cui $u(x, y)$ è differenziabile e diversa da zero. Il Lemma precedente ci assicura così il risultato enunciato dal teorema.

4. Colgo l'occasione per segnalare alcune correzioni da portare alla Nota *Teorema di unicità...* apparsa in questi « Rendiconti », volume XI, pp. 158-164 (1951).

Errata

Corrige

Pg. 160, riga 15 dal basso:

Lipschitziane nel complesso delle due variabili...

Lipschitziane nel complesso delle due variabili e con differenziale totale quasi dappertutto in modo regolare.

Errata

Corrige

P. 161, riga 13 dal basso:

superficiale nulla...

superficiale nulla ed eccetto i punti in cui
 $u = 0$,

P. 162, riga 2 dal basso:

$u(x, y)$ sia inoltre Lipschitziana con costante A .

$u(x, y)$ sia inoltre Lipschitziana con costante A e con differenziale totale quasi ovunque in modo regolare.

P. 162, riga 3 dal basso:

$$y = a > 0,$$

$$y = a < 0,$$

P. 163, riga 2 dall'alto:

$$u(x, 0) = 0.$$

$$u(x, a) = 0.$$

P. 163, riga 13 dall'alto:

$$\vartheta(x, y) = e^{-y} v(x, y) + \varepsilon.$$

$$\vartheta(x, y) = e^{-y} v(x, y) + \varepsilon(a - y)$$

P. 163, riga 15 dall'alto:

$$\vartheta(x, 0) = 0.$$

$$\vartheta(x, a) = 0.$$

Inserire all'inizio del n. 3 la seguente:

Avvertenza: Gli insiemi di misura nulla qui considerati sono tutti del tipo *regolare*, cioè tali che si proiettano su insiemi di misura nulla sugli assi x e y .

Analisi matematica. — *Sui caratteri delle rappresentazioni del gruppo simmetrico.* Nota di AUGUSTO GAMBA, presentata (*) dal Socio U. AMALDI.

Il gruppo simmetrico π_m delle permutazioni di m elementi ammette tante rappresentazioni irriducibili quante sono le partizioni di m in numeri interi $m - p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ con $p = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r$, $m - p \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$. Indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ una classe di permutazioni di π_m , e precisamente quella costituita dalle permutazioni composte di α_1 cicli di ordine 1, α_2 cicli di ordine 2, \dots , α_s cicli di ordine s , il valore del carattere

$$(1) \quad X_{m-p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$$

della rappresentazione $m - p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ per la classe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ si può calcolare con un metodo classico dovuto a Frobenius (1).

Recentemente Murnaghan ha segnalato (2) come dalla regola di Frobenius si possano ottenere i caratteri con un procedimento non soltanto più rapido

(*) Nella seduta del 9 febbraio 1952.

(1) FROBENIUS, « Sitz. Berl. Akad. », 516 (1900).

(2) F. D. MURNAGHAN, « Proc. Nat. Ac. Sc. USA », 37, 55 (1951).

e comodo, ma che permette di dare il carattere (1), per $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ dati e m qualunque, come funzione esplicita di $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$. Si ottengono così formule di grande generalità, valide per un gruppo π_m affatto arbitrario.

In questa Nota è data una ulteriore semplificazione della regola di Murnaghan. Sebbene in apparenza assai differente, in realtà essa non contiene sostanzialmente nulla di nuovo, e non richiede quindi una nuova dimostrazione. Si tratta piuttosto di una reinterpretazione delle operazioni che occorre eseguire con la regola di Murnaghan, reinterpretazione che risulta evidente appena si confrontano le operazioni della regola di Murnaghan con quelle indicate nella presente Nota. Ai fini di una valutazione pratica dei caratteri (1), la regola qui data risulta però notevolmente più semplice e rapida.

Essa è superiore alla regola di Murnaghan per le seguenti ragioni:

1° Delle due operazioni che Murnaghan indica col nome di « integrazione » e « derivazione » (ogni riferimento alle operazioni omonime dell'analisi è puramente casuale!) è conservata in una forma semplificata solo la seconda.

2° La formula finale è scritta immediatamente senza che sia necessario il procedimento di Murnaghan per stabilire successivamente la dipendenza da $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$.

3° Nessun termine si ripresenta più volte, e *nessuno va quindi eliminato*. Soltanto calcolando esplicitamente qualche carattere ci si può render conto di quanto grave sia questa necessità nella regola di Murnaghan. Infatti per la comodità dell'« integrazione » (che è essenzialmente l'operazione inversa di una differenza finita) occorre avere i polinomi scritti in modo che compaiano solo coefficienti binomiali; per eseguire l'« eliminazione » occorre averli nella forma consueta con le potenze. Si deve continuamente passare da una forma all'altra con notevole spreco di tempo e possibilità di errori. Nessuna di tali difficoltà sussiste nella nuova regola.

4° È tolta la dissimmetria fra il calcolo della dipendenza da α_1 (che si otteneva tramite la formula delle dimensioni di Frobenius, ora non più necessaria) e quello della dipendenza da $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$.

La regola di Murnaghan modificata si può enunciare nel modo seguente: Il carattere (1) è dato da

$$(2) \quad X_{m-p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \\ = \sum \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \}_{1^a 2^b 3^c \dots s^k} \binom{\alpha_1}{a} \binom{\alpha_2}{b} \binom{\alpha_3}{c} \dots \binom{\alpha_s}{k}$$

dove: a) la somma va estesa a tutti gli a, b, c, \dots, k per cui

$$1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c + \dots + s \cdot k \leq p;$$

b) un simbolo $\{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \}$ vale +1 o -1, se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 1$ a seconda che r è pari o dispari; vale zero in tutti gli altri casi;

c) un simbolo

$$(3) \quad \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \}_q = \{ \lambda_1 - q, \lambda_2, \dots, \lambda_r \} + \\ + \{ \lambda_1, \lambda_2 - q, \dots, \lambda_r \} + \dots + \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r - q \}.$$

I termini a secondo membro della (3) che non risultassero ordinati (cioè della forma $\lambda_i \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$) si debbono riordinare ricordando che

$$(4) \quad \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r\} = -\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i+1} - 1, \lambda_i + 1, \dots, \lambda_r\}.$$

I termini che non si potessero ordinare per applicazioni successive del procedimento (4) (per esempio i termini per i quali $\lambda_r < 0$) sono nulli.

Per mezzo dei procedimenti (3) e (4) i termini del tipo

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}_{1^a 2^b 3^c \dots k^d} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}_{\underbrace{11 \dots 1}_a \underbrace{22 \dots 2}_b \dots \underbrace{ss \dots s}_k},$$

che compaiono nella (2) si possono ricondurre a termini del tipo $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$, il cui valore è dato in *b*).

Illustreremo ora il procedimento con un esempio. Sia da calcolare

$$\begin{aligned} X_{m-6,4,2}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) &= \{4, 2\} \cdot \{4, 2\}_1 \cdot \binom{\alpha_1}{1} + \{4, 2\}_{11} \cdot \binom{\alpha_1}{2} + \\ &+ \{4, 2\}_{111} \cdot \binom{\alpha_1}{3} + \{4, 2\}_{1111} \cdot \binom{\alpha_1}{4} + \{4, 2\}_{11111} \cdot \binom{\alpha_1}{5} + \{4, 2\}_{111111} \cdot \binom{\alpha_1}{6} + \\ &+ \{4, 2\}_{12} \cdot \binom{\alpha_1}{1} \binom{\alpha_2}{1} + \{4, 2\}_{112} \cdot \binom{\alpha_1}{2} \binom{\alpha_2}{1} + \{4, 2\}_{1112} \cdot \binom{\alpha_1}{3} \binom{\alpha_2}{1} + \\ &+ \{4, 2\}_{11112} \cdot \binom{\alpha_1}{4} \binom{\alpha_2}{1} + \{4, 2\}_{122} \cdot \binom{\alpha_1}{1} \binom{\alpha_2}{2} + \{4, 2\}_{1122} \cdot \binom{\alpha_1}{2} \binom{\alpha_2}{2} + \\ &+ \{4, 2\}_{11122} \cdot \binom{\alpha_1}{3} \binom{\alpha_2}{2} + \{4, 2\}_{1222} \cdot \binom{\alpha_1}{1} \binom{\alpha_2}{3} + \{4, 2\}_{11222} \cdot \binom{\alpha_1}{2} \binom{\alpha_2}{3} + \\ &+ \{4, 2\}_{111222} \cdot \binom{\alpha_1}{3} \binom{\alpha_2}{3} + \{4, 2\}_{23} \cdot \binom{\alpha_1}{1} \binom{\alpha_3}{1} + \{4, 2\}_{123} \cdot \binom{\alpha_1}{2} \binom{\alpha_3}{1} + \{4, 2\}_{1123} \cdot \binom{\alpha_1}{3} \binom{\alpha_3}{1} + \\ &+ \{4, 2\}_{233} \cdot \binom{\alpha_1}{1} \binom{\alpha_3}{2} + \{4, 2\}_{33} \cdot \binom{\alpha_1}{1} \binom{\alpha_3}{3} + \{4, 2\}_{333} \cdot \binom{\alpha_1}{1} \binom{\alpha_3}{4} + \\ &+ \{4, 2\}_{1233} \cdot \binom{\alpha_1}{2} \binom{\alpha_3}{3} + \{4, 2\}_{234} \cdot \binom{\alpha_1}{1} \binom{\alpha_4}{1} + \{4, 2\}_{1234} \cdot \binom{\alpha_1}{2} \binom{\alpha_4}{1} + \\ &+ \{4, 2\}_{11234} \cdot \binom{\alpha_1}{3} \binom{\alpha_4}{1} + \{4, 2\}_{1235} \cdot \binom{\alpha_1}{1} \binom{\alpha_5}{1} + \{4, 2\}_{11235} \cdot \binom{\alpha_1}{2} \binom{\alpha_5}{1} + \{4, 2\}_{111235} \cdot \binom{\alpha_1}{3} \binom{\alpha_5}{1} + \end{aligned}$$

Riportiamo esplicitamente le operazioni necessarie per valutare uno dei simboli a fattore dei coefficienti binomiali, per esempio $\{4, 2\}_{23}$. Si ha:

$$\begin{aligned} \{4, 2\}_{23} &= \{2, 2\}_3 + \{4\}_3 = \{-1, 2\} + \{2, -1\} + \{1\} = \\ &= -\{1\} + \{2, -1\} + \{1\} = -(-1) + 0 - (+1) = 0. \end{aligned}$$

Operando analogamente sugli altri simboli si ottiene in definitiva:

$$\begin{aligned} X_{m-6,4,2}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) &= 3 \binom{\alpha_1}{4} - 9 \binom{\alpha_1}{5} + 9 \binom{\alpha_1}{6} - \alpha_2 \binom{\alpha_1}{2} - 3 \alpha_2 \binom{\alpha_1}{3} + \\ &+ 3 \alpha_2 \binom{\alpha_1}{4} - \alpha_1 \binom{\alpha_2}{2} + \binom{\alpha_1}{2} \binom{\alpha_2}{2} - \binom{\alpha_2}{2} + 3 \binom{\alpha_2}{3} + \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_4 \binom{\alpha_1}{2} + \\ &+ \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_5. \end{aligned}$$

Equazioni differenziali. — *Sulla stabilità delle soluzioni per la equazione: $x'' + B(t)x = 0$.* Nota di UGO BARBUTI, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

È noto che gli integrali della equazione:

$$(1) \quad x'' + B(t)x = 0,$$

(nella quale $B(t)$ è supposta definita in $(t^0, +\infty)$), riescono tutti stabili (2) nei seguenti casi (che denoteremo con i simboli introdotti da G. Ascoli):

Criterio (I). — Esiste una costante positiva b^2 , tale che posto:

$$B(t) = b^2 - C(t),$$

$C(t)$ riesce assolutamente integrabile in $(t^0, +\infty)$ (Fukuara-Nagumo) [2].

Criterio (VL). — $B(t)$ è a variazione limitata in $(t^0, +\infty)$ e il limite a cui tende per $t \rightarrow +\infty$ è positivo (Caccioppoli) [3] (2).

È noto anche che il criterio (I) può ottenersi da un fondamentale teorema di stabilità per « confronto » dovuto a G. Ascoli [5] per la equazione (1) ed esteso ai sistemi lineari da D. Caligo.

Esso afferma:

Gli integrali della (1) sono tutti stabili se lo sono quelli della equazione:

$$(2) \quad x'' + A(t)x = 0;$$

dove $A(t) = B(t) + \lambda(t)$, e $\lambda(t)$ è assolutamente integrabile in $(t^0, +\infty)$.

Un esempio che sfugge ai criteri precedenti, proposto e studiato da G. Ascoli (Cfr. [6] Nota II) ha dato origine a due recentissime note di G. Prodi [7]. In esse si provano alcuni teoremi che estendono separatamente il caso (I) (in modo da comprendere anche nuovi esempi del tipo di quello segnalato dall'Ascoli) e il criterio (VL).

In questa Nota espongo un nuovo teorema di stabilità, che ammette una formulazione assai semplice e contempla i nuovi casi. Da questo si riottiene, tra l'altro, un enunciato conseguito dal Prodi.

Il metodo col quale si perviene a tale teorema si fonda su di uno sviluppo formale, già usato da G. Ascoli (Cfr. [6], Nota II) nello studio diretto del caso particolare su menzionato. Tale metodo conduce, utilizzando il criterio di stabilità per confronto su enunciato, a confrontare la equazione (1) con una famiglia di equazioni di tipo (2).

(*) Nella seduta del 9 febbraio 1952.

(1) Le parentesi quadre indicano la bibliografia che sta in ultimo.

(2) Accanto a questi criteri va ricordata una recente proposizione dovuta ad L. A. GUSAROV [4]. Essa afferma che: « Le soluzioni della (1) sono stabili se $B(t)$ finisce per variare tra due numeri positivi ed ha derivata a variazione limitata in $(t^0, +\infty)$ ».

1. Consideriamo da prima alcuni sviluppi formali importanti per il seguito. Assumiamo due integrali della (2) nella forma:

$$(3) \quad x_1(t) = e^u \operatorname{sen} v, \quad x_2(t) = e^u \cos v,$$

dove supponiamo $u(t), v(t)$ funzioni di t derivabili due volte. Il wronskiano delle $x_1, x_2: W(x_1, x_2)$, risulta avere il valore:

$$(4) \quad W(x_1, x_2) = -e^{2u} v'.$$

Se ora prendiamo, assegnata che sia $u(t), v(t)$ del tipo:

$$(5) \quad v(t) = b \int_0^t e^{-2u(\tau)} d\tau + c,$$

dove b, c sono due costanti arbitrarie, la $A(t)$ assume la forma ⁽³⁾

$$(6) \quad A(t) = -u'' - u'^2 + b^2 e^{-4u};$$

come con facili calcoli può verificarsi. Nella (4) $W(x_1, x_2)$ riesce allora diverso da zero, se $b \neq 0$.

Sostituendo ad e^{-4u} il suo sviluppo per le potenze di u , si ottiene per $A(t)$ la espressione:

$$(6') \quad A(t) = b^2 - 4b^2 u - u'' + \lambda(t),$$

dove è:

$$(7) \quad \lambda(t) = 4^2 b^2 u^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{4u}{3!} + \dots \right) - u'^2.$$

2. a) Si consideri la (1) nella quale assumiamo $B(t)$ nella forma ⁽⁴⁾:

$$(8) \quad B(t) = b^2 - C(t), \quad (b \neq 0),$$

e supponiamo $B(t)$ (e quindi $C(t)$) definita in $(t^0, +\infty)$ ed integrabile (eventualmente nel senso di Lebesgue) in ogni parte finita di tale intervallo.

Cerchiamo una funzione $u(t)$ che soddisfi alla equazione:

$$(9) \quad u'' + 4b^2 u = C(t).$$

(3) Avremmo potuto, come fa G. ASCOLI in [6] (Nota II), muovere da integrali del tipo $x_1 = g \operatorname{sen} v, x_2 = g \cos v$. Se supponiamo infatti $g(t), v(t)$ due volte derivabili e

$g(t) > 0$, assumendo $v(t)$ del tipo: $v(t) = b \int_0^t d\tau / g^2 + c$ (b, c costanti), troveremo per $A(t)$

la forma: $A(t) = -g''/g + b^2/g^4$, che si riduce alla (6) con la posizione $g(t) = e^{u(t)}$. È però questa forma (6) particolarmente utile prestandosi alle posizioni differenziali ausiliarie (9).

(4) La opportunità di tale forma sarà chiara nel seguito.

Il metodo di Lagrange ci dà subito tutte le funzioni $u(t)$:

$$(10) \quad u(t) = -\frac{\cos 2bt}{2b} \left(\varphi_0 + \int_{t^0}^t C(\tau) \sin 2b\tau d\tau \right) + \\ + \frac{\sin 2bt}{2b} \left(\psi_0 + \int_{t^0}^t C(\tau) \cos 2b\tau d\tau \right),$$

dove b, φ_0, ψ_0 sono tre costanti reali. Se poniamo:

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t^0}^t C(\tau) \sin 2b\tau d\tau \\ \psi(t) = \psi_0 + \int_{t^0}^t C(\tau) \cos 2b\tau d\tau, \end{cases}$$

possiamo provare il seguente:

TEOREMA A. - Supponiamo che:

esistano tre costanti $\varphi_0, \psi_0, b (b \neq 0)$ per le quali:

i) *le funzioni $\varphi(t), \psi(t)$ definite dalle (11) rimangano in valore assoluto limitate per $t \rightarrow +\infty$.*

ii) *Le $\varphi(t), \psi(t)$ stano a quadrato integrabile in $(t^0, +\infty)$.*

In queste condizioni le soluzioni della (1) sono tutte stabili.

Dalla (6') e dalle (8) e (9) si ha subito:

$$A(t) = B(t) + \lambda(t),$$

dove $\lambda(t)$ è la funzione definita dalla (7). Dalle ipotesi i) si deduce che $u(t)$ data dalla (10) è limitata per $t \rightarrow +\infty$, perciò lo sono le funzioni (3), soluzioni linearmente indipendenti della (2). Se allora proviamo che $\lambda(t)$ è assolutamente integrabile in $(t^0, +\infty)$, dal teorema di G. Ascoli segue subito la tesi. Per questo dalla (10), tenendo presenti le (11), si ricava:

$$u'(t) = \varphi \sin 2bt + \psi \cos 2bt,$$

(eventualmente l'uguaglianza ha senso solo quasi dappertutto in ogni parte finita di $(t^0, +\infty)$), e, da questa e dalla (10), quadrando, si ottiene:

$$u'^2(t) = \varphi^2 \sin^2 2bt + \psi^2 \cos^2 2bt + \varphi\psi \sin 4bt$$

$$4b^2 u^2(t) = \varphi^2 \cos^2 2bt + \psi^2 \sin^2 2bt - \varphi\psi \sin 4bt,$$

dalle quali si ha:

$$4b^2 u^2(t) + u'^2(t) = \varphi^2(t) + \psi^2(t).$$

Quest'ultima ci assicura intanto che $u^2(t)$ e $u'^2(t)$, per le ii) riescono integrabili (assolutamente) in $(t^0, +\infty)$. Inoltre la espressione in parentesi nella (7) risulta limitata per $t \rightarrow +\infty$. Infatti tale espressione è:

$$\frac{1}{2!} - \frac{4u}{3!} + \frac{4^2 u^2}{4!} - \dots,$$

e la serie dei valori assoluti:

$$\frac{1}{2!} + \frac{4|u|}{3!} + \frac{4^2|u|^2}{4!} + \dots,$$

si può maggiorare con l'altra:

$$1 + \frac{4|u|}{1!} + \frac{4^2|u|^2}{2!} + \dots,$$

che ha per somma $e^{4|u|}$ e quindi è limitata per $t \rightarrow +\infty$, perchè come abbiamo avvertito lo è $u(t)$. Si ha dunque per $\lambda(t)$:

$$|\lambda(t)| \leq 4b^2 u^2 e^{4|u|} + u'^2;$$

e da questa disuguaglianza segue l'assoluta integrabilità in $(t^0, +\infty)$ di $\lambda(t)$.

Osservazione. — Risulta chiaro dal ragionamento fatto il significato della esistenza di una costante $b \neq 0$, che figura nelle ipotesi: essa ci assicura l'esistenza di almeno una equazione della famiglia (2) (nella quale $A(t)$ ha la forma (6')) con la quale sia possibile confrontare la (1).

b) Dal teorema precedente segue come corollario il seguente:

TEOREMA B. — i°) Si possa trovare almeno una costante $b \neq 0$ per la quale esistano gli integrali:

$$\int_{t^0}^{+\infty} C(\tau) \sin 2b\tau d\tau, \quad \int_{t^0}^{+\infty} C(\tau) \cos 2b\tau d\tau,$$

dove la $C(t)$ è la funzione definita dalla (8).

ii°) Le funzioni:

$$\left(\int_t^{+\infty} C(\tau) \sin 2b\tau d\tau \right)^2, \quad \left(\int_t^{+\infty} C(\tau) \cos 2b\tau d\tau \right)^2$$

siano integrabili in $(t^0, +\infty)$, allora le soluzioni della (1) sono stabili.

Gli integrali (11) si possono scrivere:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 + \int_{t^0}^{t_1} C(\tau) \sin 2b\tau d\tau - \int_t^{t_1} C(\tau) \sin 2b\tau d\tau \\ \psi(t) &= \psi_0 + \int_{t^0}^{t_1} C(\tau) \cos 2b\tau d\tau - \int_t^{t_1} C(\tau) \cos 2b\tau d\tau \end{aligned} \quad (t^0 \leq t \leq t_1)$$

dove φ_0, ψ_0 sono per adesso indeterminate. Se facciamo tendere $t_1 \rightarrow +\infty$ ed assumiamo le costanti φ_0, ψ_0 definite dalle relazioni:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= - \int_{t^0}^{+\infty} C(\tau) \sin 2b\tau d\tau \\ \psi_0 &= - \int_{t^0}^{+\infty} C(\tau) \cos 2b\tau d\tau \end{aligned}$$

avremo:

$$\varphi(t) = - \int_t^{+\infty} C(\tau) \sin 2b\tau d\tau$$

$$\psi(t) = - \int_t^{+\infty} C(\tau) \cos 2b\tau d\tau$$

e per le ii^o) le ipotesi ii) del teorema A sono verificate.

c) Le condizioni del teorema precedente sono verificate se per $C(t)$ si ha:

$$C(t) = f(t) \omega(t),$$

dove $f(t)$ è monotona e a quadrato integrabile in $(t^0, +\infty)$ ed inoltre esiste almeno una costante $b \neq 0$ per la quale le funzioni:

$$(12) \quad H(t, t_1) = \int_t^{t_1} \omega(\tau) \sin 2b\tau d\tau, \quad K(t, t_1) = \int_t^{t_1} \omega(\tau) \cos 2b\tau d\tau$$

$(t < t_1)$

sono limitate quando $t \rightarrow +\infty$ ⁽⁵⁾.

Ciò si prova facilmente servendosi del secondo teorema della media.

Sono ad esempio stabili gli integrali della equazione:

$$x'' + \left(b^2 + \frac{\omega(t)}{t^\alpha} \right) x = 0 \quad \left(\alpha > \frac{1}{2} \right),$$

se le funzioni $H(t, t_1)$, $K(t, t_1)$ definite dalle (12) sono limitate per $t \rightarrow +\infty$. Ciò si verifica se è $\omega(t) = k \sin at$ (k costante arbitraria) e si suppone $2|b| \neq |a|$.

Si ritrova così l'esempio segnalato da G. Ascoli per $\alpha = 1$, e, per $\alpha > 1/2$ da G. Prodi.

3. Chiudiamo osservando che nelle ipotesi dei teoremi precedenti possono indicarsi formule dalle quali ottenere utili rappresentazioni asintotiche per gli integrali della (1). In tali circostanze $A(t)$ differisce da $B(t)$ per termini $\lambda(t)$ assolutamente integrabili in $(t^0, +\infty)$ per i quali è:

$$\lambda(t) = \theta \left\{ \int_t^\infty [\varphi^2(\tau) + \psi^2(\tau)] d\tau \right\};$$

onde ad ogni soluzione della (1) si può far corrispondere una soluzione della (2) (che può rappresentarsi mediante le (3)), come è noto, che ne differisca per termini dello stesso ordine.

(5) Con questo enunciato si ritrova la proposizione data da G. Prodi in [7] (Nota I) a p. 451, nella quale $\omega(t)$ è supposta periodica.

ELENCO DEI LAVORI CITATI.

- [1] Per questioni attinenti a questa Nota vedasi G. SANSONE, *Equazioni Differenziali nel Campo Reale*, parte II, Zanichelli 1949, pp. 25-71.
- [2] M. FUKUARA e M. NAGUMO, *On a condition of stability* . . . ; « Proceeding of Imp. Akad. Tokio », T. 6, pp. 131-32 (1930).
- [3] R. CACCIOPOLI, *Sopra un criterio di stabilità*. « Rend. Acc. Lincei », ser. VI, T. 11, pagine 251-54 (1930).
- [4] L. A. GUSAROV, in « Doklady Akad. Nauk S.S.S.R. » (NS), 68, pp. 217-20 (1949) (vedere: « Math. Reviews », vol. 11, n. 2, febbraio 1950).
- [5] G. ASCOLI, *Sul comportamento asintotico* . . . « Rend. Acc. Lincei », ser. VI, pp. 234-43 (1935).
- [6] G. ASCOLI, *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità*. « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. 9, pp. 129-34 (1950) (Nota I), e pp. 210-13 (Nota II).
- [7] G. PRODI, *Nuovi criteri di stabilità* . . . « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. X, pp. 447-451 (1951) (Nota I), e, pp. 30-34, vol. XI (Nota II).

Geologia. — *Sur la continuité de la surface villafranchienne du Tibrè à l'Adriatique* (*). Nota di JEAN DEMANGEOT, presentata (**)
dal Socio R. FABIANI.

On sait que le relief de l'Apennin central est fondamentalement composé de deux éléments:

des blocs montagneux élevés, massifs, généralement calcaires. Ils sont le plus souvent limités par des failles ou des chevauchements. Exemple: l'arc « umbro-marchigiano », le massif du Velino, les Monts Simbruini;

des couloirs assez étroits, de 2 à 10 km de large, qui se fauillent entre les blocs et ont grandement facilité les communications. Ils sont généralement bourrés de molasse miocène tendre. Exemples: couloir du Liri, du Salto, du Velino, etc. . . . (1).

Or il est à remarquer que le fond de ces couloirs est presque toujours constitué par une surface uniforme, assez facile à repérer malgré les entailles de l'érosion, et dont la continuité de la mer Tyrrhénienne à la mer Adriatique n'a jamais été signalée.

Je me propose de l'étudier ici tout au long de la via Salaria, sur un trajet d'environ 150 km. (2).

1. Partant de la vallée du Tibrè à 25 km au Nord de Rome nous observons cette surface très caractéristique dans l'ensellement transversal de la

(*) Eseguita presso il Centro di Studio per la Geologia dell'Italia Centro-Meridionale, del Consiglio Nazionale delle Ricerche - Roma.

(**) Nella seduta del 9 febbraio 1952.

(1) Cfr. par exemple fig. 1 in J. DEMANGEOT, *L'arc abruzzais externe, étude tectonique*. « Ricerca Scientifica », giugno 1951, pp. 904-939.

(2) Voir carte d'Italie au 100.000^{ème} feuilles 132, 133, 138, 139, 144, 145.

Sabine entre 300 et 700 m d'altitude. C'est un plateau lacéré par l'érosion et semé de villages d'éperon comme Frasso Sabino, Torricella in Sabina, Belmonte in Sabina, etc... Puis elle se prolonge tout au long du Velino où, défoncée par le fleuve, elle ne subsiste plus que sous forme de replats latéraux entre 750 et 900 m d'altitude: Colle della Fonte sur la rive gauche, Colle Vuoto sur la rive droite. Dans les gorges du Velino, entre le Mte Terminillo et le Mte Giano, on la trouve reléguée sur la rive droite, suspendue comme un balcon à 500 m au-dessus du fleuve (Mte Pozillo et col voisin) et puis brusquement, à partir de Posta, elle constitue pratiquement tous les plateaux de rive gauche entre 1.000 et 1.200 m d'altitude (Mte Marcone, Colle Verrico) et même, le Tronto atteint, les croupes du bassin d'Amatrice (San Giusta, il Colle).

Désormais, plus ou moins épargnée, plus ou moins disséquée, elle accompagnera le Tronto jusqu'à l'Adriatique. C'est d'abord, vers 1000-1050 m, un trottoir incliné qui, sur la rive droite, joint S. Tommaso au Mte Cività en passant par Colle del Cerro. Puis, entre Arquata del Tronto et Acquasanta, perchés à la même altitude, des replats parfois difficiles à identifier. Au Pizzo di Colloto et au Mte Rosara notre surface est descendue au-dessous de 700 m. Vers Ascoli Piceno, sur la rive gauche, c'est une longue croupe qui s'abaisse lentement vers l'Est par Castignano et la base d'Acquaviva. Enfin elle disparaît, tronquée par le littoral quand elle se trouve encore à 200 m. d'altitude environ.

2. La première question à se poser est celle de la *nature morphologique* de cette surface. Bien qu'elle coïncide parfois, mais exceptionnellement, avec un plan stratigraphique, aucun doute n'est possible: c'est une surface d'érosion. Et des plus classiques car, sauf dans l'ensellement de Torricella in Sabina et pour des raisons qu'on verra plus loin, elle est aussi indifférente à la structure du sous-sol qu'à la nature des roches.

On la trouve en effet aussi bien sur des conglomérats, des sables ou des argiles pliocènes que sur le calcaire helvétique, aussi bien sur la molasse miocène que sur les calcaires mésozoïques, sans que le passage de l'un à l'autre soit marqué par la moindre rupture de pente. Bien mieux elle tranche implacablement tous les accidents tectoniques qu'elle rencontre, et c'est hautement significatif. Qu'on en juge: en partant du Tibre elle rabote le Nord de l'anticlinal du Mte Navegna, le bloc calcaire du Mte Pizzuto, la faille de Sigillo, l'anticlinal helvétique de Bacugno et celui de Monticello, l'anticlinal molassique des Mti della Laga, l'anticlinal helvétique d'Acquasanta, le synclinal molassique de la vallée Castellana, l'anticlinal helvétique de la Mgna dei Fiori et enfin les couches obliques du Pliocène adriatique.

Certes il lui arrive, comme à tous les niveaux cycliques, de s'appuyer localement sur des plans stratigraphiques, et alors elle devient accidentellement une surface structurale; c'est le cas, par exemple, sur les couches subhorizontales des environs d'Acquasanta. Parfois aussi des doutes peu-

vent surgir lorsque on la voit accidentée de buttes ou de petits sommets pointus; mais alors un examen plus attentif montre qu'il s'agit à chaque fois d'une induration locale des roches: conglomérats plaisanciens du Mte Ascensione, conglomérats astiens d'Acquaviva, grès durs des Mti della Laga et sans doute de Colle Verrico. Par ses imperfections mêmes notre surface est bien le résultat d'une érosion.

3. Le second point à éclaircir est celui de l'âge. Du côté adriatique il est clair que cette surface est post-astienne puisqu'elle est en contrebas des lambeaux astiens du littoral. Le problème d'ailleurs avait déjà été abordé par Castiglioni qui, signalant cette surface vers Ascoli Piceno (« stade I ») l'attribuait fort justement au Pleistocène ancien ⁽³⁾. Scarsella, qui semble l'avoir remarquée, ne la date pas ⁽⁴⁾.

Mais le prolongement sur le versant Tyrrhénien permet plus de précision. En effet, en allant vers le Sud Ouest à partir du cours moyen du Velino (Cittaducale), notre surface se raccorde progressivement avec le plateau structural de Belmonte-Torricella in Sabina, sur lequel j'ai précédemment fait des réserves. Or le matériel de ce plateau est daté, plus au Sud, par des fossiles marins du Calabrien ⁽⁵⁾ Nous parvenons donc tout naturellement à la conclusion que la surface d'érosion a été façonnée en fonction du niveau de base calabrien qui occupait la vallée du Tibre. Elle date donc du Villafranchien (Pliocène supérieur = Quaternaire ancien du Congrès de Londres).

Cette explication est confirmée par le faciès conglomératique littoral (peut-être s'agit-il même de dépôts saumâtres ?) de ce Calabrien et par le fait que les couches s'amincissent en biseau vers le débouché du Salto.

4. Il ne faut évidemment pas s'attendre à ce que cette surface se soit conservée jusqu'à nos jours dans son état originel.

Le premier type d'accident de son profil longitudinal consiste en bosses et en creux dont aucune érosion ne saurait rendre compte. Quel agent aurait été capable de creuser, dans la molasse imperméable, les contrepentes de Posta ou d'Arquata del Tronto ? Quel mode d'attaque pourrait expliquer la convexité générale du profil ? Il faut de toute évidence recourir ici à des *mouvements tectoniques post-villafranchiens* pour comprendre les déformations de cette surface, mouvements qui concordent d'ailleurs parfaitement avec ce que l'on sait de l'orogénèse apennine. On notera que le maximum de sou-

(3) Cfr. B. CASTIGLIONI, *Ricerche morfologiche nei terreni pliocenici dell'Italia centrale*. « Ist. di Geografia », Roma, 160, p., 1935. Voir p. 50.

(4) Cfr. F. SCARSELLA, *Sulla zona d'incontro dell'Umbria e dell'Abruzzo*. « Boll. Serv. Geol. d'Italia », 1947-49. Note XII. Dans la planche 3 est en effet signalée une « surface de dénudation ».

(5) Cfr. DE ANGELIS D'OSSAT et CLERICI, « Boll. Soc. geol. ital. », 1911, cité par C. MAXIA, *Il bacino delle Acque Albule* (Lazio), in « Contributi di Scienze geologiche », supplemento a la « Ricerca Scientifica », 1950, p. 29, note 7.

lèvement (Colle Verrico) est à peu près au centre de la péninsule et surtout que, dans le détail, à chaque bosse correspond un anticlinal profond arrasé (sauf peut être à Bacugno). Preuve que l'orogénèse post-villafranchienne a consisté généralement en un rejeu des accidents anciens.

Le second type d'irrégularité n'est pas en relief mais en creux, à savoir l'encaissement des vagues d'érosion postérieures déclenchées précisément par la reprise tectonique. Du côté de l'Adriatique on avait déjà signalé un cycle II plus récent ⁽⁶⁾; je l'ai suivi jusqu'à Accumoli. Du côté tyrrhénien il a son symétrique dans le niveau de Posta-Bacugno. D'ou la conséquence stratigraphique suivante: le lacustre d'Amatrice, en continuité avec la surface villafranchienne, est villafranchien, tandis que le lacustre de Bacugno ⁽⁷⁾, étant emboîté dans cette surface, est post-villafranchien.

L'extension de cette importante surface d'érosion dans l'Apennin central fera l'objet d'une autre communication.

Fisiologia. — *Dell'azione di alte dosi di nicotinamide sul sistema nervoso centrale* ^(*). Nota di ANTONINO ALIBRANDI, presentata ^(**) dal Socio C. CIACCIO.

Melina ed io abbiamo osservato che la nicotinamide somministrata endovena in cani predisposti verso l'epilessia riflessa, a dosi in generale non inferiori al mezzo grammo pro kilo, è capace di annullare completamente l'azione epilettogena degli eccitamenti afferenti ⁽¹⁾.

L'analisi del meccanismo di questa azione antiepilettica ha sinora dimostrato che essa non è riproducibile mediante il nicotinato di sodio, che si accompagna a depressione dell'eccitabilità elettrica della corteccia cerebrale e che la tiamina, sia per somministrazione endovenosa che per diretta applicazione in sostanza sulla corteccia cerebrale, ripristina completamente la reattività epilettogena dell'animale rilevandone nel contempo l'eccitabilità elettrica corticale.

Sulla natura del meccanismo della suddetta azione antiepilettica possono avanzarsi, fondandosi sui risultati ora riferiti, varie ipotesi.

Si potrebbe anzitutto considerare quest'azione antiepilettica come la conseguenza di una acuta detiaminizzazione. Questa ipotesi sarebbe confortata anche dal noto fatto che un'eccessiva somministrazione di nicotinamide accresce l'eliminazione urinaria di tiamina ⁽²⁾. Una seconda ipotesi potrebbe fondarsi sul fatto che la massiva somministrazione di nicotinamide è seguita da un aumento del

(6) Cfr. B. CASTIGLIONI, op. cit.

(7) Cfr. F. SCARSELLA, op. cit.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale dell'Università di Messina.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) A. ALIBRANDI e D. MELINA, « Atti Acc. Peloritana », 1951.

(2) C. MALAGUZZI-VALERI e G. CONESE, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 20, 613 (1945).

DPN^(3, 4). Il DPN è stato trovato capace di favorire i processi di esterificazione dell'acido fosforico; questa esterificazione dai risultati ottenuti da Friedkin e Lehninger^(5, 6) pare potersi accoppiare al trasporto di elettroni tra DPNH₂ e ossigeno. Una deficienza dei processi di fosforilazione, G. Alibrandi ed io, abbiamo prospettato come una possibile causa della reattività epilettogena⁽⁷⁾.

Una terza ipotesi può infine fondarsi sul fatto che in seguito alla massiva introduzione di nicotinamide l'organismo è costretto a spogliarsi di gruppi metilici labili per trasferirli sulla molecola di questa sostanza. La metilazione della nicotinamide in N'-metilnicotinamide potrebbe rappresentare un processo svolgentesi a danno dei processi di metilazione che portano alla formazione della colina cosicché in definitiva l'organismo avrebbe a disposizione meno colina per la sintesi dell'acetilcolina.

È nota, anche da miei precedenti lavori, la grande importanza che l'acetilcolina può assumere quale fattore dotato di elettiva azione positiva sul fenomeno dell'«after-discharge» centrale nell'insorgenza dello stato di disposizione⁽⁸⁾. È nota l'importanza della tiamina nei processi di acetilazione che portano alla sintesi dell'acetilcolina. Un aumento della concentrazione della tiamina potrebbe, entro certi limiti, incrementando i processi di acetilazione portare ad una più completa utilizzazione della colina disponibile ovviando così alla scarsa formazione di questa.

A vantaggio di questa terza ipotesi sta il fatto che il sistema enzimatico specifico per la metilazione della nicotinamide non è attivo nei confronti dell'acido nicotinico⁽⁹⁾ e l'acido nicotinic, come sopra abbiamo detto, è stato da noi praticamente riconosciuto come privo di azione nei riguardi della disposizione verso l'epilessia sperimentale riflessa. In base a questa considerazione e nell'intento di trovare ulteriori argomenti sperimentali a favore di quest'ultima ipotesi si sta saggiando nel mio Istituto l'azione della N'-metilnicotinamide sulla disposizione verso l'epilessia riflessa nonché un'eventuale azione antagonista della colina nei riguardi dell'azione antiepilettica della nicotinamide.

Comunque l'antagonismo tra nicotinamide⁽¹⁰⁾ e tiamina a livello del sistema nervoso centrale messo da me per primo in evidenza, mi sembra, qualunque possa esserne il prevalente meccanismo d'azione, un fatto degno di rilievo.

(3) A. BONSIGNORE e C. RICCI, «Il Farmaco», 4, 300 (1949); «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», 25, 710 (1949).

(4) È però da ricordare come recenti osservazioni dimostrano che un eccesso di nicotinamide è capace di opporsi all'azione enzimatica del DPN (P. FEIGELSON, J. N. WILLIAMS e C. A. ELVEHJEM, «J. Biol. Chem.», 189, 361 (1951)).

(5) M. FRIEDKIN e A. L. LEHNINGER, «J. Biol. Chem.», 178, 611 (1949).

(6) A. L. LEHNINGER, «J. Biol. Chem.», 178, 625 (1949).

(7) G. ed A. ALIBRANDI, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», 26, 1472 (1950).

(8) A. ALIBRANDI, «Arch. Fisiol.», 49, 105 (1949).

(9) G. L. CANTONI, «J. Biol. Chem.», 189, 203 (1951).

(10) La nicotinamide è capace di svolgere azione antiepilettica anche se direttamente applicata sui centri corticali. Le presenti esperienze furono condotte facendo prevalentemente uso di nicotinamide «Roche».

Microbiologia. - *Il «Mycobacterium phlei» (Lehmann e Neumann 1899, pro parte) (*)*. Nota preliminare di GIUSEPPE PENSO, VITTORIO ORTALI, ALDO GAUDIANO, MARIO PRINCIVALLE, LUCIANO VELLA e ALFREDO ZAMPIERI, presentata (**) dal Socio D. MAROTTA.

Con il nome di *Mycobacterium phlei* (Lehmann e Neumann, 1899) si indicano, nei vari laboratori del mondo, specie spesso differenti tra loro.

Allo stato attuale dei fatti, tracciare un quadro preciso, particolareggiato, definitivo del *Myc. phlei*, non è possibile, perchè non esistono dati morfologici e biologici precisi e accettabili, atti a determinare la specie dell'acidoresistente noto con il nome di *Mycobacterium phlei* (Lehmann e Neumann, 1899). Fino ad oggi sono stati indicati col nome di *Myc. phlei* una serie di germi che spesso non avevano nulla a che fare l'uno con l'altro. Ci siamo così proposti di delimitare i confini della specie *phlei*.

Le caratteristiche principali di tale specie sono le seguenti: germe a bastoncello, nucleato, acidoresistente, con qualche forma giovanile cianofila, grampositivo; cresce su tutti i comuni terreni a temperature comprese tra i 20° e 52° C con optimum di crescita a 48° C, e a pH compresi tra 5,5 e 8,8 con optimum a pH 6.

In terreni liquidi cresce in superficie; in Dubos e in terreni agitati cresce in profondità dando luogo a formazioni globulari.

In terreni solidi dà colonie tondeggianti, frastagliate, a superficie radialmente pieghettata e centro sopraelevato.

Si ha formazione di un pigmento arancione con massimo di assorbimento a 460-463 m μ e bande secondarie a 430-440 e 480-490 m μ (in cloroformio). Tale pigmento è costituito da tre carotenoidi epifasici, particolarmente da leprotina e α -carotene, oltre un carotenoide a carattere acido.

Il *Myc. phlei* non fluidifica la gelatina, riduce i nitrati a nitriti; non produce indolo, non coagula il latte, dà emolisi su agarsangue. In terreni sintetici utilizza, come fonte di carbonio, l'alcool amilico, l'alcool butilico, l'alcool etilico, l'adonite, l'eritrite, il glicerolo, il mannitolo, la sorbite, l'arabinoso, lo xiloso, il galattoso, il glucoso, il levuloso il mannoso e il trealoso, non utilizza l'acetone, l'alcool metilico, la dulcete, l'inosite, l'arbutina, l'esculina, la salicina, il ramnoso, il sorboso, il lattoso, il maltoso, il saccarosio, la destrina, l'inulina e il raffinoso.

Il *Myc. phlei* è lisato dal *Phagus phlei* (P. e O.), fago ad azione specie specifica.

Il *Myc. phlei* non è patogeno per i topi, i ratti, le cavie, i conigli, i piccioni, i polli, le rane, le carpe. Non dà lesioni sulla membrana corioallantoidea di embrione di pollo, sulla quale, però, è capace di moltiplicarsi.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

Le caratteristiche suesposte sono proprie del ceppo originale che Moeller isolò dal *Phleum pratense*, ma non di altri ceppi che corrono per i laboratori coll'identico nome di *Myc. phlei* (per esempio il *Myc. phlei* 525 della N.C.T.C.). Per questo motivo il nome di *Myc. phlei* deve essere riservato soltanto ai ceppi che hanno le caratteristiche specifiche da noi indicate.

Il nome originale di *Myc. phlei* venne creato da Lehmann e Neumann e da loro attribuito a un gruppo di micobatteri tra i quali, oltre al ceppo originale di Moeller, c'erano ceppi riconoscibili oggi come appartenenti al gruppo *lacticola*.

Il nome di *Myc. phlei* sarebbe perciò da considerarsi *dubium et confusum* e potrebbe essere rifiutato. Considerando, però, che tale nome è molto diffuso e che con esso si indica ancora il ceppo originale di Moeller, possiamo conservarlo *pro parte*.

Il nome della specie dovrà perciò essere indicato: *Myc. phlei* (Lehmann e Neumann, 1899, *pro parte*).

Il lavoro completo, illustrato da fotografie, microfotografie ottiche ed elettroniche, grafici e tabelle è in corso di stampa nei « Rendiconti dell'Istituto Superiore di Sanità ».

Biologia. — *Sensibilità alla luce dell'effetto stimolatore auxinico sulla sintesi d'amido in stomi isolati*^(*). Nota di ERASMO MARRÈ e PAOLA PROFUMO, presentata ^(**) dal Corrisp. E. REMOTTI.

In una Nota precedente abbiamo rilevato come la sintesi dell'amido, in stomi di Iris portati in soluzioni contenenti Glucosio 1-fosfato ⁽¹⁾, sia fortemente stimolata da sostanze di crescita, come gli acidi indolacetico e indolbutirrico ⁽²⁾.

Come accennammo, all'inizio delle esperienze i risultati, qualitativamente costanti, presentavano notevoli escursioni quantitative. In vari tentativi, in diverse direzioni, per superare questa difficoltà, potemmo rilevare come la migliore costanza di risultati si avesse su materiale prelevato all'alba, in condizioni di semioscurità. Questo fatto ci ha suggerito la possibilità di un intervento del fattore luce sulla sensibilità all'auxina delle cellule stomatiche nei processi di ricambio dell'amido, intervento tanto più interessante in quanto sarebbe venuto ad affiancarsi a quello ben noto della luce sui processi di crescita.

In questo primo gruppo di esperienze abbiamo affrontato il problema studiando comparativamente l'effetto indotto dall'acido indolacetico sulla

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico « Hanbury » dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) H. C. YIN and V. T. TUNG, « Science », 103, p. 87 (1948).

(2) E. MARRÈ e P. PROFUMO, questi « Rendiconti », vol. XI, fasc. 3-4, p. 230.

sintesi d'amido dal Gl. 1-P in stomi provenienti da piante normalmente illuminate e, rispettivamente, mantenute all'oscuro per diversi intervalli di tempo.

MATERIALE E METODI. - Abbiamo utilizzato piante di *Iris florentina* coltivate all'aperto, quanto più possibile uguali tra loro, lasciate le une in normale illuminazione, oscurate le altre con un dispositivo tale da assicurare una buona aerazione e una soddisfacente omogeneità termica rispetto ai controlli.

Il prelievo dei lembi epidermici veniva eseguito su aree corrispondenti di foglie di eguale età e posizione, il più rapidamente possibile, in condizioni di semioscurità: anche nel successivo trattamento con liquido di Shive diluito a 1/5, eteroauxina e Glucosio 1-P, si evitava il più possibile l'esposizione del materiale alla luce.

Naturalmente, lo studio dell'effetto dell'auxina in funzione della luce richiede la preliminare conoscenza dell'azione della luce di per sè. Ogni esperienza comprendeva quindi quattro serie di osservazioni: *a)* stomi provenienti dal buio; *b)* stomi provenienti dalla luce; *c)* stomi provenienti dal buio, con auxina; *d)* stomi provenienti dalla luce, con auxina.

RISULTATI. - Da entrambe le tabelle, nonostante le divergenze, pur notevoli, di dettaglio, emergono alcune costanti relazioni:

a) Una prima differenza tra i due controlli senza auxina, in quanto gli stomi provenienti dal buio rivelano una, sia pure lieve, tendenza a più rapida carica di quelli provenienti dalla luce: *la luce di per sè attenua la capacità di sintesi d'amido nello stoma.*

b) Rispetto ai controlli, gli stomi trattati con auxina presentano tutti un aumento spiccatissimo della carica d'amido, secondo l'effetto stimolante già illustrato nella nota precedente.

c) Nel quadro di questa esaltazione della sintesi, la differenza tra stomi provenienti dalla luce e quelli provenienti dal buio riappare qui profondamente accentuata rispetto ai controlli, per cui possiamo dire che *l'effetto auxinico di attivazione della sintesi viene notevolmente depresso dalla luce.*

Questi essendo i risultati fondamentali comuni alle due tabelle, esse, per quanto riferentesi a esperienze condotte in condizioni perfettamente identiche, presentano singolari divergenze quantitative di cui non è possibile individuare le cause. Tali discontinuità sono riapparire tra le numerose altre esperienze eseguite, che qui, per brevità, non vengono riportate, ma che concordano pienamente nel dato sostanziale, dimostrandoci inoltre: *a)* la necessità di una certa durata del periodo di illuminazione (in genere, circa un'ora) perchè compaia l'effetto inibente; *b)* la pure notevole durata (alcune ore) dell'intervallo di oscurità necessario ad annullare l'effetto inibente; *c)* la proporzionalità tra intensità luminosa ed effetto di inibizione: ad esempio, stomi raccolti in giornate nuvolose mostrano un comportamento intermedio.

TABELLA I.

Sintesi d'amido in stomi provenienti da piante illuminate e, rispettivamente, oscurate all'alba. Ora del prelievo, le 13³⁰ giornata luminosa.

Provenienza	Trattamento	Percentuale di stomi carichi d'amido dopo:			
		60'	180'	240'	300'
Dal buio	—	0	2	7	11
Dalla luce	—	0	3	5	8
Dal buio	Indolac. 10^{-5}	95	88	92	79
Dalla luce.	Indolac. 10^{-5}	49	55	60	61

TABELLA II.

Sintesi d'amido in stomi provenienti da piante illuminate e, rispettivamente, oscurate. Condizioni di esperienza come alla tabella I.

Provenienza	Trattamento	Percentuale di stomi carichi d'amido dopo:			
		30'	90'	160'	250'
Dal buio	—	0	0	6	9
Dalla luce.	—	0	0	4	6
Dal buio	Indolac. 10^{-5}	83	80	85	81
Dalla luce.	Indolac. 10^{-5}	18	20	20	25

CONCLUSIONI E CONSIDERAZIONI.

Riassumendo:

I) *L'esposizione delle foglie alla luce determina negli stomi, come reazione normale, una diminuzione della capacità di sintetizzare amido dal Glucosio I-fosfato.*

II) *Tale effetto inibitorio della preilluminazione assume il massimo di evidenza quando la sintesi dell'amido venga stimolata dalla presenza di eterauxina nel liquido di cultura.*

Il primo dei due reperti ci porta sul terreno della sensibilità ben nota dello stoma alla luce. Di fatto il movimento di apertura sotto l'azione di

questa sembra essenzialmente legato (vedi Alvim⁽³⁾) alla reazione amido-glucidi solubili; ritroviamo cioè la stessa sensibilità sul medesimo sistema di reazioni da noi osservato. Sensibilità la quale, nelle nostre condizioni di esperienza, per la permanenza di diverse ore degli stomi in un ambiente artificiale, tamponato, sembra indipendente da variazioni della CO₂ (fattore di regolazione stomatica invocato da Scharf e Shaw⁽⁴⁾), come del pH (Small⁽⁵⁾).

È possibile piuttosto pensare a qualcuna delle azioni ben note della luce, sia come modificatore delle costanti colloidali della cellula (permeabilità, Jarvenkylä⁽⁶⁾; movimenti protopasmatici, Bottelier⁽⁷⁾; viscosità, Virgin⁽⁸⁾); sia come fattore determinante, per meccanismi fotochimici, la comparsa di qualche sostanza, direttamente o indirettamente, attiva sui sistemi enzimatici; ipotesi questa ultima che è suggerita e, in certo qual modo, convalidata dal rapporto, che emerge pure dai nostri dati, tra luce e auxina. Di fatto, il secondo reperto ci dimostra come l'illuminazione diurna crei, negli stomi, condizioni relativamente durevoli, che riducono di molto l'effetto stimolatore esercitato dall'eteroauxina sulla sintesi dell'amido; e questa attenuazione ci richiama in modo singolare alla analoga attenuazione indotta dalla luce sull'effetto auxinico di crescita. Per quest'ultimo, Galston e Hand⁽⁹⁾ avrebbero dimostrato l'insorgenza, nella cellula illuminata, di sostanze auxino-inibenti; ora è logico pensare che analoghe reazioni possano avvenire negli stomi, dove, anziché l'effetto di crescita, sarebbe quello sull'amido a esprimere il blocco.

Senza contare che altre ricerche ci dimostrano l'azione attivante della luce su fermenti capaci di distruggere l'auxina (Tang e Bonner⁽¹⁰⁾, Galston e Baker⁽¹¹⁾): azione, anch'essa, che può ovviamente intervenire nella riduzione dell'effetto auxinico negli stomi preilluminati.

(3) P. T. ALVIM. « Am. J. Bot. », 36, p. 781 (1949).

(4) J. W. SCARTH and M. SHAW. « Plant Phys. », 26, p. 207 (1951).

(5) J. SMALL and R. M. MAXWELL. « Protoplasma », 32, p. 272.

(6) Y. T. YÄRVENKYLÄ. « Ann. Bot. Zool. Soc. Fenn. Vanano », 9, p. 1 (1937).

(7) H. P. BOTTELIER. « Rec. Trav. Bot. Néerl. », 31, p. 476 (1943).

(8) H. J. VIRGIN. « Phys. Plantarum », 4, p. 255 (1951).

(9) A. W. GALSTON and M. E. HAND. « Am. J. Bot. », 36, p. 85 (1949).

(10) Y. W. TANG and J. BONNER. « Arch. Biochem. », 13, p. 11; (1947); « Am. J. Bot. », 35, p. 570 (1948).

(11) A. W. GALSTON and R. S. BALZFR. « Am. J. Bot. », 38, p. 190 (1951).

Zoologia. — *Ricerche sistematiche su alcune specie del genere Ancylostoma* (Dubini, 1843): *Ancylostoma braziliense* (de Faria, 1910) e *Ancylostoma ceylanicum* (Looss, 1911). Nota I di ETTORE BIOCCA, presentata (*) dal Socio D. DE BLASI.

Sebbene de Faria ⁽¹⁾ e Looss ⁽²⁾ avessero sostenuto che l'*Ancylostoma braziliense* (de Faria, 1910) e l'*Ancylostoma ceylanicum* (Looss, 1911) dovessero essere considerate come due specie distinte, la maggior parte degli elmintologi, seguendo le autorevoli affermazioni degli studiosi anglo-sassoni e soprattutto di Lane ⁽³⁾, ha considerato l'*A. ceylanicum* come sinonimo di *A. braziliense*.

In seguito ad una lunga ricerca sistematica su anchilostomi di origine e provenienza varie ⁽⁴⁾, ci è stato possibile stabilire che effettivamente si tratta di due specie ben distinte e differenziabili. Poichè la primitiva descrizione dell'*A. braziliense* era incompleta, abbiamo ridescritto la specie in base all'abbondante materiale a nostra disposizione ⁽⁵⁾.

La dimostrazione che le due specie siano distinte ha interesse per la patologia umana, perchè non esiste ancora nessuna documentazione sicura che l'*A. braziliense* sia patogeno per l'uomo. Alcuni casi d'infestazione intestinale nell'uomo che erano stati catalogati come dovuti ad *A. braziliense*, si sono rivelati infatti a un nostro approfondito esame critico, come dovuti ad *A. ceylanicum*. Abbiamo potuto controllare personalmente che i parassiti ritrovati nell'uomo da Gordon ⁽⁶⁾ in Brasile erano *A. ceylanicum*. Così quei parassiti umani raccolti a Formosa e considerati da Yogogaka ⁽⁷⁾ *A. braziliense* sono invece tipici *A. ceylanicum* come è facile vedere nelle stesse fotografie fornite dall'A.

(*) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) G. DE FARIA, *Ainda sobre o Agchylostoma braziliense* Gomes de Faria, 1910. « Brazil-med. », 28, 113 (1914).

(2) A. LOOSS, cit. de Faria 1914.

(3) C. LANE, *Ancylostoma braziliense*, « Ann. trop. Med. Parasit. », 16, 347-352 (1922).

(4) Collezione della London School of Hygiene and Tropical Medicine, Liverpool School of Hygiene and Tropical Medicine, Collezione del P. L. Le Roux, collezione dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Parigi, collezione dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

Siamo particolarmente grati ai professori Le Roux, Buckley e Gordon per la utilissima collaborazione in queste ricerche.

(5) E. BIOCCA, *On Ancylostoma braziliense* (de Faria, 1910) and its morphological differentiation from *A. ceylanicum* (Looss, 1911) « Journ. of Helminth. », 25, 1-10 (1951).

(6) R. M. GORDON, *Ancylostomes recorded from sixty seven post mortems performed in Amazonas*. « Ann. trop. Med. Parasit. », 16, 223-228 (1922).

(7) S. YOKOGAWA, *Occurrence of A. braziliense in the aborigenes of Formosa and in their cats*. « Ann. Zool. Japon. », 12, 17-24 (1929).

In base alle nostre osservazioni, che riportiamo nell'acclusa tabella, risulta inoltre che la distribuzione geografica delle due specie è diversa.

TABELLA I.

Paesi di origine		Ospite	Specie
America	Guiana inglese	Canis familiaris	A. braziliense
	Amazonas (Brasile)	»	»
	Guiana inglese	»	A. ceylanicum
	»	Felis catus	»
	Amazonas (Brasile)	Homo sapiens	»
	»	Canis familiaris	»
Africa	»	Felis catus	»
	Africa occidentale	Canis familiaris	A. braziliense
	Eritrea	Vulpes vulpes aegyptiaca	»
	»	Felis serval	»
	Freetown	Felis pardus	»
	Sierra Leone	Felis catus	»
Asia	Somalia	Felis serval	»
	Transvaal	Canis familiaris	»
	Berhampore	Felis catus	A. ceylanicum
	India	Viverricula malaccensis	»
	India Orientale	Felis bengalensis	»
	Sumatra	Felis temminckii	»

Ambedue le specie di vermi sono state segnalate nel Nuovo Mondo. Mentre l'*A. ceylanicum* è stato ritrovato in Estremo Oriente e non in Africa, l'*A. braziliense* è stato messo in evidenza in Africa e non in Estremo Oriente.

L'anchilostomiasi cutanea serpigginosa o «creeping eruption» è presente nelle regioni della terra in cui esiste l'anchilostomiasi intestinale da *A. ceylanicum*, mentre non è segnalata in Africa, dove invece abbonda l'*A. braziliense*. Gli Autori americani ^{(8) (9)} che hanno studiato l'etiologia della malattia sono di opinione che essa sia provocata dalla penetrazione e dalla migrazione nella pelle umana di larve di terzo stadio dell'*A. braziliense*, ma nessuno degli Autori che ha studiato l'argomento ha descritto il verme adulto da cui sarebbero originate le larve infestanti.

È nostra opinione che anche l'anchilostomiasi cutanea serpigginosa, soprattutto per la sua caratteristica distribuzione geografica, sia provocata dalle larve dell'*A. ceylanicum* e non da quelle dell'*A. braziliense*.

(8) B. SHELMIER, *Experimental Creeping eruption from a cat and dog hookworm (A. braziliense)*. « J. Amer. Med. Ass. », 91, 938-944 (1928).

(9) G. E. WHITE and A. E. DOVE, *The causation of creeping eruption*. « J. Amer. Med. Ass. », 90, 1701-1705 (1928).

Riteniamo utile ricordare brevemente solo i principali caratteri morfologici differenziali tra le specie *A. braziliense* e *A. ceylanicum* che, secondo noi, permettono una diagnosi rapida e sicura.

Le dimensioni di questi vermi, che solo in casi eccezionali sorpassano la lunghezza di 10 mm non sono un sicuro carattere diagnostico.

Le maggiori differenze invece vanno ricercate nell'estremità anteriore e nella borsa caudale dei maschi (Figg. 1, 2, 3, 4).

La cavità boccale dell'*A. braziliense*, come aveva descritto de Faria ⁽¹⁰⁾ ha nel suo margine ventrale una coppia di forti e grandi denti triangolari

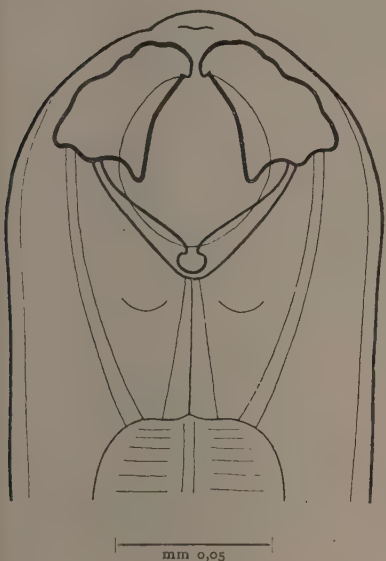


Fig. 1. - *Ancylostoma braziliense* (De Faria, 1910).
Estremità anteriore vista dorsalmente.

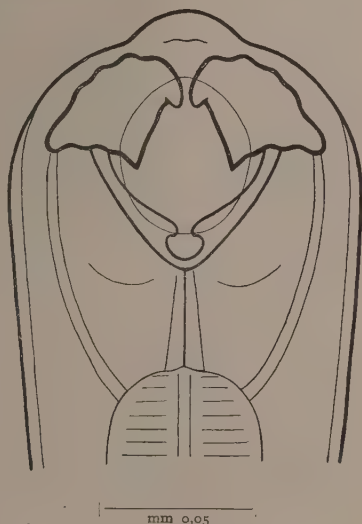


Fig. 2. - *Ancylostoma ceylanicum* (Looss, 1911).
Estremità anteriore vista dorsalmente.

nel cui angolo superiore interno, in vicinanza della linea mediana, si trovano due piccolissimi denti accessori.

Nell'*A. ceylanicum* la coppia di denti ventrali è di dimensioni in genere minori, mentre i due denti accessori interni sono chiaramente più voluminosi e sporgenti verso la linea mediana.

Ancora più appariscenti e caratteristiche sono le differenze nelle borse caudali, che si rendono maggiormente apprezzabili paragonando i rispettivi disegni laterali. (Il primo disegno della borsa caudale dell'*A. braziliense* è stato pubblicato nel nostro precedente lavoro).

(10) G. DE FARIA, *Contribuição para a sistemática helmintológica brasileira*. - III. *Ancylostomum braziliense* n. sp. parasito dos gatos e cães. «Mem. Inst. O. Cruz.», 2: 286-293 (1910).

Nell'*A. braziliense* i lobi laterali sono molto più lunghi in direzione delle costole laterali, le quali prendono origine da un lungo tronco comune e hanno una forma ricurva caratteristica che ricorda molto la forma delle costole laterali delle specie del genere *Uncinaria*. Le costole posterolaterali e mediolaterali sono rivolte dorsalmente, mentre la esternolaterale è diretta ventralmente; le rispettive papille terminali si trovano ben lontane l'una dall'altra.

Le costole esternodorsali diramano in vicinanza della origine della costola dorsale.

Al contrario, nell'*A. ceylanicum*, come risulta anche nel disegno originale di Looss⁽¹¹⁾ i lobi laterali sono molto più corti nella direzione delle costole



Fig. 3. - *Ancylostoma braziliense* (De Faria, 1910).
Borsa caudale vista lateralmente.



Fig. 4. - *Ancylostoma ceylanicum* (Looss, 1911).
Borsa caudale vista lateralmente.

lateralali le quali sorgono da un tronco comune, anch'esso più corto che nell'*A. braziliense*. La costola esternolaterale è molto separata dalle altre due, che invece decorrono ravvicinate fino in vicinanza del margine esterno della borsa caudale.

Infine nell'*A. ceylanicum* le costole esternodorsali nascono a una ben maggiore distanza dall'origine della costola dorsale che nell'*A. braziliense*.

Questi caratteri differenziali tra le due specie, da noi ricordati in forma schematica, sono così evidenti, che, per un occhio esercitato, non possono sorgere dubbi diagnostici.

(11) A. LOOSS, *The anatomy and life history of Agchylostoma duodenale* Dub. «Rec. Sch. Med. Cairo», 4, 209 (1911).

Biologia. - *La rigenerazione della coda e gli effetti reattivi delle cellule di Mauthner in Anfibi anuri ed urodeli* ^(*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata ^(**) dal Socio G. COTRONEI.

Nel campo delle ricerche che si stanno svolgendo nel nostro Laboratorio sui fenomeni del differenziamento e della involuzione delle cellule nervose e dei fenomeni reattivi che queste manifestano in varie condizioni sperimentali, ho potuto mettere in evidenza che negli elementi motori spinali cui viene amputato il neurite, alla ipertrofia (già notata da Zannone; ved. Stefanelli ⁽¹⁾) si associa una cromatolisi di aspetto diverso, a seconda che la cellula nervosa sia in condizione di rigenerare la sua fibra (cromatolisi perinucleare) o no (cromatolisi diffusa) (Baffoni ⁽²⁾). Era pertanto interessante osservare quali fenomeni reattivi si verificassero in neuroni intracentrali cui venisse amputato l'assone, e ciò particolarmente nelle cellule di Mauthner (M.), neuroni studiati dai più diversi punti di vista nel nostro Laboratorio, sui quali avevo precedentemente sperimentato provocando la loro precoce involuzione mediante trattamento di estratti tiroidei, che anticipano ed accelerano la metamorfosi (Gudernatsch, ved. Cotronei ⁽³⁾), a larve di Anfibi anuri (Baffoni e Catte ⁽⁴⁾).

In base alle ricerche di Stefanelli ⁽⁵⁾, i neuroni di M. degli Anfibi anuri vanno considerati *neuroni a ciclo larvale* poichè, col passaggio di questi animali dalla vita acquatica a quella terrestre, perdono la loro attività e si involgono; i neuroni di M. degli Anfibi urodeli acquatici, invece, sono *elementi perenni* in quanto durano per tutta la vita dell'animale. Era pertanto interessante comparare i fenomeni reattivi in animali di questi due ordini.

L'esecuzione della ricerca si presentava particolarmente facile dato che essa era realizzabile mediante il semplice taglio della coda (nel cui midollo decorrono le fibre di M.) la quale, sia nelle larve di Anfibi anuri che in quelle di urodeli, è dotata di ampie facoltà rigenerative (Stefanelli e Collabo-

(*) Ricerca eseguita nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) L. ZANNONE, « Ricerche di Morfol. », 22° (Roma 1947); AL. STEFANELLI, *Genetic Neurology*, p. 210 (Chicago 1950).

(2) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 8°, p. 389 (1950); Ibidem, 10°, p. 319 (1951).

(3) G. COTRONEI, « Bios », 2°, p. 27 (1913); « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », 23°, p. 454, (1914).

(4) G. M. BAFFONI e G. CATTE, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 9°, p. 282 (1950); « Rivista di Biologia », 43°, p. 373 (1951).

(5) AL. STEFANELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 10°, p. 159 (1951).

ratori⁽⁶⁾); era perciò possibile sottoporre le cellule di M., asportando ripetutamente la coda dell'animale, anche ad una prolungata attività reattiva.

Ho iniziato le esperienze eseguendo ripetute amputazioni della coda in larve appena sgusciate di *Triturus vulgaris* (*Triton taeniatus*) *meridionalis* BLGR. (allo stadio 42 di Gläsner) e di *Hyla arborea Savignyi* AUD. (allo stadio 24 di Eakin); onde avere risultati comparabili, ho interrotto le esperienze immediatamente dopo la metamorfosi (riduzione delle branchie in *Triturus* e della coda in *Hyla*). Le operazioni sono state eseguite con gli accorgimenti dell'embriologia sperimentale (lavaggi ripetuti, intervento operatorio e soggiorno degli animali fino a completa cicatrizzazione in soluzione di Holtfreter sterile; narcosi con bassa temperatura). Dalle esperienze possono dedursi due ordini di considerazioni: l'uno riguardante le caratteristiche della rigenerazione della coda nei due gruppi di animali, e l'altro relativo ai fenomeni reattivi delle cellule di M.

L'andamento delle esperienze è descritto nella seguente tabella:

	Età	Numero individui	Lunghezza media oro-anale	Lunghezze medie della coda asportata	Tasso di rigenerazione giornaliera
In <i>Triturus</i> :					
1° taglio	24 gg.	25	5,3 mm.	4,4 ± 0,4 mm.	—
2° taglio	48	24	7,2	3,8 ± 0,4	0,158 mm.
3° taglio	75	24	8,5	6,7 ± 0,7	0,25
4° taglio	98	24	12,0	10,2 ± 0,9	0,45
5° taglio	110	24	16,3	6,8 ± 0,8	0,56
metamorfosi . .	113	14	16,7	2,5 ± 0,8	0,84
In <i>Hyla</i> :					
1° taglio	8 gg.	50	3,5 mm.	5,7 ± 0,2 mm.	—
2° taglio	20	45	4,0	3,0 ± 0,3	0,25 mm.
3° taglio	31	42	5,0	5,0 ± 0,5	0,45
4° taglio	43	38	8,0	8,0 ± 0,7	0,66
5° taglio	52	26	10,1	9,5 ± 0,7	1,05
6° taglio	61	16	12,5	12,0 ± 0,9	1,33
metamorfosi . .	65	5	13,1	—	—

(6) AL. STEFANELLI, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », 19°, fasc. 10-12 (1944); AL. STEFANELLI e A. CAPRIATA, « Ricerche di Morfol. », 20-21°, p. 605 (1944); AL. STEFANELLI, G. THERMES e M. PODDIE, « Rivista di Biologia », 42°, p. 239 (1950); S. BAITA, « Arch. Zool. Ital. », 36°, p. 105 (1951).

Da ciò risulta che: 1° la velocità assoluta di rigenerazione della coda degli Anfibi aumenta con l'età della larva (in accordo con i dati di Zenely e di Ellis ⁽⁷⁾), 2° essa è maggiore negli Anfibi anuri: ciò va messo in rapporto, oltre che con la maggior rapidità di sviluppo di questi, anche con la maggior complessità morfologica dei tessuti caudali degli Anfibi urodeli (formazione di scheletro metamerico, sviluppo maggiore della muscolatura, ecc.). Va inoltre notato che gli individui dei lotti di controllo (allevati nelle stesse condizioni ambientali e trofiche) sono metamorfosati in media dieci giorni prima di quelli operati ⁽⁸⁾.

Per lo studio delle cellule di M. gli animali furono fissati in liquido di Bouin o di Helly; ad essi fu isolato il cranio, del quale sono state allestite sezioni trasversali in serie (12 o 8 μ di spessore) che successivamente sono state colorate in ematossilina ferrica o col metodo di Nissl (al bleu di toluidina) o impregnate secondo il metodo di Bodian.

Le cellule di M. di *Triturus* operati (22 individui) non differiscono notevolmente in dimensioni da quelle dei controlli (10 individui): queste misurano in media $148 \times 49 \mu$, quelle $150 \times 49,5 \mu$. Benché i valori medi non abbiano un significato statistico, essi indicano una lieve ipertrofia del pirenoforo; la tigreide, infatti, presenta modificazioni reattive: le zolle sono più numerose attorno al nucleo, notevoli masse di sostanza basofila sono addossate alla membrana nucleare; il nucleolo è ipertrofico (il doppio in diametro che nei controlli) ed intensamente basofilo. L'amputazione ripetuta della porzione caudale della fibra di M. di *Triturus* si rispecchia nel pirenoforo con un quadro reattivo i cui aspetti, più che alle modificazioni tipiche della *reazione retrograda*, si avvicinano a quelle osservate negli stadi di iperattività del neurone (Lugaro, Hydén, ecc. ⁽⁹⁾); va osservato a tal proposito che le operazioni di asportazione dell'assone sono state condotte durante il periodo larvale, quando l'animale è in pieno sviluppo e la fibra di M. è fisiologicamente in accrescimento; l'amputazione ripetuta del neurite non provoca *ex novo* uno stimolo di accrescimento, ma esalta quello già in atto; la reazione non molto marcata, infine, può essere dovuta alla distanza a cui è avvenuta l'amputazione [in conformità con quanto è stato constatato da diversi Autori (Nissl, Marinisco, ecc.) e cioè che l'intensità della reazione del pirenoforo è inversamente proporzionale alla distanza a cui avviene la stimolazione].

(7) C. ZELENY, « Journ. Experim. Zool. », 7°, p. 477 (1909); M. M. ELLIS, Ibidem, 7°, p. 421 (1909).

(8) Ancor più significativi, a tale proposito, sono i risultati ottenuti in un lotto di *Hyla* trattato per dieci giorni consecutivi con estratti tiroidei (0,05 % di estratto fresco di ormone in acqua) e successivamente sottoposto a sei asportazioni successive di coda (per una lunghezza media totale di 51 mm. di coda asportata), eseguite rispettivamente in larve di 20, 26, 35, 44, 54 e 63 giorni; i sette girini superstiti (di 25 trattati) sono metamorfosati anch'essi circa a 65 giorni mentre i controlli, trattati contemporaneamente alla stessa concentrazione di estratto tiroideo, sono metamorfosati circa un mese prima.

(9) E. LUGARO, « Arch. Ital. de Biol. », 24°, p. 258 (1895); H. HYDÉN, « Act. Physiol. Scand. », 6° (Suppl. XVII) (1943); C. A. HAMBERG e H. HYDÉN, « Acta oto-lar. », 75° (Suppl.), p. 82 (1949).

Nelle cellule di M. di *Hyla* operate (16 individui), invece, non ho mai riscontrato fenomeni di ipertrofia, ma costantemente atrofia; ciò sia nei riguardi con quelle dei controlli di pari età (10 individui metamorfosati già da dieci giorni e le cui cellule di M. erano in incipiente involuzione, - ved. Baffoni e Catte⁽⁴⁾), che, e maggiormente, con quelle dei controlli a pari stadio (appena metamorfosati, quando le cellule di M. presentavano il massimo sviluppo, ved. Baffoni

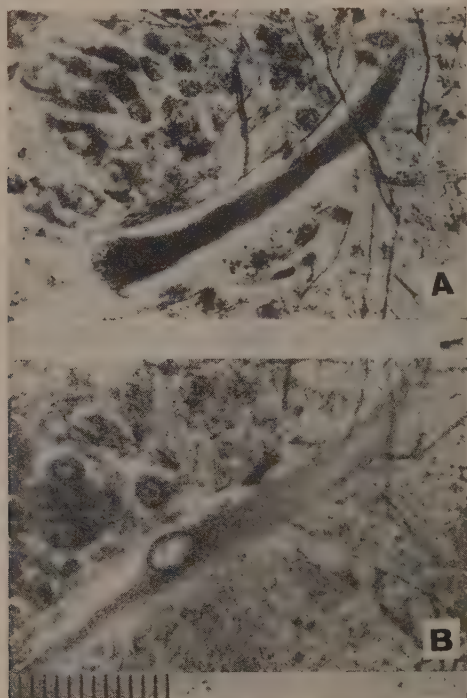


Fig. 1. - A. Cellula di Mauthner di *Hyla* operata di cinque asportazioni della coda: notare la riduzione in spessore rispetto alla cellula di M. di un animale di controllo di pari età (B). (Metodo di Bodian; ingrandimento come dalla scala in calce, in cui ogni intervallo corrisponde a 10μ).

e Catte⁽⁴⁾). I pirenofori delle cellule di M. degli animali operati, rispetto a quelli dei controlli di pari età, si presentano affusolate ed assottigliate, specialmente verso il dendrite laterale (fig. 1); le misurazioni eseguite dimostrano un lieve accorciamento del pirenoforo (da $135 \pm 3,5\mu$ a $116 \pm 2,9\mu$), ma dati omogenei ed una differenza statisticamente significativa risulta da quelle dello spessore: mentre le cellule di M. dei controlli di pari età misurano $20 \pm 1,3\mu$ di spessore, quelle degli animali che hanno subito sei asportazioni della coda misurano solo $13,4 \pm 1,6\mu$; la differenza tra le due serie di misurazioni ($D. = 6,6$) non è imputabile al caso ($3\sigma = 4,38$;

$P. < 0,01\%$); l'assottigliamento riscontrato nelle cellule di M. degli animali operati si ripercuote anche nei rapporti tra le aree della sezione delle cellule di M. e di quella del midollo allungato (all'altezza delle cellule di M.) che da $1/125$ (nei controlli) scende a $1/158$ (negli animali operati). La neurofibrillazione è alterata: le neurofibrille sono più rade, a volte più spesse, a volte in disgregazione. L'aspetto della tigroide è quello di cromatolisi periferica incipiente: le zolle di tigroide, specialmente quelle alla periferia del pirenoforo, sono assottigliate o in dissolvimento; il nucleo appare più scolorato ed il nucleolo è più piccolo di quello delle cellule dei controlli.

L'assoluta mancanza di ipertrofia e di cromatolisi reattiva nella cellula di M. di *Hyla* operate sarebbe rimasta inesplicabile se non avessi pensato, sulla scorta di alcune osservazioni rese note da Stefanelli ⁽⁶⁾, di eseguire uno studio comparativo del midollo spinale caudale negli animali operati e nei controlli. Ho perciò sezionato in serie, con tagli trasversali, longitudinali e sagittali, le code che avevo fissato dopo ogni taglio, quelle dei controlli ed alcune di animali di altri due lotti, nei quali avevo asportato la coda una sola volta, ma ad uno stadio di sviluppo più avanzato. I risultati più salienti, emersi dall'esame delle sezioni istologiche, sono quelli ottenuti dal confronto dei tagli trasversali (fig. 2): mentre negli Anfibi urodeli il tessuto nervoso del midollo caudale rigenera completamente, anche dopo il quinto taglio della coda, si differenzia rapidamente (ved. nella figura le cellule di Rohon-Beard) ed in esso rigenerano le fibre discendenti (tra cui quelle di Mauthner), negli Anfibi anuri invece il midollo caudale rigenera, almeno nei primi dieci giorni ⁽¹⁰⁾ e già dopo la prima asportazione, come un sottile tubolino costituito dal solo epitelio endimale, senza alcun rivestimento di fibre (tra cui, s'intende, quelle di Mauthner); anche l'esame delle sezioni longitudinali e sagittali, trattate con i metodi specifici (impregnazione all'Ag. colloidale), ha confermato l'assenza di fibre in rigenerazione nel midollo delle code rigenerate di *Hyla*. In base a questi elementi l'atrofia riscontrata nelle cellule di M. di *Hyla* e l'assenza di fenomeni reattivi vanno interpretati come dovuti alla mancata rigenerazione della fibra di M. ⁽¹¹⁾.

CONCLUDENDO: le cellule di M. degli Anfibi urodeli reagiscono diversamente da quelle degli Anfibi anuri. In *Triturus*, ove la fibra di M. rigenera ad ogni asportazione, è stata notata una lieve ipertrofia del pirenoforo,

(10) Ricordo che nei midolli spinali di larve di *Hyla* isolati, mediante asportazione di un tassello di coda, all'inizio (dopo 8 giorni) si è osservato un fenomeno di involuzione con analogo risultato (tubolino endimale nudo); dopo circa un mese, però, si è constatata la comparsa di alcuni elementi nervosi differenziati ed una modesta rigenerazione di fibre (G. THERMES, « Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari », 20, fasc. 3-4, 1951).

(11) È opportuno osservare che le modificazioni rinvenute nel pirenoforo delle cellule di M. di *Hyla* (atrofia e cromatolisi periferica) sono molto diverse da quelle da me precedentemente notate nei pirenofori di neuroni motori spinali che pure non rigenerano (ipertrofia e cromatolisi diffusa) (BAFFONI (2)); questi ultimi però appartenevano ad una porzione di midollo spinale che degenera rapidamente.

accompagnata da tipiche modificazioni della sostanza basofila e dell'apparato nucleolare; le modeste proporzioni del fenomeno vanno messe in rapporto sia alla distanza dell'amputazione dal pirenoforo, e sia al fatto che le operazioni sono state eseguite durante il periodo di accrescimento dell'animale, quando l'elemento mauthneriano è in normale attività di sviluppo: la rigenerazione dell'assone, cioè, avviene ad opera dei normali

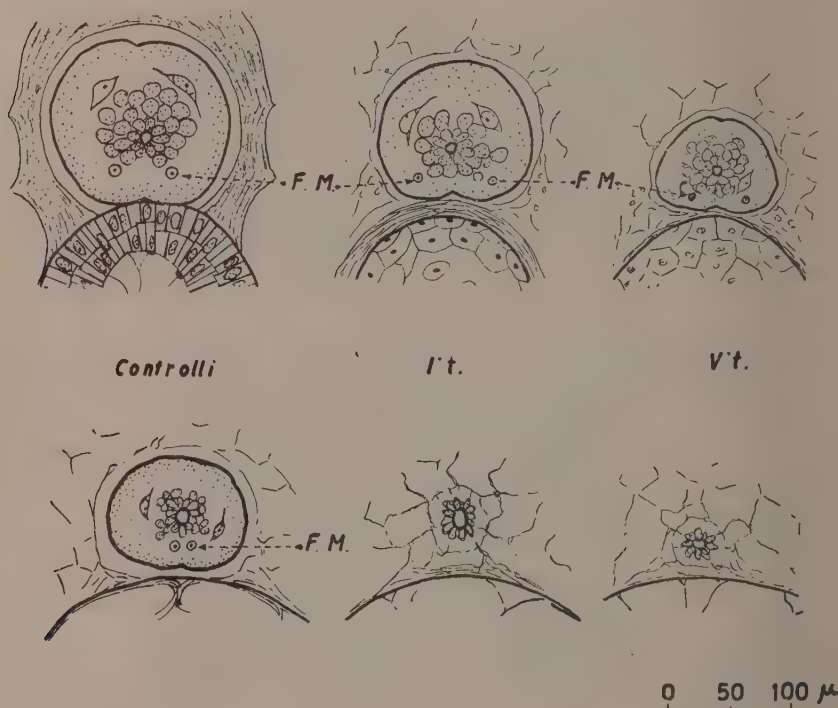


Fig. 2. - Rigenerazione del midollo spinale nella regione della coda di *Triturus* (sopra) e di *Hyla* (sotto) dopo un taglio (1° t.) e alla quinta asportazione della coda (5° t.): la fibra di Mauthner (F. M.) rigenera solo in *Triturus*. (Disegni eseguiti alla camera lucida, a pari livello - a un terzo dall'origine della coda - da preparati impregnati secondo il metodo di Bodian).

processi di accrescimento in atto nel neurone, senza che in questo venga destata una nuova attività di sviluppo. In *Hyla*, dove la fibra di Mauthner non rigenera, nel pirenoforo di origine in vece di fenomeni reattivi si manifestano fenomeni di involuzione; va notato che in questo caso l'atrofia è meno intensa di quella riscontrata nelle cellule di M. di larve trattate con ormoni tiroidei (Baffoni e Catte⁽⁴⁾); i due fenomeni non sono però comparabili in quanto nel caso attuale l'atrofia è frutto di una riduzione dell'attività funzionale del neurone, mentre nell'altro caso era provocata dall'azione dei fattori ormonali della metamorfosi che anticipavano l'involuzione dei sistemi propri della vita acquatica.

Biologia. – *Effetti di trattamento con urea su espianti ventrali di gastrule di «Rana esculenta» L.*^(*). Nota di VINCENZO LEONE, presentata^(**) dal Socio S. TONZIG.

È a tutti noto come l'urea denaturi le proteine; tale denaturazione è più profonda di quella che si ottiene trattando le stesse proteine con soluzioni di quelle sostanze che sono capaci di indurre modificazioni nel corso della determinazione embrionale (NaSCN, ioduri, p. nitrofenolo, taluni coloranti vitali). Dette modificazioni, in recenti ricerche, vengono interpretate appunto come effetto della denaturazione operata da tali sostanze sulle proteine protoplasmatiche dell'embrione⁽¹⁾.

Gli interessanti risultati ottenuti da Jenkinson⁽²⁾ il quale, nel corso di una ricerca per studiare l'influenza delle modificazioni dell'ambiente esterno sullo sviluppo embrionale, aveva trattato embrioni di *Rana temporaria* oltre che con una serie di sali e di sostanze varie anche con urea, e le accennate moderne acquisizioni sul meccanismo di azione delle ricordate sostanze teratogene, mi indussero a riprendere lo studio dell'azione della urea sullo sviluppo della *Rana*. Avevo ottenuto già i primi risultati quando dal Fautrez⁽³⁾ veniva pubblicato un lungo lavoro sullo stesso argomento.

Le tipiche malformazioni riscontrate da questo A. nei giovani embrioni di anfibì allevati in soluzioni di urea sono: aumento delle dimensioni della corda, formazione di piccoli ammassi di tessuto cordale in sede eterotopica ma vicina a quella normale, accelerazione dello sviluppo del pronefro, assenza di lente, fenomeni vari a carico del sistema nervoso. Circa l'interpretazione del meccanismo di produzione delle alterazioni descritte, relativamente alla formazione abnorme di tessuto cordale, Fautrez pensa che l'urea agisca provocando un turbamento della citodifferenziazione in quei territori che rispondono con produzione di corda e cioè in maniera del tutto differente dal normale. Il fenomeno avrebbe luogo perchè, per modificazioni della permeabilità cellulare e per fenomeni di superficie derivanti dall'azione dell'urea, verrebbe favorita la diffusione di sostanze o di granuli citospecifici dalla corda verso quei territori.

Rimandando ad altra occasione l'esposizione dei miei risultati sull'azione dell'urea sugli embrioni *in toto*, risultati dei quali già Ranzi ha fatto

(*) L'Autore, assistente presso l'Istituto di Anatomia umana normale dell'Università di Palermo, ha eseguito le presenti ricerche presso l'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) Cfr. quanto riassunto in S. RANZI, «Rend. Ist. sup. Sanità», 13, 811 (1950).

(2) J. W. JENKINSON, «Arch. f. Entwmech. d. Org.», 21, 367 (1906).

(3) J. FAUTREZ, «Arch. de Biol.» 62, 195 (1951).

cenno in una rivista sintetica ⁽⁴⁾, riferisco qui su alcune altre ricerche che ho eseguito al fine di discriminare quanta parte avessero, nel determinismo dell'evocazione da urea, gli evocatori specifici diffusibili invocati dal Fau- trez e quanta ne avessero le modificazioni intrinseche locali imputabili alla denaturazione, come tale.

Si trattava di saggiare la reattività all'urea di territori embrionali sot- tratti all'influenza degli induttori specifici, prima di ogni probabile diffu- sione di questi in quelli: il metodo di espiantare, da giovani gastrule la regione ventrale dell'embrione, escludendo i territori presuntivi della pia-

stra neurale, e della corda, mi sembrò il più adatto a realizzare quelle con- dizioni.

Per compiere tali ricerche mi sono servito di uova di *Rana esculenta* L. deposte in acquario; all'inizio della gastrulazione, cioè al primo apparire del solco falciforme e poi in stadi più avanzati compresi tra il 10 e l'11 delle tabelle di Harrison (fig. 1) con l'aiuto di forbicine da iridectomia o di un piccolo bisturi espiantavo il fram- mento ventrale del giovane embrione. Come sopra accennato il taglio veniva eseguito in modo che l'espianto com- prendesse il territorio presuntivo del- l'epidermide, quello del mesoderma e quello dell'entoderma, restando esclusi quelli della piastra midollare, della corda dorsale e la massima parte di quello dei somiti.

Subito dopo l'operazione gli e- spianti controllo venivano trasportati

in liquido di Holtfreter puro ed in Holtfreter con urea al 0,35 mol. e al 0,152 mol. (pari rispettivamente a concentrazioni del 2,10 % e dell'1,05 % di urea) gli espanti da trattare. In queste soluzioni furono lasciati per una o due ore, a temperatura ambiente (ca. 25°); trascorso tale tempo veni- vano tolti dall'Holtfreter-urea, lavati e trasportati in Holtfreter puro. Gli espanti che si sviluppavano in forma rotondeggiante più o meno regolare furono fissati dopo 2-3 giorni, taluni furono mantenuti in vita sino a 6-7 giorni e raggiunsero mm. 3-4 di diametro.

Nei preparati allestiti con metodi comuni (Bouin, paraffina, ematosi- lina Ehrlich, eosina) ho notato le seguenti caratteristiche che per brevità credo opportuno schematizzare in una descrizione unica sia per i controlli

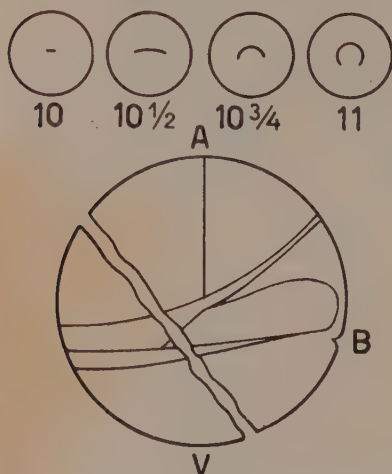


Fig. 1. - In alto schema della forma del blastoporo negli stadi di operazione (per gli stadi cfr. Rough).

In basso schema dell'operazione; sono segnati i territori presuntivi secondo lo schema di Vogt. A polo animale; B inizio dell'introflessione, V polo vegetativo.

(4) S. RANZI, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 23, suppl., 19 (1951).

che per gli espianti trattati, presentando tutti un aspetto generale comune. Le differenze consistono in variazioni delle percentuali di particolari organoidi presenti (tubuli renali, intestino, lentoidi), nonché nell'assenza di tessuto cordale, di tessuto nervoso differenziato e di melanofori nei controlli.

In accordo con l'aspetto esterno le sezioni degli espianti si presentano in forma di cerchi costituiti da un rivestimento ectodermico a più strati di cellule (tav. I, fig. 2), le più esterne delle quali sono cariche di granuli di pigmento giallo-bruno sparsi nel citoplasma. Lo strato ectodermico è separato dal connettivo sottostante da una bene evidente membrana limitante. In taluni casi una parte del rivestimento esterno è però costituita da entoderma che ricopre grandi cellule cariche di vitello; in altri casi dette cellule sporgono direttamente verso l'esterno, senza presentare una evidente disposizione di epitelio a palizzata.

All'interno del rivestimento sopra descritto, si trova lo strato mesenchimale, il quale circonda una grande cavità centrale che rappresenta il celoma e dalla quale è separato da rivestimento mesodermico (somatopleura) (Tav. I, fig. 4). Nella cavità celomatica fa ernia la massa vitellina più o meno voluminosa a seconda dei casi, con elementi cellulari in moltiplicazione verso la periferia e in disfacimento verso il centro. Le cellule più esterne, in alcuni casi, in un punto, si organizzano in una formazione allungata a cordone solido o a tubo con lume centrale, assumendo quindi il tipico aspetto di intestino. Questa formazione unisce un punto della massa vitellina con un punto della parete esterna dell'espianto.

In seno al mesenchima si notano formazioni vasali ripiene di cellule ematiche e grandi cavità rivestite da epitelio appiattito evidentemente porzioni del celoma, vi si trovano inoltre tuboli renali (Tav. I, fig. 4) che sporgono nel celoma e che in qualche caso vi si aprono. Più vicino all'ectoderma, abbastanza frequentemente, ho riscontrato formazioni rotondeggianti solide, costituite da grosse cellule a grande nucleo con evidente nucleolo e citoplasma basofilo; esse sono disposte irregolarmente (Tav. I, fig. 3). Dette formazioni hanno l'aspetto di masserelle in vario stadio di differenziazione, esse appaiono quali banali lentoidi (Tav. I, fig. 1), più frequenti questi negli embrioni trattati, o, solo nei trattati, quale tessuto nervoso embrionale (Tav. I, figg. 2, 3) che può perfino presentare differenziamento di fibre nervose in seno alla massa cellulare (Tav. I, figg. 4, 5). Come sopra accennato, tra le cellule del mesenchima soltanto in espianti trattati con urea ho notato la presenza di cromatofori con grossi e lunghi prolungamenti, mai nei controlli; lo stesso posso dire per il tessuto cordale (Tav. I, figg. 6, 7, 8). Negli espianti trattati infatti, sia nel mesenchima che in mezzo al tessuto di rivestimento entodermico, si individuano ammassi più o meno allungati di grosse cellule cordali vacuolizzate, a contorni molto netti, con nucleo piccolo, schiacciato verso la periferia.

La frequenza percentuale delle varie formazioni riscontrate e che caratterizza gli espianti trattati rispetto ai controlli è esposta nella tabella I.

TABELLA I.

	N° casi	Corda	Tubo intestinale organizzato	Tuboli renali	Len- toide	Massa nervosa tipo embrio- nale	Massa nervosa con fibre differen- ziate	Melano- fori
Controlli	26	0	13,6%	61,5%	65,4%	0	0	0
Trattati	39	10,2%	25,6%	79,5%	89,7%	38,5%	20,4%	20,4%

I risultati sin qui riferiti danno conferma del fatto che il trattamento con urea in embrioni di anfibio induce formazione di tessuto cordale a spese di tessuto che normalmente non si differenzia in questo senso e pongono soprattutto in evidenza che ciò avviene indipendentemente da qualsiasi influenza dell'induttore specifico. Anche tessuto nervoso si forma in sede inconsueta e sebbene induzioni banali (lentoidi) siano frequenti anche nei controlli, la induzione nervosa negli espianti trattati raggiunge un grado ed una differenziazione specifica quale nei controlli non si riscontra.

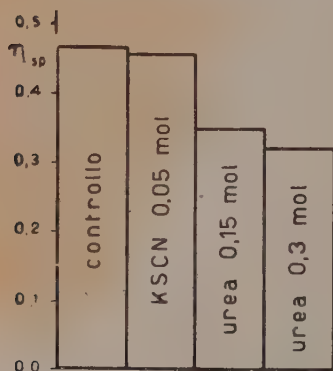


Fig. 2. - Schema dell'azione dell'urea, paragonata a quella del SCN' sulla viscosità di euglobulina *a+b* estratta da uova di *Rana esculenta*. L'altezza dei rettangoli rappresenta il valore della viscosità in presenza delle sostanze studiate e nel controllo (soluzione in 1 mol. KCl).

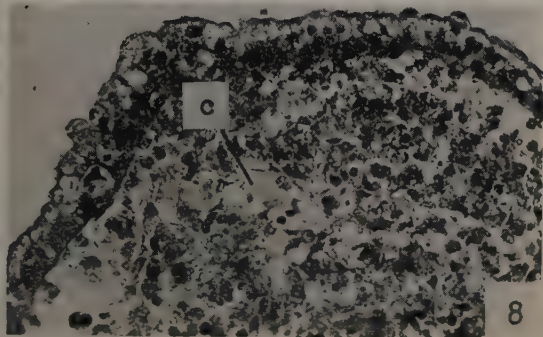
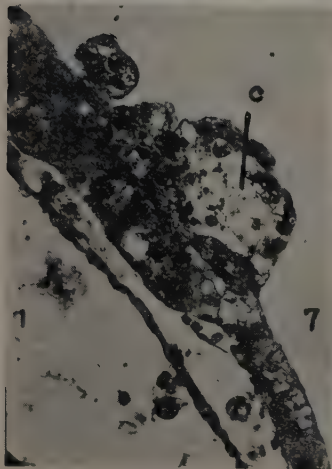
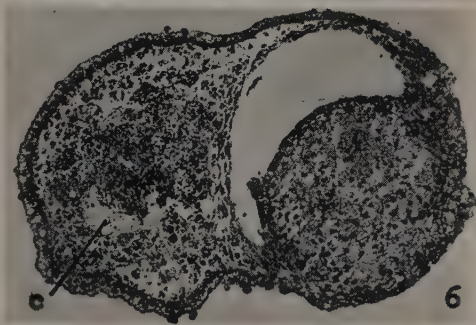
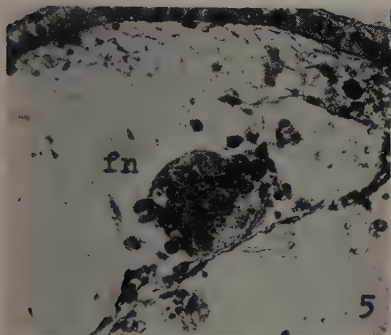
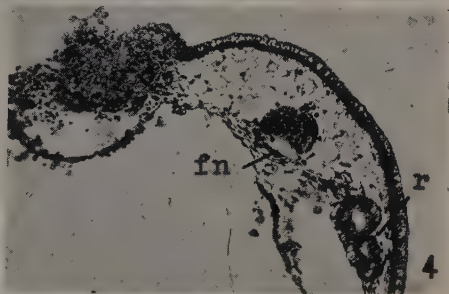
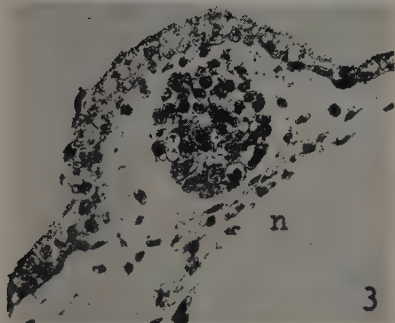
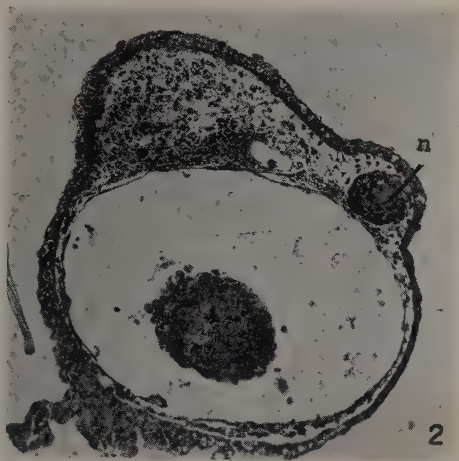
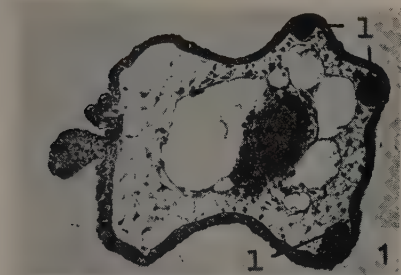
Il meccanismo della induzione, sia nervosa che cordale, è qui riconducibile non ad azione evocatrice specifica ma a quelle modificazioni della struttura del citoplasma delle cellule dei territori che hanno risposto con differenziazione in tessuto nervoso e corda, quali in altre esperienze e con altri agenti hanno ottenuto Ranzi e Tamini ⁽⁵⁾, Holtfreter ⁽⁶⁾, Yamada ⁽⁷⁾, e che, come già accennato, sono confermate dallo studio delle modificazioni delle molecole provocate con gli stessi agenti sugli estratti proteici e che io stesso ho potuto verificare osservando una diminuzione della viscosità delle proteine filamentose ripiegate estratte

dall'uovo di *Rana* per azione di urea. L'urea infatti abbassa la viscosità più di SCN' (fig. 2), con la qual cosa può essere posto in rapporto il fatto che oltre a evocare tessuto nervoso, fenomeno che si osserva anche per azione di SCN' (Ranzi e Tamini), l'urea determina in più formazione di corda in espianti ventrali, fatto che mai è stato osservato per azione di SCN'.

(5) S. RANZI e E. TAMINI, « R. Ist. Lombardo Sc. Lett. (Rend. Sc.) », 73, 525 (1940).

(6) J. HOLTFRETER, « J. Exp. Zool. », 106, 197 (1947).

(7) T. YAMADA, « Biol. Bull. », 98, 98 (1950).



SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

(tutte le figure si riferiscono ad espianti trattati con urea).

Fig. 1. — Nella sezione si notano il rivestimento in parte ectodermico ed in parte entodermico, il mesenchima, il celoma, e una massa di cellule ricche di vitello; in (*l*) tre lentoidi ($60\times$).

Fig. 2. — Si notano anche qui l'ectoderma, l'entoderma, il mesenchima e una massa di cellule con granuli di vitello; in (*n*) tessuto nervoso di tipo embrionale in seno al mesenchima ($85\times$).

Fig. 3. — Altra massa di cellule nervose di tipo embrionale (*n*) ($90\times$).

Fig. 4. — In mezzo al mesenchima si notano una massa di tessuto nervoso con differenziazione di fibrille (*fn*) e due sezioni di tubuli renali (*r*) ($100\times$).

Fig. 5. — Massa di tessuto nervoso con differenziazione di fibrille (*fn*) in altra sezione dell'espianto della fig. 4 ($200\times$).

Fig. 6. — Presenza di tessuto cordale (*c*) in mezzo al mesenchima ($80\times$).

Fig. 7. — Tessuto cordale (*c*) circondato da un rivestimento entodermico ($200\times$).

Fig. 8. — Particolare di altra sezione che presenta in (*c*) tessuto cordale in mezzo al mesenchima ($200\times$).

Embriologia. — *Risultati sulla distribuzione dei territori presuntivi degli organi nel germe di Ascidie allo stadio VIII, determinati con le marche al carbone* (*). Nota di GIUSEPPINA ORTOLANI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

La topografia delle aree organo-formative nel germe delle Ascidie ai primi stadi di sviluppo fu tracciata già nel periodo classico della embriologia sperimentale ad opera di Conklin (1905) ⁽¹⁾, mediante lo studio della ripartizione dei plasmi naturali colorati lungo il cell-lineage.

Conklin nell'uovo di *Styela* da poco fecondato individuò i diversi plasmi:

- a) il plasma giallastro che dà origine al mesoderma;
- b) il plasma grigio-ardesia che dà origine all'entoderma;
- c) il plasma grigio-chiaro che dà il sistema nervoso e la corda;
- d) il plasma chiaro che dà l'ectoderma.

Con lo studio delle ripartizioni dei plasmi colorati Conklin anticipò le memorande ricerche di Vogt ⁽²⁾ sugli anfibi con le marche colorate artificiali.

Secondo Conklin i territori degli organi larvali delle Ascidie sono localizzati allo stadio 8 blastomeri nel modo riportato in fig. 1.

Dall'epoca di Conklin lo schema riferito ha costituito la base di tutte le ricerche sperimentali successive; e da esse è stato indirettamente ricon-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Palermo.

(**) Nella seduta del 12 gennaio 1932.

(1) E. G. CONKLIN, *The organization and cell-lineage of the Ascidian egg*. « J. Acad. Nat. Sci., Philadelphia », vol. 13, p. 1 (1905).

(2) W. VOGT, *Gestaltungsanalyse am Amphibienkeim mit örtlicher Vitalfärbung*. « I. Arch. Entw. Mech. », Leipzig, vol. 106, p. 542 (1925).

fermato (cfr. ricerche di Tung (1932) ⁽³⁾, Rose (1939) ⁽⁴⁾, di von Ubisch (1939-1940) ⁽⁵⁾, di Reverberi e Minganti (1946-1947) ⁽⁶⁾ ecc.).

Direttamente, mediante i metodi di Vogt (1925), il Tung (1932) e Vandebroek (1937) ⁽⁷⁾, tentarono di ricontrollarlo, ma i risultati furono scarsi per il fatto che nell'uovo di Ascidie le marche colorate si diffondono in altri territori oltre quelli in cui furono poste.

Vandebroek, tuttavia, ha tracciato una carta topografica degli abbozzi degli organi, che, però come si vede (fig. 2) differisce in punti abbastanza essenziali da quelli di Conklin.

Recentemente Spratt (1946) ⁽⁸⁾ per lo studio, dei territori presuntivi

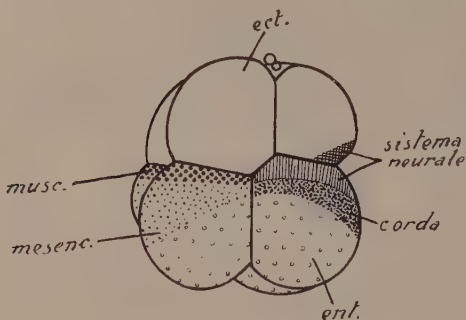


Fig. 1.

nell'uovo di pollo ha introdotto un nuovo metodo: quello delle marche al carbone. Questo metodo fu applicato all'uovo di pollo per l'inefficienza dimostratasi con le colorazioni vitali (diffusione del colore).

Il metodo di Spratt (1946) si può applicare in modo perfetto all'uovo delle Ascidie; perciò lo ho adottato.

La ricerca fu suscitata dai seguenti tre motivi:

I. - Divergenze tra gli schemi di Conklin e Vandebroek a proposito della localizzazione del sistema nervoso, la corda e la muscolatura (fig. 1 e fig. 2).

II. - Gli schemi di Conklin riguardano i sistemi e non gli organi: molto meno le singole porzioni degli organi.

(3) T. C. TUNG, *Expériences de coloration vitale sur l'oeuf d'Ascidella aspersa*. « Arch. de Biol. », vol. 43, p. 451 (1932).

(4) S. M. ROSE, *Embryonic induction in the Ascidia*. « Biol. Bull. », vol. 77, p. 216 (1939).

(5) L. v. UBISCH, *Ueber die Entwicklung von Ascidienlarven nach frühzeitigen Entfernung der einzelner organbildenden Keimbezirke*. « Roux' Arch. », vol. 139, p. 438 (1939); *Weitere Untersuchungen über Regulation und Determination im Ascidienkeim*. « Roux' Arch. », vol. 140, p. 1 (1940).

(6) G. REVERBERI e A. MINGANTI, *Le potenze dei quartetti animali e vegetativo isolati di Ascidella aspersa*. « Publ. Staz. Zool. », Napoli, vol. 20, p. 135 (1946 a); *Fenomeni di evocazione nello sviluppo dell'uovo di Ascidia*. « Pubbl. Staz. Zool. », Napoli, vol. 20, p. 199 (1946 b); *La distribuzione delle potenze nel germe di Ascidie allo stadio di otto blastomeri analizzata mediante le combinazioni e i trapianti di blastomeri*. « Pubbl. Staz. Zool. », Napoli, vol. 21, p. 1 (1947).

(7) G. VANDEBROEK, *Inductieverschijnselen in de ontwikkeling van de Ascidienkiem*. « Natuurwet. Tijdschr. », vol. 20, p. 234 (1938) (Congres nummer).

(8) N. T. JR. SPRATT, *Formation of the primitive streak in the explanted chick blastoderm marked with carbon particles*. « J. Exp. Zool. », vol. 103, p. 259 (1946).

III. — I movimenti morfogenetici fino al presente, non sono stati studiati.

Al metodo di Spratt, ho apportato delle lievi modificazioni di tecnica, in quanto mi sono servita di granelli di gesso di colore diverso.

I granuli depositati direttamente sulle cellule dei territori indagati restano strettamente localizzati, seguendo il destino e lo spostamento delle cellule.

Nella presente Nota espongo solo alcuni dei risultati, essendo il lavoro ancora in corso.

TERRITORIO DEI PALPI. —

Sulla localizzazione di questo territorio non abbiamo alcun dato: Conklin, e Vandebroek non lo raffigurano nei loro schemi.

Schmidt (1931)⁽⁹⁾, in *Ciona* e *Phallusia* ritiene che non vi è alcuna localizzazione precoce di essi, e che il loro sviluppo è epigenetico. Da un solo blastomero dello stadio II egli ottenne un embrione con tutti e tre i palpi.

In *Phallusia mamillata*, *Ascidia aspersa*, e *Ascidia malaca*, su cui sono state

condotte le mie ricerche, il territorio presuntivo dei palpi è situato simmetricamente nei due blastomeri animali anteriori (a 4.2) (a 4.2), secondo la fig. 3 (15).

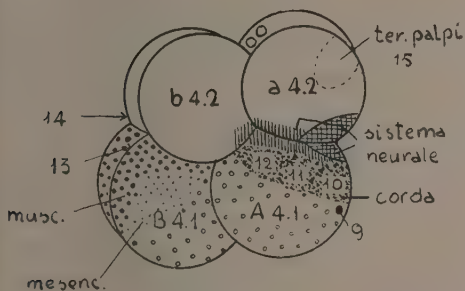


Fig. 3.

TERRITORIO DEL SISTEMA NERVOSO. — Vandebroek localizza questo territorio, allo stadio VIII solo nella metà animale dell'uovo, e precisamente tanto nei blastomeri anteriori quanto nei posteriori (cfr. fig. 2).

Secondo Conklin, al contrario, nei blastomeri animali posteriori non c'è localizzazione neurale: invece questa esiste nei blastomeri animali e vegetativi anteriori (cfr. fig. 1).

Von Ubisch (1939-1940) è riuscito ad avere piastre neurali e cervello dagli embrioni che si sviluppano dai quartetti vegetativi isolati.

Secondo Reverberi e Minganti invece (1946-1947) non si ha mai formazione di cervello o di altre strutture neurali dalle metà vegetative del germe allo stadio VIII.

(9) G. A. SCHMIDT, *Die Entwicklung der Palpen bei Ascidienhelfarven*, « Arch. Zool. », vol. 16, p. 490 (1931).

I miei risultati dicono che il materiale formativo del sistema neurale è localizzato nei blastomeri vegetativi e animali (fig. 3); infatti i granuli di gesso colorato posti su questi blastomeri, si rinvennero, a sviluppo larvale terminato, nella vescicola cerebrale (fig. 5); anche il territorio del midollo spinale è tutto localizzato nei blastomeri animali (a 4.2) e vegetativi anteriori (A 4.1): in un solo caso una marca colorata posta sul blastomero animale posteriore sinistro (b. 4.2) è stata rinvenuta nel midollo spinale: questo unico caso è in favore dello schema di Vandebroek; ma ulteriori determinazioni sono necessarie.

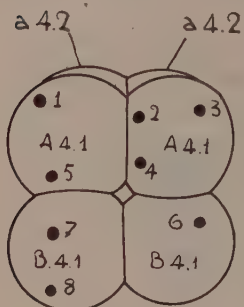


Fig. 4.

TERRITORIO DELL'EPIDERMIDE. - La localizzazione del territorio dell'epidermide conviene con gli schemi di Conklin, ma i miei risultati giungono fino ad una localizzazione, almeno approssimata delle singole parti dell'epidermide (figg. 3-5) (punti 14-15).

TERRITORIO DELLA CORDA. - Confermando i dati di Conklin, ho messo in evidenza da quale territorio derivano le porzioni anteriori, medie, e posteriori della corda (figg. 3-5) (punti 10-11-12).

TERRITORIO DELL'ENTODERMA. - La localizzazione ritratta dalle mie indagini conviene con quella di Conklin; anche qui ho localizzato le diverse porzioni dell'intestino (figg. 3-4-5) (punti da 1 a 9).

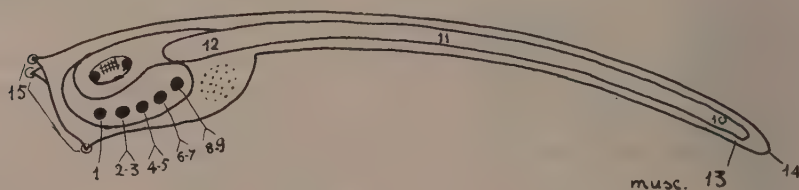


Fig. 5.

TERRITORIO DEL MESODERMA. - Per il territorio del mesoderma (muscolatura e mesenchima) vi è, negli schemi di Conklin e Vandebroek qualche divergenza (cfr. fig. 1 e 2).

Nei miei risultati trovano un punto d'accordo tanto lo schema di Conklin che quello di Vandebroek (cfr. fig. 3) (punto 13).

CONCLUSIONE. - Nell'uovo di ascidiella *Aspersa*, *Phallusia mamillata* e *Ascidia malaca* allo stadio VIII blastomeri, col metodo dei granuli di gesso colorati è stato confermato nelle linee generali il piano degli abbozzi stabilito da Conklin (1905). Inoltre è stato possibile spingere ulteriormente l'analisi, localizzando i territori del germe da cui derivano le singole porzioni dei diversi organi.

Zoologia. — *Ulteriori osservazioni sulla biologia e sulla genetica dell'«Anacridium aegyptium» L. (Orthoptera) (*)*. Nota di GIUSEPPE COLOMBO, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Le ricerche sulla genetica delle cavallette sono poco numerose per le difficoltà di allevamento di questi animali: in poche specie si ha più di una generazione all'anno, e negli allevamenti che riescono si ha spesso un'alta mortalità.

Moltissimi caratteri (quali la colorazione, la lunghezza delle ali, ecc.) sono sensibili alle condizioni ambientali; queste, negli allevamenti, devono essere controllate in modo esatto; inoltre il comportamento osservato in laboratorio non sempre può essere confrontato con le osservazioni in campo.

Per questo motivo le ricerche genetiche di Creighton e Robertson ⁽¹⁾ e quelle di Sansome e La Cour ⁽²⁾ perdono parte del loro valore (Uvarov) ⁽³⁾.

Le ricerche fatte da molti Entomologi sono quasi tutte rivolte allo studio della influenza di fattori ambientali, e gli esperimenti di incroci non sono molto significativi o per la scarsità del materiale considerato o per non essere state impostate con una tecnica precisa allo scopo di studiarne il comportamento ereditario.

Nelle presenti ricerche si è tentato di vedere il comportamento ereditario di alcuni caratteri nell'*Anacridium aegyptium* L., badando nello stesso tempo di controllare alcune condizioni di allevamento e di trovare un « optimum » di condizioni, soprattutto per avere più generazioni all'anno.

Osservazioni preliminari sono già state pubblicate (Colombo 1950 ⁽⁴⁾); verranno riportati qui i risultati ulteriori; credo però opportuno illustrare prima più ampiamente le condizioni di allevamento in modo che più esattamente ad esse possano essere riferiti i risultati ottenuti.

L'apparecchiatura ha subito e subisce continue modificazioni in base alle osservazioni fatte e alle esigenze della ricerca.

Gli animali vengono allevati in una camera termoregolata ad una temperatura tra i 25° e 35° C. L'umidità varia, a seconda della temperatura, da 85 a 40 % di umidità relativa. L'illuminazione è ottenuta con lampade fluorescenti tenute costantemente accese per 10 ore su 24.

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia Comparata dell'Università di Padova diretto dal prof. U. D'Ancona.

(**) Nella seduta del 9 febbraio 1952.

(1) M. CREIGHTON e W. R. ROBERTSON, *Genetic studies on Chorthippus longicornis*. « J. Hered. », 32, 339-341 (1941).

(2) F. S. SANSOME e L. LA COUR, *The genetics of grasshoppers: Chorthippus parallelus*. « J. Gen. », 30, 415-422 (1935).

(3) B. P. UVAROV, *Recent advances in Acridiology: Anatomy and Physiology of Acrididae*. « Trans. R. Ent. Soc. London », 99, 1-75 (1948).

(4) G. COLOMBO, *Osservazioni sulla biologia dell'«Anacridium aegyptium» L. (Orthop.)*. « Boll. di Zool. Suppl. » 17, 443-447 (1950)

I singoli gruppi di cavallette (coppie, famiglie, discendenze di singole ovature, o gruppi di altre categorie) vengono tenuti in batterie di gabbie di rete metallica sottile a maglia fitta, delle dimensioni di cm. $40 \times 30 \times 30$. Le uova vengono fatte deporre in tubi di vetro pieni di sabbia mantenuta costantemente umida, che vengono posti con l'apertura a livello del fondo di ogni singola gabbia. Le uova deposte vengono incubate nei tubi stessi alla temperatura di 33°C . circa, tenuti costantemente umidi.

Le larve di ogni singola ovatura vengono allevate, generalmente fino alla seconda muta, in gabbie di celluloidi tenute nella camera termoregolata, poi vengono passate nelle gabbie di rete dove rimangono, sempre nella stessa gabbia, fino allo stadio adulto.

L'alimentazione consiste per i primi due stadi larvali di foglie di cicoria o lattuga; per le larve degli altri stadi e per gli adulti di foglie tenere di ligustro. Si è badato che l'alimento fosse sempre abbondante e fresco. I rametti o le foglie sono posti in bottiglie piene d'acqua. Le variazioni di umidità apportate dall'immissione dell'alimento fresco non sono apprezzate dall'igrografo della camera.

Alcuni dati ricavati dai controlli eseguiti nel corso degli allevamenti sono riportati nelle tabelle seguenti.

Durata media di incubazione a 31° – 35°C .

Numero di ovature controllate	29
Numero medio di giorni dalla deposizione alla schiusa	27
Ampiezza delle variazioni in giorni	31–24

La mortalità è stata piuttosto alta, ma molto variabile. Non sono state fatte osservazioni particolari nè sul numero di uova deposte nè sulla percentuale di schiusa. Accanto ad ovature dalle quali si sono avuti solo 4 adulti, da altre si sono avuti sino a 34 adulti. L'attrezzatura attuale non mi ha permesso di seguire la mortalità larvale. Il numero di individui adulti per ovatura risulterà in seguito nell'esposizione dei dati.

In due anni di allevamento si sono ottenute circa cinque generazioni anzichè avere una generazione all'anno come è riportato per questa specie. La diapausa imaginale femminile risulta quindi molto accorciata. Non è stata neppure seguita tale questione; dalle osservazioni casuali fatte per altre ricerche si è visto che i maschi al 5° stadio larvale hanno già spermatozoi nel testicolo mentre le femmine subito dopo l'ultima muta hanno ancora gli ovari filiformi.

Gli adulti di *Anacridium aegyptium* presentano un dimorfismo sessuale notevole soprattutto per quanto riguarda la taglia. Altre variazioni evidenti tra gli adulti raccolti in natura non mi risulta sieno state descritte, nè io ho avuto occasione di osservarne.

Durata dalla schiusa all'adulto.

Ovature	N. di individui adulti alla data della rilevazione	N. totale di individui presenti alla data della rilev.	N. di giorni dalla schiusa allo stadio immaginale	Temperatura Cent.	Umidità relativa
25 d	2	8	55	30°-35°	40-45 %
25 d	7	8	55	»	»
25 h	17	28	35	»	»
4 b	8	13	53	»	»
12 b	16	16	60	»	»
7 e	8	10	59	»	»
16 f	6	13	37	28°-32°	45-55 %
25 i	12	18	30	»	»
25 g	22	27	47	»	»
8 c	5	17	86	25°-28°	60-70 %
25 b	3	4	87	»	»
7 c	1	5	88	»	»
16 d	1	7	92	22°-25°	60-85 %
3 e 16	3	7	108	»	»

Da incroci ripetuti tra consanguinei (inincroci) sono comparse alcune variazioni morfologiche molto evidenti quali brachitterismo ed altre variazioni più lievi delle elitre e delle ali, inoltre altre modificazioni di caratteri morfologici. Queste variazioni saranno oggetto di una Nota a parte poichè richiedono ulteriori indagini.

Variazioni della pigmentazione sono note durante gli stadi larvali e bene evidenti sono risultate negli allevamenti e negli incroci che ho fatto in laboratorio. Una descrizione morfologica è stata già fatta assieme ai risultati di osservazioni istologiche preliminari (Colombo 1950 ⁽⁴⁾, 1951 ⁽⁵⁾). Si è anche prospettato che queste variazioni sieno regolate da un meccanismo genetico poichè sono state osservate, in proporzioni diverse, in discendenze allevate in una stessa gabbia quindi in identiche condizioni ambientali.

I caratteri di pigmentazione estremi considerati sono *color verde* e *color ocra*, tenendo conto solamente della colorazione fondamentale del corpo.

(4) G. COLOMBO, loc. cit.

(5) G. COLOMBO, *Osservazioni alla pigmentazione larvale in «Anacridium aegyptium»* (Orthoptera, Acrididae). «Boll. di Zool. Suppl.», 1951 (in corso di stampa).

Su tali caratteri la temperatura, l'umidità e l'illuminazione non sembrano avere una influenza apprezzabile. Le eventuali modificazioni riguardano un iscurimento dovuto ad una maggior estensione delle macchie o delle righe nere dovute a deposito di un pigmento nero (melanina) nella cuticola.

Poichè le larve nel corso dello sviluppo cambiano talora colore e ciò generalmente dopo la muta e nel senso da verde ad ocra, nella rilevazione delle frequenze dei singoli caratteri si è tenuto conto solo del comportamento al 5° stadio larvale, e poichè la mortalità varia da stadio a stadio sono stati presi in considerazione solo gli animali che hanno raggiunto lo stadio imarginale.

Sono stati fatti diversi tipi di incroci di individui scelti dalla discendenza di animali raccolti in natura; purtroppo il numero degli esemplari per singole ovature è troppo piccolo e così per ora non è stato possibile considerare il comportamento delle discendenze singole.

Gli incroci sono stati fatti tra un sol maschio e più femmine a causa del poco spazio disponibile, cercando però di fare diversi tipi di incroci.

I risultati ottenuti sono riportati nella tabella seguente:

Incrocio	Discendenza									Osservazioni
	Verdi		Ocra		Totale		Totale		Totale	
	♂ ♂	♀ ♀	♂ ♂	♀ ♀	♂ ♂	♀ ♀	Verde	Ocra		
Verde × Verde .	—	16	44	46	44	62	16	90	106	7 Ovature
Ocra × Ocra .	1	4	13	5	14	9	5	18	23	2 Ovature (1)
Ocra × Verde .	—	—	14	23	14	23	—	37	37	2 Ovature
Ocra × Verde .	—	1	12	1	12	2	1	13	14	2 Ovature (2)
Ocra × ^{Ocra o} Verde }	—	18	32	13	32	31	18	45	63	7 Ovature
Ocra × ^{Ocra o} Verde }	—	9	14	14	14	23	9	28	37	2 Ovature (2)
TOTALE . . .	1	48	129	102	130	150	49	231	280	

(1) Incrocio tra fratelli.

(2) Incrocio tra fratelli provenienti da incrocio Verde × Verde.

Dalla tabella su esposta si possono trarre delle conclusioni obbiettive valide per gli animali raccolti (di Padova) e limitatamente a quelli allevati e nelle condizioni più sopra illustrate.

1° Primo fatto evidente è che *non* sono stati trovati *maschi verdi* salvo che raramente.

2° Il rapporto sessi totale, complessivo di tutti gli incroci, non è abbastanza significativamente diverso da 1 : 1 ($\chi^2 = 1.42$, $P = 0.20-0.30$).

3° Il rapporto sessi entro le cavallette ocre, complessivo di tutti gli incroci, è con probabilità diverso da 1 : 1 ($\chi^2 = 3.14$, $P = 0.05 - 0.10$).

4° Nell'incrocio verde \times verde il rapporto sessi totale è con probabilità diverso da 1 : 1 ($\chi^2 = 3.04$, $P = 0.05 - 0.10$).

Il carattere pigmentazione delle larve è legato al sesso; è opportuno ricordare che nell'*Anacridium* si ha il sistema $XX = \text{♀♀}$ ed $XO = \text{♂♂}$.

5° Il rapporto tra le ♀♀ color ocra e quelle color verde, complessivo di tutti gli incroci, è con probabilità diverso da 3 : 1 ($\chi^2 = 3.36$, $P = 0.05 = - 0.10$).

6° Il rapporto tra le ♀♀ color ocra e quelle color verde della discendenza dell'incrocio verde \times verde non è significativamente diverso da 3 : 1 ($\chi^2 = 0.021$, $P = 0.90 - 0.95$).

I risultati ottenuti possono essere interpretati nel modo più semplice ammettendo che il carattere pigmentazione generale del corpo (verde od ocra) delle larve sia determinato da due coppie di alleli, una delle quali legata al sesso.

Sarebbero tuttavia necessarie molte ipotesi suppletive per spiegare la costituzione genotipica dei fenotipi osservati; poichè gli esperimenti continuano credo opportuno raccogliere dati più numerosi ed aspettare i risultati degli incroci in corso prima di dare una interpretazione genetica più generale.

Anatomia. — *Relazioni tra volume delle cellule nervose e lunghezza e spessore delle fibre nervose*^(*). Nota di GUIDO FILOGAMO e MICHELE TORRE, presentata^(**) dal Socio G. LEVI.

Ancor prima che fosse formulato il principio dell'unità neuronica, comprendendo nel concetto di neurone la cellula nervosa ed il complesso delle sue propaggini sino alle ramificazioni più distali, gli stretti rapporti di interdipendenza, tra cellula nervosa e fibra che da essa si diparte, erano stati prospettati da Pierret⁽¹⁾. Questi suppose che le differenze considerevoli esistenti nella grandezza delle cellule di uno stesso ganglio fossero in relazione con le differenze nella lunghezza delle fibre che da quelle cellule si dipartono. La ipotesi di Pierret fu in massima accettata da Cajal e da G. Levi. Però Levi⁽²⁾ attribuì importanza, per rendersi ragione delle considerevolissime differenze

(*) Ricerche compiute nell'Istituto anatomico di Torino.

(**) Nella seduta del 9 febbraio 1952.

(1) J. PIERRET « C. R. Acad. des Sciences », Paris 1878.

(2) G. LEVI, *Studi sulla grandezza delle cellule*. « Arch. it. Anat. Embr. », 5 (1906); *I gangli cerebrospinali*. Suppl. Vol. 17 « Arch. ital. Anat. Embr. » (1908); *Trattato di Istologia* Utet. 3ª ediz. Torino 1946.

esistenti nel volume delle cellule nervose sia nei vari territori del sistema nervoso sia tra territori omologhi di animali diversi in relazione alla mole somatica, più che alla lunghezza della fibra, la quale si diparte da una determinata cellula, all'estensione del territorio che si trova sotto la dipendenza di un neurone: con altre parole alla molteplicità delle sue connessioni. In questo modo ci rendiamo ragione delle enormi differenze esistenti nella grandezza delle cellule nervose nelle varie specie animali in relazione alla mole somatica, differenze le quali altrimenti riescirebbero inesplicabili.

Con le presenti ricerche ci siamo proposti di prospettare più esattamente di quanto sia stato fatto da Pierret, l'elemento lunghezza della fibra, col cercar di rintracciare, con metodo statistico, lo spessore di fibre ed il volume delle cellule rispettive, in vari territori nei quali le fibre hanno una lunghezza molto differente. Questa ricerca ritrae particolare interesse dopo la scoperta di Erlanger e Gasser, che il potenziale di azione di ciascuna fibra nervosa è in stretto nesso con lo spessore della fibra stessa ed anche con la funzione specifica della fibra.

I risultati di queste ricerche furono già oggetto di comunicazioni preliminari ⁽³⁾. Con esse per il momento ci siamo limitati a rintracciare, ripeto, il volume delle cellule e lo spessore delle fibre che da esse traggono origine confrontando l'una coll'altra regione nelle quali la lunghezza della fibra era molto differente.

Non fu invece prospettata l'ampiezza del territorio che si trova sotto la dipendenza dei neuroni da noi studiati; una ricerca di questo genere, nel materiale da noi studiato, trova difficoltà per il momento insuperabili.

In tre gatti adulti, abbiamo misurato lo spessore delle fibre delle radici anteriore e posteriore del midollo spinale, destinate ad innervare metameri differenti del corpo e che, per la loro sede definitiva, sono raggiunti da fibre di varia lunghezza. I metameri scelti furono C₂, C₇, T₄, S₁ e Co₃; infatti, una gran parte del territorio di distribuzione periferica di C₇ ed S₁ ed anche di Co₃ è, manifestamente, situato ad una distanza assai maggiore dal centro trofico delle fibre che lo innervano che non quello di C₂ e T₄ e pertanto la maggior parte delle fibre di C₇ ed S₁ è particolarmente lunga. Questi metameri furono scelti anche, perchè, considerando la radice sensitiva, si potevano studiare fibre di diversa lunghezza nella branca centrale e nella periferica del ganglio di uno stesso metamero. Valga ad esempio C₇, ove la branca periferica del ganglio è molto lunga mentre ne è breve la branca centrale. Abbiamo inoltre misurato le dimensioni delle fibre di rami collaterali dei nervi spinali, di cui alcuni a distribuzione prossima al centro trofico, altri a distribuzione sensibilmente lontana. Infine in ciascun metamero considerato abbiamo determinato la grandezza delle cellule nervose del ganglio spinale.

(3) G. FILOGAMO e M. TORRE, Congresso di Neurologia. Torino. «Minerva Medica», 1948; Congresso Ital. di Anatomia. Pavia «Monit. Zool. Ital.», 1951; «Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim.», 1951.

Fu misurato lo spessore di tutte le fibre delle radici considerate in preparazioni all'acido osmico, prevalentemente con l'uso di microfoto a $1000\times$ e furono costruiti i poligoni di frequenza. In preparazione all'ematossilina-eosina fu misurata la grandezza di 500 cellule per ogni ganglio, direttamente sul preparato.

RISULTATI E DISCUSSIONE. — Il numero delle fibre nervose mieliniche in C₂, T₄, ed in CO₃ è minore che in C₇ ed SI₁; il che è ovvio data l'estensione molto maggiore dei territori innervati da questi ultimi.

Lo spessore minimo delle fibre in tutte le radici esaminate è di un μ . Lo spessore massimo assoluto invece è diverso nei vari metameri esaminati ed è sensibilmente maggiore in quelli che si riferiscono a tronchi nervosi che innervano gli arti; in queste radici, oltre alle fibre che si distribuiscono al tronco, vi sono quelle che raggiungono la parte libera dell'arto, fino alla sua estremità distale, e perciò sono assai più lunghe. Orbene, in ogni caso in cui la presenza di fibre lunghe faceva prevedere valori elevati nei riguardi del diametro delle fibre, questo fatto si è realmente verificato. Per quanto riguarda la radice sensitiva conviene rilevare che questa regola è valida, se noi consideriamo la distanza del centro trofico della fibra dal territorio di distribuzione periferica mentre non è valida se noi consideriamo la distanza tra il centro trofico ed il probabile territorio di distribuzione intra-neurale della branca centrale.

Quanto si è detto è confermato dall'osservazione da noi fatta che, paragonando con criteri statistici lo spessore delle fibre nervose del ramo posteriore di C₇ con quello delle fibre di un ramo collaterale del plesso brachiale, sfornito totalmente di fibre brevi, si constata che in quest'ultimo non solo vi sono fibre di spessore più elevato, ma sono assenti le fibre più sottili: fatto quest'ultimo, che concorda coll'assenza di fibre brevi in quest'ultimo nervo.

La presenza di fibre più spesse, nelle radici fornite di fibre più lunghe, si verifica tanto in quelle anteriori che in quelle posteriori del midollo spinale; si deve anzi aggiungere che la distribuzione statistica delle fibre secondo lo spessore è identica per le motrici e per le sensitive di uno stesso metameri.

Questo reperto, di particolare interesse in sè, si accorda coll'ipotesi, convalidata dalle presenti ricerche, secondo la quale vi è una costante relazione tra lunghezza e diametro della fibra nervosa, che parte da un determinato neurone. Infatti sappiamo che dermatomeri e miomeri sono sovrapponibili, sebbene non in via assoluta, e pertanto risiedono a distanza pressochè eguale dal centro trofico delle fibre che li innervano.

Dalle misurazioni eseguite delle cellule dei gangli spinali appartenenti ai metameri corrispondenti a quelli nei quali fu determinato lo spessore delle radici, risulta che nei metameri nei quali le radici sono più lunghe e più spesse, le cellule dei gangli sono più voluminose; viene adunque ad essere confermato quanto risultava già da qualche singola osservazione antecedente (invero non numerose [ved. G. Levi ⁽²⁾, Giulio Levi ⁽⁴⁾]), che vi è in

massima una relazione tra grandezza del pirenoforo (corpo cellulare in senso stretto) ed estensione del segmento al quale il neurone si distribuisce. Ciò risulta con particolare evidenza se si confrontano i gangli del C7 ed S1 (nei quali vi è la stessa distribuzione statistica delle cellule nei riguardi della grandezza) coi gangli di C2, T4 e Co3 (pur essi equivalenti nei riguardi della grandezza cellulare): nel primo gruppo di gangli le cellule hanno volume molto maggiore che nel secondo.

Dalla nostra documentazione, più ampia delle antecedenti, la relazione suddetta è molto più evidente.

Infine dalle nostre determinazioni appare che in tutte le radici vi sono due popolazioni di fibre mieliniche, ben distinte nei riguardi dello spessore; l'una rappresentata da fibre esili con massimo a 3-4 μ , l'altra rappresentata da fibre spesse, con massimo intorno a 8-10 μ . Le due popolazioni non sono mai del tutto separate, ma si embricano nelle classi comprese tra i 5 e 7 μ , per cui non è il caso di addurre dati precisi sulla ricchezza percentuale di ciascuna di esse; con le presenti ricerche ci siamo convinti infatti che è del tutto inopportuno fornire delle percentuali tenendo conto che in tutte le curve vi è una classe intermedia, in genere come si è detto intorno a 5-7 micron, più povera di elementi. Abbiamo perciò lasciato impregiudicata questa osservazione e quindi il problema se la percentuale delle due popolazioni varia nelle radici di metameri differenti.

Invece, le presenti osservazioni ci sembra giustifichino la seguente ipotesi: che le due popolazioni di fibre che compongono ciascuna radice, paiono risentire ciascuna ed in parallelo l'influenza del territorio d'innervazione. Infatti, pur essendo le due popolazioni embricate, si nota che il diametro minimo assoluto delle fibre, quale appare dalla grafica, proprio senza alcun dubbio della popolazione a fibre sottili, è eguale in tutte le radici, mentre il diametro massimo assoluto, che rientra nella popolazione a fibre grosse, è maggiore nelle radici anteriori e posteriori corrispondenti agli arti. Si rilevi ora che, in queste ultime radici, i massimi percentuali di ciascuna delle due popolazioni corrispondono a classi di spessore maggiore nel confronto di quelle destinate ai metameri del tronco. E poichè, in base allo spostamento degli apici, quale appare nella grafica, si può ritenere che il comportamento globale dell'una e dell'altra popolazione sia analogo, parrebbe lecito concludere che, a livello degli arti, si ha pure uno spostamento verso destra dei massimi assoluti della popolazione a fibre sottili, mentre non si sposterebbero i valori minimi della popolazione a fibre grosse. Essendo, per quest'ultima circostanza, l'embricatura delle due popolazioni più accentuata, la percentuale delle fibre nervose nelle classi intermedie delle curve è maggiore nei segmenti degli arti che non in quelli del tronco.

Se questa ipotesi venisse confermata è evidente che verrebbe ad essere limitato il significato della variazione percentuale del numero delle fibre più grosse e più sottili (inferiori a 6-7 μ di diametro) in metameri differenti. Essendo per quest'ultima circostanza più accentuata la sovrapposizione ad embrice tra le due popolazioni, la percentuale delle fibre di spessore inter-

medio è più elevata nei nervi nelle radici destinate ad innervare gli arti che non quelli destinate ad innervare il tronco. Se questo reperto sarà confermato noi dovremo assegnare importanza non soltanto ai valori massimi e minimi di spessore delle fibre nervose, ma anche ai valori intermedi, variabili nei singoli segmenti.

CONCLUSIONI. — Viene confermata con metodo statistico la stretta correlazione esistente tra le dimensioni dei vari componenti del neurone. E più precisamente: 1° Viene per la prima volta documentata la supposizione di Pierret, che il volume della cellula nervosa in senso stretto è in correlazione colla lunghezza della fibra nervosa che da essa prende origine.

2° Viene con maggiore esattezza che in passato dimostrata la correlazione tra grandezza della cellula e spessore della fibra che da essa ha origine.

3° Tra questi tre elementi, grandezza della cellula, spessore e lunghezza della fibra che prende origine da una determinata cellula vi è una correlazione stretta ed invariabile.

4° La correlazione tra spessore della fibra nervosa ed estensione del territorio centrale e periferico che si trova sotto la dipendenza di un determinato neurone, sembra molto probabile ma deve essere maggiormente documentata.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Anziano G. Levi comunica alla Classe la dolorosa notizia della morte del Socio Nazionale Ugo Bordoni avvenuta a Roma il 17 gennaio del corrente anno e, dopo aver espresso a nome di tutti i Colleghi i sentimenti del più vivo cordoglio per una così grave perdita, prega il Socio U. Amaldi di leggere il seguente messaggio che il Senatore Castelnovo, ancora impossibilitato a presenziare alla seduta, ha personalmente redatto e inviato alla Classe per rendere omaggio alla memoria dell'illustre scienziato scomparso:

«Dopo l'ultima seduta la nostra Classe ha subito una perdita grave e dolorosa. È morto Ugo Bordoni che era nostro Socio dal 1928 e fu per quattro anni Accademico Segretario della Classe di Scienze Fisiche. Ho avuto la fortuna di conoscere il Bordoni cinquant'anni fa quando seguiva il mio corso al primo anno universitario e ricordo di aver fin d'allora predetto una brillante carriera a quel giovane intelligente, studioso, dalla mente chiarissima. E la mia previsione si è largamente avverata. Il Bordoni si dedicò alle applicazioni della fisica, all'ingegneria e si affermò subito con profondi lavori di termodinamica, di termologia, di fotometria e in altri campi della fisica.

Dal 1912 ebbe l'insegnamento della Fisica tecnica alla nostra Scuola degli Ingegneri. Insegnante efficacissimo, zelante, era una delle colonne di quell'Istituto. Redasse un trattato di Fisica Tecnica in due volumi che divenne rapidamente classico.

Ma l'attività prodigiosa del Bordoni non si limitava alla Scienza e allo insegnamento. Giustamente apprezzato da alcune grandi Società industriali dell'Alta Italia, fu chiamato a presiedere o a partecipare ai rispettivi Consigli di Amministrazione. Ricordo che subito dopo la liberazione dell'Alta Italia, quando ancora le ferrovie non funzionavano, egli solea andare mensilmente a Torino con una piccola auto per adempiere ai suoi compiti di carattere industriale, e dopo tre o quattro giorni ritornava qui per riprendere l'insegnamento senza dar segno di stanchezza.

Fu, come dissi, Segretario per la Classe di Scienze Fisiche per quattro anni nel periodo difficile di ricostruzione della nostra Accademia e ci rese dei servigi preziosi. Qualunque questione gli si ponesse, la studiava con somma cura, e dava sempre il suggerimento più giusto.

Il suo organismo, per quanto forte, non poteva sopportare a lungo un lavoro così eccessivo. Da qualche tempo si era indebolito e si spense il giorno 17 gennaio 1952 lasciando un vuoto profondo.

Inviemo un reverente pensiero alla sua memoria e le vive condoglianze dell'Accademia alla addolorata famiglia. Curerò che venga qui prossimamente commemorato ».

Terminata la lettura del messaggio del Senatore Castelnuevo, il Socio Anziano G. Levi invita i Soci a un minuto di raccoglimento e sospende la seduta.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che è presente alla adunanza il prof. Jon Carstouiu della « Johns Hopkins University » di Baltimora al quale porge il cordiale saluto della Classe e suo personale.

Presenta quindi il fascicolo 1 (gennaio 1952) dei Rendiconti e manifesta il suo compiacimento per la puntualità che caratterizza detta pubblicazione.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Signorini offre in omaggio e presenta il volume I della seconda edizione della sua opera « Meccanica razionale con elementi di statica grafica », mettendo in evidenza che detta edizione differisce molto dalla precedente, sia per aggiunte sia per un largo rifacimento del capitolo sulla teoria dei vettori e dei capitoli relativi alla teoria dei momenti d'inerzia e alla cinematica delle masse.

Il Presidente ringrazia il Collega Signorini.

L'Accademico Segretario presenta le pubblicazioni pervenute in omaggio, mettendo in particolare evidenza un manuale di Fisiologia animale di K. Wenig e H. Keilová, un altro di Fisiologia vegetale di S. Prát e R. Retovsky, un volume dal titolo: « Il mondo del petrolio » di S. Schackne e N. D'Arcy Drake, una pubblicazione edita dal Collegio degli Ingegneri

Ferrovieri Italiani sulla nuova stazione di Roma Termini e la relazione del prof. M. Bossolasco, Direttore dell'Istituto Geofisico e Geodetico dell'Università di Genova sull'attività dell'Istituto stesso nel periodo 1946-1951.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: D'Ancona, Spadolini, Chiarugi, U. Amaldi, Beccari, Bompiani (a nome del Collega Sansone), Bonino, Picone (a nome del Collega Caccioppoli) e G. Levi.

Il Segretario accademico legge l'elenco delle Note inviate alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CACCIOPPOLI R. — Misura e integrazione sulle varietà parametriche.

SPADOLINI I. — Sul processo di ripolarizzazione nel muscolo cardiaco.

CHIORBOLI P. e DRUSIANI A. M. — Sullo spettro Raman della 2-tiofenaldeide (pres. dal Socio G. B. BONINO).

DE GIORGI E. — Ricerche dell'estremo di un cosiddetto funzionale quadratico (pres. dal Socio M. PICONE).

FRANCINI E. — Influenza delle foglie sulla sessualità dei fiori di olivo (pres. dal Socio A. CHIARUGI).

MAZZI V. — Caratteri secretori e nervosi delle cellule del nucleo magnocellulare preottico nei Teleostei (pres. dal Socio N. BECCARI).

MAXIA C. — Ulteriori dati stratigrafici e paleontologici sul mesozoico di Castiglione (Rieti) (pres. dal Socio R. FABIANI).

SPADOLINI L. — L'azione della procaina e del curaro sulla sincronizzazione dell'eccitamento nel muscolo cardiaco. Contributo allo studio delle risposte contrattili di tipo graduato (pres. dal Corrisp. I. SPADOLINI).

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE

PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCO DEI CONCORRENTI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE GENERALE

(Scadenza 31 dicembre 1951 — Premio lire 1.000.000)

1. Prof. MASSIMO VANNI. — 1. «Le curvature delle ipercurve» (ms. 5 cop.). — 2. «I teoremi di Pitagora e di Carnot estesi allo spazio» (ms. 5 cop.). — 3. «Costruzione grafica del punto probabile secondo il metodo dei minimi quadrati con n rette di posizione di pesi differenti» (ms. 5 cop.). — 4. «Determinazione della latitudine dagli intervalli siderali fra i passaggi di stelle fisse per verticali ignoti, ecc.» (ms. 5 cop.). — 5. «Osservazione dei tempi dei passaggi di coppie di stelle attraverso verticali ignoti per determinare la posizione dell'osservatore a terra e in navigazione» (ms. 5 cop.). — 6. «Sulla teoria della rifrazione astronomica» (st. 5 cop.). — 7. «Le possibilità teoriche della determinazione del punto nave astronomico senza l'orizzonte marino» (st. 2 cop.).

2. Dott. ROMUALDO GANORA. — « Le scienze filosofiche alla luce delle verità rivelate ».
3. Avv. ROMOLO GAMBINI. — « Studi ed esperimenti scientifici Radio-biologici e metapsichici ».
4. CARMELO GALLO. — « Compimenti di geometria piana sulla circonferenza ».
5. Prof. FABIO FERRARI. — 1. « In tema di supercementi » (5 cop. st.). — 2. « Über gipshaltige puzzolanamente » (1 cop.). — 3. « Brownmillerit-Zement » (5 cop.). — 4. « Cementi pozzolanici » (5 cop.). — 5. « Supercementi d'uso generale » (5 cop.). — 6. « Universal-Portlandzemente » (5 cop.). — 7. « Dei cementi Ferrari » (3 cop.). — 8. « Cementi Ferrari » (4 cop.). — 9. « Ciments ferreux et ferreux pouzzolananiques vis-à-vis des eaux agressives » (5 cop.). — 10. « Il cemento Ferrari e l'attuale orientamento delle industrie dei leganti idraulici » (5 cop.). — 11. « Il cemento Ferrari di ridotta basicità e l'autarchia » (5 cop.). — 12. « Über Ferrari-Zement » (2 cop.). — 13. « Le Ciment Ferrari » (2 cop.). — 14. « Zur Kenntnis des Ferrari-Zement » (4 cop.). — 15. « Sulle ragioni dell'alta resistenza chimica dei cementi Ferrari » (5 cop.). — 16. « Sulla determinazione rapida della silice del cemento idraulico o dei silicati decomponibili dagli acidi » (5 cop.). — 17. « Sul tufo del Monferrato » (4 cop.). — 18. « Per il progresso delle industrie del cemento » (1 cop.). — 19. « Nel divenire del cemento idraulico » (5 cop.). — 20. « Sulla costituzione dei leganti idraulici in rapporto al ritiro e al calore d'idratazione » (3 cop.). — 21. « Dei leganti idraulici per la ricostruzione » (5 cop.). — 22. « Agglomerati per la ricostruzione » (1 cop.). — 23. « Note au sujet des essais préalable cuisson dans l'industrie du ciment » (1 cop.). — 24. « Leganti pozzolanici » (5 cop.). — 25. « Agglomerati pozzolanici e cementizi » (4 cop.). — 26. « Per l'impiego razionale dei cementi idraulici » (5 cop.). — 27. « Sul problema della casa in Italia » (5 cop.). — 28. « Sui cementi misuratamente espansivi » (5 cop.). — 29. « Analisi rapida dei leganti idraulici unitari » (5 cop.). — 30. « Cementi ipocalcici » (5 cop.). — 31. « Leganti idraulici di razionale impiego per la costruzione di opere idrovie e marittime » (5 cop.). — 32. « Attitudine alla cottura, finezza di macinazione ed omogeneità dei crudi di cemento calcico » (5 cop.). — 33. « Sulla resistenza chimica dei cementi ferrici (tipo Ferrari) e dei relativi pozzolanici » (5 cop.). — 34. « Sul processo di fabbricazione dei cementi ferrici (tipo Ferrari) » (5 cop.). — 35. « Miscela a base di pozzolana e di calce » (5 cop.). — 36. « Chiariamenti in tema di cementi ferrici e pozzolanici » (5 cop.). — 37. « Sull'urgenza di generalizzare la razionalità di fabbricazione dei cementi » (5 cop.). — 38. « Ciments à basicité réduite » (5 cop.). — 39. « Per la razionale scorificazione del clinker di cemento idraulico » (5 cop.). — 40. « Sull'impiego dei cementi nelle opere destinate all'aperto » (5 cop.). — 41. « Silicato bicalco e cemento pozzolanico » (5 cop.). — 42. « Refrattari e chincerizzazione » (5 cop.).
6. Prof. PRIMO ROLLA. — « Dimostrazioni del postulato d'Euclide ? ».
7. GIUSEPPE UJCICH. — « Saggi di ricerche scientifiche pro la pace » (comune al Premio Nazionale Generale della Classe di Scienze morali, storiche e filosofiche n. 12).
8. ANTONINO SPADARO. — « Dinamo a campo magnetico di eccitazione agente contemporaneamente su due indotti atta a produrre correnti d'intensità doppia rispetto ad una dinamo normale ».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE DI CATEGORIA (BOTANICA E ZOOLOGIA)

(Scadenza 31 dicembre 1951 - Premio lire 1.000.000)

1. Prof. ALBERTO STEFANELLI. — 1. « Contributi alla conoscenza del sistema nervoso laterale dei Petromizoni ». — 2. « Sul valore morfologico del "cervelletto" dei Petromizoni nelle sue relazioni col sistema laterale ». — 3. « A new form of micro-respirometer with a note on the effect of cleavage on the respiration of the egg of Rana ». — 4. « Un nuovo microrespirometro manometrico ». — 5. « Prime osservazioni sulla assunzione di O₂ delle uova e dei primi stadi embrionali dei Bufonidi ». — 6. « Alcune osservazioni su microiniezioni di olii diversi in Amoeba ». — 7. « Il sistema statico dei Petromizoni ». —

8. « La ciclicità della assunzione di O_2 durante le prime divisioni dell'uovo di Rana ». —
9. « Considerazioni sul cervelletto in relazione a nuove ricerche sui Petromizonti. » — 10.
- « Sui fenomeni respiratori in rapporto alla fecondazione nel *Bufo vulgaris*. » — 11. « Esperienze sulla assunzione di ossigeno del centro organizzatore negli Anfibi anuri. » — 12. « Il metabolismo dell'uovo e dell'embrione studiato negli Anfibi anuri ». — 13. « Il cervelletto degli anamni ». — 14. « Il metabolismo dell'uovo e dell'embrione studiato negli Anfibi anuri ». — 15. « Sul comportamento dei colloidi nucleari delle ghiandole salivari di *Chironomus*. » — 16. « La segmentazione dell'uovo di *Rhabditis*. » — 17. « Esperienze di micro-manipolazione del nucleo e dei costituenti nucleari di cellule di Ghiandole salivari di *Chironomus*. » — 18. « Il rapporto nucleo-plasmatico e la sintesi dell'acido timonucleinico nei Nematodi. » — 19. « Studi comparativi sul nucleo oculomotore e trocleari nei Rettili e con particolare riguardo nel Camaleonte ». — 20. « Ulteriori ricerche di microdissezione e chimico fisiche sul gomito cromatinico delle ghiandole labiali di *Chironomus*. » — 21. « Il nucleo dell'abducente e il suo nucleo accessori nei Rettili ». — 22. « Lo sviluppo dei centri tegmentali in relazione al tipo di locomozione nei Rettili ». — 23. « Ricerche comparative sui centri tegmentali dei Rettili in rapporto alla loro locomozione ». — 24. « L'assunzione di ossigeno durante lo sviluppo di *Petromyzon*. » — 25. « I centri motori dell'occhio e loro connessione nel Camaleonte con riferimento ad altri rettili ». — 26. « I centri vestibolari studiati comparativamente in Rettili dotati di differente motilità e modo di locomozione ». — 27. « Nuove osservazioni sulla respirazione embrionale del *Petromyzon* in particolari condizioni ». — 28. « Il parassitismo dei Nictiribidi come risulta da infestazioni sperimentali in vari Chiroterri ». — 29. (Con Guareschi) « L'attività respiratoria della *Calliphora* durante il ciclo larvale e pupale ». — 30. « Sui centri tegmentali dei Cheloni ». — 31. « La specificità parassitaria dei Nictiribidi ». — 32. « Il parassitismo della *Nictiribosca africana*. » — 33. « Affinità sistematiche dei Chiroterri e parassitismo dei Nictiribidi ». — 34. (Con Pietrogrande) « Ricerche istologiche comparative sui nuclei cerebellari dei Rettili in relazione al differente modo di locomozione ». — 35. « Ricerche sulla *Nictiribosca africana*. » — 36. « Sulla presenza di una lamella cerebellare ». — 37. (Con Osti) « L'apparato di Mauthner degli Anfibi anuri ». — 38. « L'apparato preauthneriano degli Anfibi anuri e suoi rapporti con l'apparato di Mauthner ». — 39. « I centri statici e della coordinazione motoria dei Rettili ». — 40. « Osservazioni comparative sui nuclei cerebellari dei Rettili in relazione al differente modo di locomozione ». — 41. « Il significato morfologico dell'apparato mauthneriano come risulta da ricerche sull'Anguilla ». — 42. « Osservazioni sull'istogenesi del midollo spinale della coda rigenerata dei Tritoni ». — 43. « Considerazioni morfo-ecologiche sull'apparato acustico e statico dei Microchiroterri ». — 44. « La morfologia dell'apparato statico e dell'apparato acustico dei chiroterri in relazione alle condizioni di volo ». — 45. « I centri statici e della coordinazione motoria dei Rettili ». — 46. « La fisiologia dei centri statici alla luce delle ricerche di morfologia ecologica nei Rettili ». — 47. (Con Capriata) « La rigenerazione del midollo spinale della coda rigenerata dei Tritoni ». — 48. « Il valore del paleocerebello dei Vertebrati come viene desunto da ricerche di morfologia comparata ed ecologica ». — 49. « Regolazioni e rigenerazione nel rombencefalo di Rana. » — 50. « La determinazione della cellula di Mauthner nell'embrione di Rana ». — 51. « I fattori del differenziamento della cellula di Mauthner delle larve di Rana ». — 52. « I problemi della determinazione nervosa in rapporto a processi di riparazione e rigenerazione nel sistema nervoso centrale degli Anfibi ». — 53. (Con Camposano) « I centri tegmentali dell'Anguilla in relazione degli elementi giganti del tegmento dei Ciclostomi, dei Pesci e degli Anfibi ». — 54. « Distribuzione quantitativa dei fusi neuromuscolari negli Ofidi ». — 55. (Con Basile) « La distribuzione dei fusi neuromuscolari nella *Lacerta*. » — 56. (Con Cervi) « Le modalità del riacciamento dei monconi del midollo spinale di tritoni adulti ». — 57. « Ricerche di morfologia sperimentale sul differenziamento specifico generale e particolare della cellula nervosa ». — 58. « I problemi della determinazione e del differenziamento della cellula nervosa ». — 59. « I *Niphargus* di Roma ». — 60. « I problemi della determinazione istogenetica e del differenziamento dei neuroni inquadrati nel campo della embriologia sperimentale ». — 61. « I fenomeni della determinazione istogenetica e del differenziamento del sistema nervoso. » — 62.

« La determinazione istogenetica e il differenziamento della cellula nervosa indagato con il metodo degli espianti ». — 63. « Ricerche comparative sulla assunzione di ossigeno degli ibridi tra *Petromyzon marinus* e *P. fluviatilis* ». — 64. « L'orientamento delle fibre nervose intracentrali indagato sperimentalmente in riferimento alla cellula di Mauthner ». — 65. « Una medusa d'acqua dolce del genere *Craspedacusta* sviluppata in una vasca dell'Istituto ». — 66. (Con Ceas) « La morfologia dei centri statici dei Selaci in rapporto alla forma corporea e alla differente attività natatoria ». — 67. « Fenomeni respiratori nella fecondazione ». — 68. « Ricerche di neurologia ecologica dei centri statici dei Vertebrati ». — 69. « La respirazione embrionale ». — 70. « Orientamento e decussazione delle fibre nervose centrali ». — 71. « Regolazioni duplicative dell'allungato di embrioni di *Rana esculenta* ». — 72. « Moderni concetti sulla struttura della materia vivente ». — 73. « Studi sui Chirotteri della Sardegna e sui loro ectoparassiti ». — 74. « Ricerche morfoecologiche e fisioecologiche sull'apparato mauthneriano degli Anfibi ». — 75. (Con Bigiotti) « La rigenerazione del sistema nervoso centrale nei lombricidi ». — 76. « Risultati del metodo comparativo ecologico nello studio dell'apparato mauthneriano degli Ittiopsidi ». — 77. « Considerazioni morfo-ecologiche e funzionali sulle cellule di Mauthner degli Anfibi ». — 78. « Risultati del metodo comparativo ecologico nello studio dell'apparato mauthneriano degli Ittiopsidi ». — 79. (Con Zacchei) « Sull'origine dei centri cocleari studiata nella metamorfosi degli Anfibi anuri ». — 80. « Sui problemi generali del differenziamento e della involuzione indagati su un determinato elemento nervoso ». — 81. « Studies on the development of Mauthner's cell. — 82. « Some comments on regeneration in the central nervous system ». — 83. « I processi della rigenerazione del midollo spinale delle larve degli Anfibi anuri ». — 84. (Con Thermes e Poddie) « La rigenerazione del midollo spinale delle larve di Anfibi anuri e sue regolazioni con la corda dorsale ». — 85. (Con Thermes e Massidda) « Fenomeni rigenerativi e degenerativi nelle code isolate di *Hyla* ». — 86. « Sviluppo, differenziamento e involuzione dell'elemento nervoso ». — 87. « The Mauthnerian apparatus in the Ichthyopsida ». — 88. « Ciclo vitale e citomorfosi delle cellule nervose dei Vertebrati ». — 89. « Aspetti istochimici del differenziamento ».

2. Prof. UMBERTO D'ANCONA. — 1. « Ricerche sull'istogenesi delle fibre muscolari striate con particolare riguardo al differenziamento delle miofibrille (in collaborazione con V. Fosi). 1937 ». — 2. « Relazione sulle ricerche idrobiologiche e idrografiche compiute nel Lago di Nemi. 1942 ». — 3. « I Niphargus Italiani. - Tentativo di valutazione critica delle minori unità sistematiche. 1942 ». — 4. « Variabilità, differenziamento di razze locali e di specie nel genere *Niphargus*. 1942 ». — 5. « Grandezze nucleari e poliploidismo nelle cellule somatiche. 1939 ». — 6. « Sul poliploidismo delle cellule epatiche. 1941 ». — 7. « Verifica del poliploidismo delle cellule epatiche dei Mammiferi nelle cariocinesi provocate sperimentalmente. 1942 ». — 8. « Accrescimento nucleare e corredo cromosomico. 1951 ». — 9. « Cromosomi e ormoni sessuali. 1938 ». — 10. « Stato attuale delle ricerche sulla determinazione del sesso nei Vertebrati inferiori. 1939 ». — 11. « Ulteriori osservazioni e considerazioni sull'ermafroditismo e il differenziamento sessuale dell'Orata (*Sparus auratus* L.) (Completamento delle ricerche della dott.ssa A. Pasquali). 1941 ». — 12. « La distribuzione dei sessi delle Anguille nelle valli da pesca. 1943 ». — 13. « Ermafroditismo e intersessualità. 1943 ». — 14. « Nuove ricerche sulla determinazione sessuale dell'Anguilla. 1943 ». — 15. « Sessualità del soma e sessualizzazione delle cellule germinali. 1944 ». — 16. « Intersessualità transitoria e ovogenesi abbreviata nei Vertebrati inferiori. 1945. In collaborazione con E. Vannini ». — 17. « Sexual differentiation of the gonad and the sexualization of the germ cells in Teleosts. 1945 ». — 18. « Observations sur la proportion des sexes chez les anguilles des lagunes littorales de l'Adriatique. 1946 ». — 19. « Osservazioni e idee sulla determinazione del sesso. 1946 ». — 20. « Prime osservazioni sull'azione degli ormoni sessuali sulla gonade dell'Anguilla 1948 ». — 21. « Somatic influences on the sexual differentiation of germ cells. 1947 ». — 22. « Osservazioni sull'organizzazione della gonade ermafrodita di alcuni Serranidi. 1949 ». — 23. « Condizioni ambientali e correlazioni umorali nel differenziamento sessuale e nello sviluppo dell'Anguilla. 1949 ». — 24. « Ermafroditismo ed intersessualità nei Teleostei. 1949 ». — 25. « Follicoli atresici e corpi lutei nei Teleostei. 1950 ». — 26. « Il dif-

ferenziamento della gonade e l'inversione sessuale degli Sparidi. 1950 ». — 27. « Il differenziamento morfologico e funzionale della gonade dei Vertebrati. 1950 ». — 28. « Détermination et différenciation du sexe chez les Poissons. 1950 ». — 29. « Intorno alle trasformazioni dell'Anguilla nella fase conclusiva del suo ciclo vitale. 1951 ». — 30. « Ulteriori esperienze sull'azione degli ormoni steroidi sulla gonade dell'anguilla. 1951 ».

3. Prof. FRANCESCO D'AMATO. — 1. « Ricerche embriologiche e cariologiche sul genere "Euphorbia" ». — 2. « Embriologia di "Ulmus campestris" L. ». — 3. « Contributo all'embriologia delle plumbaginaceae ». — 4. « Sull'apomissia di *Statice oleaeifolia* ». — 5. « Nuovo contributo all'embriologia delle plumbaginaceae ». — 6. « Sul corredo cromosomico di *Euphorbia Pubescens* Vahl. ». — 7. « Osservazioni cito-embriologiche su *Cornus Mas* L. ». — 8. « Nuove ricerche embriologiche e cariologiche sul genere *Euphorbia* ». — 9. « Osservazioni critiche su alcuni metodi di impiego della reazione nucleare in citologia vegetale ». — 10. « Citologia vegetale. — Agglutinazione cromatica (« Stickiness ») in *Allium Cepa* L. e altre Liliaceae ». — 11. « Studi sull'agglutinazione cromosomica (« Stickiness ») in *Allium Cepa* L. e altre monocotiledoni ». — 12. « Fenomeni di auto-incompatibilità nel corniolo (*Cornus Mas* L.) ? ». — 13. « Contributo alla migliore conoscenza del kariogramma di *Bellevalia Romana* Sweet ». — 14. « The effect of colchicine and ethylene glycol on sticky chromosomes in *Allium Cepa* L. ». — 15. « Studies on the experimental control of the mutation process ». — 16. « Citologia vegetale. — Contributo al problema della agglutinazione cromosomica (« Stickiness ») spontanea ». — 17. « Citologia sperimentale. — Sull'attività colchicino-mitotica e su altri effetti citologici del 2,4-diclorofenossiacetato di sodio ». — 18. « Cytological consequences of Decapitation in Onion Roots ». — 19. « Autotetraploidia spontanea in *Allium Cepa* L. ». — 20. « Ricerche nell'attività citologica di alcuni composti organici con particolare riguardo alla colchicino-mitosi e agli effetti tossici ». — 21. « Reazioni di natura auxinica ed effetti rizoceni in *Allium Cepa* L. ». — 22. « Mutazioni cromosomiche spontanee in *Nothoscordum Fragrans* Kunth ». — 23. « Sull'attività mutagena dell'acenaftene ». — 24. « Citologia sperimentale. — Prime osservazioni sulla inibizione pre-profasica della cariocinesi nei meristemi radicali ». — 25. « Preprophase inhibition of mitosis in root Meristems ». — 26. « Studio comparato dell'attività citologica di alcune essenze ». — 27. « Risultati di un'analisi cario-embriologica di una popolazione di *Nothoscordum Fragrans* Kunth ». — 28. « Sull'attività mutagena e sul tipo di mutazioni cromosomiche indotte dall'acenaftene ». — 29. « Sull'impiego del gammesano come agente poliploidizzante ». — 30. « Early influence of M-inositol and sugars on gammesans induce C-Mitosis ». — 31. « Prophase poisoning by chemical agents ». — 32. « The effect of M-inositol on C-Mitosis and C-Tumor reaction ». — 33. « Biotipi cariologici ed embrionia avventizia in *Nothoscordum Fragrans* Kunth. ». — 34. « Attività citologica del dimercaptopropanolo (Bal) e del metilarinato di sodio (Arrhenal) e loro azioni combinate ». — 35. « Primo contributo alla conoscenza dell'attività citologica e fisiologica delle sostanze di crescita sul testo *Allium Cepa* ». — 36. « Studio citologico ed embriologico di *Bowiea volubilis* Harv. ». — 37. « Triploidia e apomissia in *Statice oleaeifolia* Scop. var. *Confusa* Godr. ». — 38. « The chromosome breaking activity of chemicals as studied by the *Allium Cepa* test ». — 39. « Agglutinazione cromosomica (« Stickiness ») quale effetto citologico caratteristico di due composti cromatici ». — 40. « Costituzione chimica e attività mutagena nei derivati dell'acridina ». — 41. « Occasionale comparsa di radici altamente poliploidi in un bulbo di cipolla ». — 42. « Sull'areale pugliese di *Quercus trojana* Webb. ». — 43. « Studio statistico dell'attività mutagena dell'acridina e derivati ». — 44. « Notes on the chromosome Breaks induced by pure Gammexane ». — 45. « Differenziazione istologica per endopoliploidia nelle radici di alcune monocotiledoni ». — 46. « The Quantitative Study of Mitotic Poisons by the *Allium Cepa* test: Date and Problems ». — 47. « Gli agenti mutageni ». — 48. « Mutazioni clorofilliane nell'orzo indotte da derivati acridinici ». — 49. « Recenti acquisizioni nel campo della chemiogenetica: I prodotti del ricambio organico come agenti mutageni ». — 50. « Mutazioni cromosomiche spontanee in plantule di *Pisum Sativum* L. ». — 51. « Chromosome Breakage by brilliant cresyl blue ». — 52. « Nuovi dati sull'attività mutagena dei derivati dell'acridina ». — 53. « Endopolyploidy in differentiated plant tissues ». — 54. « Does meso-inositol inhibit the colchicine effect in the roots ».

of *Allium Cepa* ? ». — 55. « New evidence on endopolyploidy in differentiated plant tissues ». — 56. « Sulle possibilità di impiego del Gammesano per la produzione di poliploidi nei vegetali ».

4. Prof. CARLO CAPPELLETTI. — « Ricerche biologiche sul *Lilium candidum* ».

5. Prof. CARLO JUCCI. — 1. « Organizzazione, scopi e possibilità del "Centro Appenninico" ». — 2. « Genetica e Agricoltura. Relazione finale del Convegno di Genetica Agraria in Rieti ». — 3. « Selezione naturale e selezione artificiale ». — 4. « L'attività del Centro di Genetica del Consiglio Nazionale Ricerche. Relazione ». — 5. « Il metabolismo dell'emoglobina e l'anemia dei topi macchiati. Piano di Lavoro ». — 6. « Studi e piani di ricerche di uno zoologo nei campi della Biologia generale ». — e altre pubblicazioni dell'Istituto di Zoologia diretto dall'autore.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 9 febbraio 1952

BOSSOLASCO M. — *L'attività dell'Istituto Geofisico e Geodetico dell'Università di Genova nel periodo 1946-1951*. Genova, s. ed., 1951. Pp. 9.

CLERICI Carlo. — *Una immagine corpuscolare del mondo fisico. Inconsistenza della obiezione circa le « Interferenze Luminose »*. S.n.t. Pp. 7, in-8.

COLLEGIO INGEGNERI FERROVIARI ITALIANI. — *La nuova stazione di Roma Termini delle Ferrovie Italiane dello Stato*. Raccolta di articoli pubblicati da « Ingegneria Ferroviaria ». Roma, 1951. 1 vol. di testo con figg. ed 1 di tavv., in-4°.

DRAKE N. d'Arcy. — Vedi: SCHACKNE Stewart e DRAKE N. d'Arcy.

KEILOVÁ-REDOVÁ Helena. — Vedi: WENIG Karel e KEILOVÁ-RODOVÁ Helena.

PRÁT S. e RETOVSKÝ R. — *Praktikum Rostlinné Fysiologie*. Praha, Přírodovědecké Nakladatelství, 1951. Pp. 130, in-8°, con figg. (Česká Akademie Věd a Umění).

ŘETOVSKÝ R. — Vedi: PRÁT S. e ŘETOVSKÝ R.

SCHACKNE Stewart e DRAKE N. D'Arcy. — *Il mondo del petrolio*. Verona, Mondadori, 1951. Pp. XII-136, in-8°, con figg.

SIGNORINI Antonio. — *Meccanica razionale con elementi di statica grafica*. Vol. I. 2ª ed. Roma, Perrella, 1952. Pp. 354, in 8°.

WENIG Karel e KEILOVÁ-RODOVÁ Helena. — *Praktikum Živočišné Fysiologie*. Praha, Přírodovědecké Nakladatelství, 1951. Pp. 209, in-8°, con figg. (Česká Akademie Věd a Umění).

D. DE BLASI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 marzo 1952

Presiede il Socio anziano G. LEVI

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Misura e integrazione sulle varietà parametriche.* Nota I^(*) del Corrisp. RENATO CACCIOPPOLI.

1. La presente e le successive Note sono in stretta connessione da una parte con le due immediatamente precedenti in questi « Rendiconti »⁽¹⁾, e dall'altra con antichi miei lavori in cui ho delineato, non senza omissioni ed errori, ma certo nei suoi tratti essenziali, un nuovo capitolo del Calcolo integrale moderno.

La rettificazione delle curve, il cambiamento della variabile in un integrale semplice, l'integrazione curvilinea sono argomenti oramai classici nella teoria delle funzioni di variabili reali, ed i problemi corrispondenti nel caso di più dimensioni sono stati oggetto di numerosissime indagini. Per quanto riguarda in specie la teoria della misura, accanto a varie ricerche sull'area delle superficie continue (prime fra tutte quelle di Lebesgue), altre sono state dedicate alla nozione di misura dimensionale, lineare o superficiale, per insiemi generali al possibile: ne è risultata una congerie di definizioni, tutte più o meno in disaccordo fra di loro (misure secondo Carathéodory, Gross, Hausdorff, ecc.⁽²⁾).

In un altro indirizzo, inaugurato da me⁽³⁾ e perseguito per alcuni anni, lo scopo essenziale era invece lo studio delle proprietà fondamentali delle superficie quadrabili, degli appropriati strumenti analitici⁽⁴⁾, e delle que-

(*) Presentata nella seduta del 9 febbraio 1952.

(1) *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati*, Note I e II, seduta del 12 gennaio 1952. Indicherò nei riferimenti queste Note con N I e N II.

(2) Ved. per le citazioni N I, nota (1).

(3) *Sulla quadratura delle superficie piane e curve*, questi « Rendiconti », VI, 6 (1927); *Sulle coppie di funzioni a variazione limitata*, « Rend. della R. Acc. di Scienze Fis. e Mat. di Napoli », III, 34 (1928).

(4) Precedenti ricerche di GEÖCZE e di BANACH (ved. per la bibliografia RADÒ, loc. cit. (7)) appartengono in qualche modo ad un indirizzo intermedio.

stioni connesse di Calcolo integrale: cambiamento delle variabili negli integrali doppi, integrazione superficiale, integrali doppi del Calcolo delle Variazioni ⁽⁵⁾. Queste ricerche hanno conosciuto una fortuna ambivalente: poichè, se alcune delle idee (non ancora tutte) che ispiravano i miei lavori sono oggi abbastanza diffuse, alcuni errori che questi contenevano hanno fornito o il pretesto per ignorarli o l'unica materia delle citazioni.

Ora mi sembra che all'indirizzo in questione potrebbe anche subordinarsi il primo cui ho accennato; cioè che il programma che ho posto alla base delle mie ricerche sulle superficie ⁽⁶⁾ potrebbe estendersi agli insiemi suscettibili di misura e luoghi di integrazione superficiale - riguardati se così può dirsi non più come insiemi amorfi di punti, ma come complessi organizzati di elementi superficiali.

All'argomento ho dedicato le due Note precedenti; e la ripresa di questi studi mi porge l'occasione di tornare qui sulla mia prima teoria, in vista di una nuova e corretta esposizione, fermi restando essenzialmente i metodi ed i risultati.

Accanto a qualche svista, scorrettezza espositiva, congettura arrischiata, facilmente rettificabili o inessenziali ma che rileverò per scrupolo di precisione, una deficienza più grave dei miei lavori consisteva nell'impiego di un procedimento (prolungamento di certe funzioni additive d'insieme) di portata vasta ma non illimitata come ritenevo. Non è però difficile modificarlo in modo da renderlo applicabile in tutti i casi; e la sua naturalezza, la perspicuità dei risultati cui conduce con relativa semplicità, ne fanno a mio avviso lo strumento più appropriato per un'analisi approfondita degli argomenti in questione.

Invero le varie teorie che hanno fatto seguito alla mia ⁽⁷⁾, pur ricche di risultati importanti e di interessanti ricerche speciali (su cui peraltro sono fondate), sono quanto mai laboriose e sembrano marciare verso una complicazione sempre maggiore ⁽⁸⁾, ciò che costituisce un difetto in trattazioni di argomenti semplici e fondamentali. E l'estensione a spazi e varietà a quante-sivogliano dimensioni ne appare tanto ardua quanto è semplice, come si vedrà, della mia.

2. Esemplicheremo la nostra analisi, dal punto di vista premesso, delle varietà continue *parametriche* (immagini, « path-manifolds ») a k dimensioni nello spazio ad n dimensioni ($k \leq n$) sul caso $n = 3$, $k = 2$.

Una *superficie* S dello spazio ordinario è definita da tre equazioni parametriche

$$(1) \quad x = x(U) \quad , \quad y = y(U) \quad , \quad z = z(U),$$

(5) I lavori principali sono: A) *Teoria generale del cambiamento di variabili negli integrali doppi*, « Math. Ann. », 101 (1929); B) *Trasformazioni piane, superficie quadrabili, integrali di superficie*, « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », 54 (1930); C) *Gli integrali doppi di forma parametrica nel calcolo delle variazioni*, « Atti del R. Istituto Veneto », 93 (1934).

(6) Ved. la prefazione a B), loc. cit. (5).

(7) Principalmente ad opera di RADÒ e CESARI. Per la bibliografia, ved. RADÒ, *Length and area*, « Amer. Math. Soc. Colloquium Publications », 30 (1948).

(8) Per convincersene, basta scorrere la voluminosa monografia di Radò; dianzi citata.

o in forma condensata $P = P(U)$, P essendo il punto (x, y, z) , ed U designando il punto corrente sopra una superficie topologica (triangolata) \mathcal{S} , che diremo *base* o piuttosto *modello*; supporremo \mathcal{S} bilatera, determinante con la propria l'orientazione di \mathcal{S} .

Consideriamo particolarmente il caso che \mathcal{S} sia un insieme limitato aperto \mathcal{A} del piano uv . Del punto $P(u, v)$ di \mathcal{S} indichiamo con $\bar{P}(x, y, z)$ la *traccia* nello spazio, cioè il punto geometrico ordinario di coordinate $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Due punti $P(u, v)$ di \mathcal{S} si riguardano dapprima come distinti se corrispondenti a punti diversi (u, v) ; ma questa definizione va poi corretta attraverso la considerazione degli *intorni* di P su \mathcal{S} .

Indichiamo in generale con R un campo rettangolare aperto dello spazio, definito dalle disequaglianze $a < x < a'$, $b < y < b'$, $c < z < c'$. Consideriamo un punto $P_0 = P(u_0, v_0)$ e la sua traccia $\bar{P}_0(x_0, y_0, z_0)$, e supponiamo che esistano campi rettangolari R contenenti \bar{P}_0 e tali che l'insieme dei punti (u, v) cui corrispondano punti P con tracce contenute in R abbia come componente internamente connesso un campo contenente (u_0, v_0) e con *frontiera tutta in* \mathcal{A} ; l'immagine di un simile insieme su \mathcal{S} sarà detta un *intorno aperto* di P su \mathcal{S} , *staccato* da R .

Definiremo come *punti di* \mathcal{S} , *superficie aperta*, i soli punti $P(u, v)$ dotati di intorno, ossia *interni*; identificheremo poi fra di loro due punti $P(u_0, v_0)$, $P(u_1, v_1)$ tali che ogni intorno dell'uno sia anche intorno dell'altro. (Non è escluso allora che, mancando punti interni, la superficie risulti *vuota*).

Così definito, ogni punto P di \mathcal{S} è l'immagine $P(K)$ di un ben determinato continuo K (insieme chiuso e connesso) contenuto in \mathcal{A} . La classe $\{K\}$ di questi continui costituisce, dopo ovvia introduzione della distanza fra due di essi, uno spazio (in generale bidimensionale) \mathcal{K} , connesso in grande ed in piccolo. Gli insiemi di Borel in tale spazio, cioè gli *insiemi di Borel su* \mathcal{S} , corrispondono a quelli H di una famiglia completamente additiva F di insiemi di \mathcal{A} , cioè della famiglia additiva minima costruita a partire dai continui K . Indicheremo con $S(H)$ la porzione di \mathcal{S} (o di \mathcal{K}) corrispondente ad H , e con $ES(H)$ (ES), E essendo un insieme di Borel nello spazio, l'insieme staccato da (cioè con traccia su) E su $S(H)$ (S).

Consideriamo poi il caso notevole, e anche più semplice, che \mathcal{S} sia *chiusa*, cioè che il modello \mathcal{S} sia una superficie chiusa (a triangolazione finita): allora ad ogni punto $P(u, v)$ corrisponde un punto $P(K)$, la classe $\{K\}$ di continui essendo definita su \mathcal{S} ⁽⁹⁾.

Delle superficie \mathcal{S} aperte o chiuse considereremo sistematicamente approssimazioni mediante superficie poliedriche. Una siffatta superficie approssimante si assegnerà, triangolati opportunamente la superficie chiusa \mathcal{S} o un campo nell'insieme aperto \mathcal{A} , mediante tre funzioni $x(U)$, $y(U)$, $z(U)$ isti-

(9) Superficie così definite sono state dette di FRÉCHET, in ragione della fondamentale definizione di *distanza*, dovuta a quest'Autore, che precisa la nozione in modo definitivo. La topologia di queste superficie è stata studiata in numerosi lavori: ved. per esempio RADÓ, loc. cit. (7), e soprattutto MORREY, *The topology of (path) surfaces*, « Amer. Journal of Math. », 57 (1935). Ma una teoria della misura come la nostra vuole essere indipendente da indagini topologiche speciali.

tuenti un omomorfismo fra ogni faccia della superficie ed un corrispondente triangolo della *rete triangolare base* r . Nel caso del modello \mathfrak{A} potremo poi supporre per semplicità la rete r rettilinea, e le funzioni x, y, z *quasi-lineari*, cioè lineari in ognuno dei triangoli di r .

Definiremo le successioni poliedriche approssimanti $\{\Sigma_n\}$ mediante successioni in corrispondenza di reti base $\{r_n\}$ e di terne di funzioni $\{x_n(U), y_n(U), z_n(U)\}$, con la condizione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

dove x, y, z sono le funzioni che definiscono S , e la convergenza essendo uniforme; nel caso della superficie aperta internamente ad \mathfrak{A} , le reti r_n invadendo quest'insieme; e scriveremo brevemente $\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = S$.

3. Data una superficie chiusa S , attribuiamo ad ogni punto Q dello spazio una *molteplicità* positiva, negativa o nulla, eguale all'ordine topologico di Q rispetto ad S (riguardato come nullo nei punti della traccia \bar{S} di S). Otteniamo così ciò che altrove abbiamo chiamato un *insieme ponderato* (definito da una funzione caratteristica a valori interi), definendone in modo ovvio la *misura semplice* (relativa) e quella *totale* (assoluta), la seconda finita o infinita, la prima determinata quando finita la seconda (come integrali della funzione caratteristica e del suo valore assoluto). Tale insieme è l'*insieme interno ad* S , e le sue misure sono i *volumi semplice e totale interni ad* S . Analoghe definizioni si danno per le curve piane.

Anche in modo ovvio si introduce la nozione di *convergenza in media* per una successione di insiemi ponderati (come convergenza in media di ordine 1 della successione delle funzioni caratteristiche); l'insieme limite risulta definito a meno di un insieme di misura totale nulla.

Consideriamo ora una successione $\{\Sigma_n\}$ di superficie poliedriche chiuse tendenti ad S . Si dimostra facilmente il seguente lemma: *Se le superficie approssimanti hanno aree equilimitate, i relativi insiemi interni convergono in media.*

L'insieme limite coincide (a meno di un insieme di misura totale nulla) con l'insieme interno alla superficie limite se la traccia \bar{S} di questa ha misura spaziale nulla.

Un risultato analogo sussiste naturalmente per le curve piane ⁽¹⁰⁾.

(10) Il lemma discende immediatamente dall'osservazione che il volume (area) totale racchiuso fra due superficie (curve) approssimanti è maggiorato da $(\alpha + \alpha') \delta / 2$, essendo α, α' le aree (lunghezze) delle superficie (curve) e δ la massima distanza fra due punti corrispondenti.

L'insieme limite (definito a meno di un insieme di misura nulla) può riguardarsi come quello racchiuso dalla superficie (curva) quando, la traccia di questa essendo positiva, non possa più a fini di misura trascurarsene il contributo. A questo criterio si ispira una definizione proposta in C), loc. cit. (5).

Tuttavia, per quanto artificiose, le definizioni di aree e volumi « interni », introdotte in B) (seguendo una primitiva idea di W. H. Young) sono utili, e si raccomandano per la loro semplicità; CESARI (ved. nota (7)) se ne è largamente servito, nomenclatura a parte.

4. Ci occorrerà un teorema sulle funzioni additive d'insieme, del quale abbiamo già fatto uso (in forma meno completa) nelle Note precedenti ⁽¹¹⁾.

Indichiamo in generale con $\varphi(I)$ una funzione additiva nella famiglia degli insiemi di Borel del piano (o di una superficie, o dello spazio), e consideriamo una successione $\{\varphi_n(I)\}$ di funzioni siffatte. Diremo che questa successione è *quasi-convergente* verso $\varphi(I)$ se è numerabile ogni infinità di insiemi, a frontiere disgiunte, su cui manchi la convergenza.

Ora è noto che *se le funzioni φ_n hanno variazioni totali equilimate la successione $\{\varphi_n\}$ è compatta rispetto alla quasi-convergenza*.

Le successioni estratte quasi-convergenti possono ammettere tutte una stessa funzione limite (pur non essendo quasi-convergente la successione data): diciamo in tal caso che $\{\varphi_n\}$ converge in *misura*.

5. Diremo per brevità di classe L una superficie S approssimabile mediante superficie poliedriche di aree equilimate, cioè quadrabile secondo Lebesgue; se più generalmente hanno aree (assolute) equilimate soltanto le proiezioni ortogonali di tali superficie su un piano π , diremo che S è di classe L *rispetto a π* .

Indicheremo in generale con I un insieme di Borel sul modello, \mathcal{S} o \mathcal{A} ; con A e C insiemi H della famiglia F rispettivamente aperti e compatti ⁽¹²⁾, cioè corrispondenti ad insiemi aperti e compatti dello spazio \mathcal{K} , ossia di S (n. 2). Se R' è il dominio involucro del campo rettangolare R contenente P, considereremo come *intorno compatto* di P il componente continuo $S(C)$ di $R'S$ che contiene P.

In stretta analogia con gli sviluppi delle Note precedenti consideriamo ora un piano orientato π , ed una porzione della superficie poliedrica, costituita dai punti immagini di un insieme I. Indichiamo con $\varphi(I, \Sigma)$ la misura relativa della proiezione di tale porzione su π ; come funzione di I, φ è definita dapprima elementarmente per insiemi aperti, e si estende per additività a tutti gli insiemi di Borel.

Supponiamo S di classe L, e si abbia $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n$, le aree delle superficie poliedriche Σ_n risultando equilimate. Il teorema precedente ci assicura che è compatta la successione delle relative funzioni $\varphi(I, \Sigma_n)$: esisterà dunque almeno una funzione limite $\varphi(I, S)$. Non è detto in generale che questa sia unica: ma dimostreremo che *due funzioni limiti qualunque coincidono su tutti gli insiemi H della famiglia F*.

S sia per esempio chiusa: allora dal lemma del n. 3 segue che la successione degli insiemi interni alle superficie poliedriche Σ_n converge in media. Se $\{\Sigma'_n\}$ e $\{\Sigma''_n\}$ sono due successioni approssimanti, tenderà a zero il volume totale racchiuso fra Σ'_n e Σ''_n (cioè interno a $\Sigma'_n - \Sigma''_n$). Si potranno quindi trovare due successioni estratte corrispondenti, in modo che per quasi tutti i piani paralleli ai piani coordinati le aree totali comprese fra le poligo-

(11) N I, n. 5.

(12) Nel senso di *compatti in sé*, e però (assolutamente) chiusi.

nali sezioni delle relative Σ'_n e Σ''_n tendano a zero; questa circostanza si presenterà pertanto sulle frontiere di quasi tutti i campi rettangolari.

Se ne deduce subito ⁽¹³⁾ che, detta $\psi(E, \Sigma_n)$ la funzione di insieme spaziale misura della proiezione di $E \cap \Sigma_n$ su π , la successione $\{\psi(E, \Sigma_n)\}$ è convergente in misura, e però può anche essere supposta quasi-convergente, verso una funzione additiva $\psi(E, S)$. Altrettanto poi avviene, anche se S è aperta, quando ad S si sostituisca $S(A)$ ed E vari in un campo rettangolare R , $S(A)$ essendo un intorno aperto staccato da R .

È chiaro allora come, mediante ricoprimenti con intorni, si costruisca una funzione additiva $\varphi'(C, S)$, e pertanto si definisca in F la funzione $\varphi(H, S)$, coi valori di ψ sugli intorni aperti o compatti.

Si vede facilmente che $\varphi(H, S) = \varphi'(H, S)$ in F . Siano infatti $S(A)$ un intorno aperto staccato da R , e $S(C)$ l'insieme compatto $R' \cap S(A)$, R' essendo un dominio rettangolare in R ; posto $\Sigma_n(B_n) = R' \cap \Sigma_n(A)$, il limite massimo (completo) di B_n è contenuto in C .

Consideriamo infiniti insiemi C , corrispondenti a domini R' a frontiere disgiunte: potremo scrivere per questi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(B_n, \Sigma_n) &= \varphi'(C, S), & \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(C, \Sigma_n) &= \varphi(C, S), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(B_n, \Sigma_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(C, \Sigma_n), \end{aligned}$$

con una infinità numerabile di eccezioni; per la terza relazione ciò è conseguenza della proprietà di limite degli insiemi B_n e del fatto che le variazioni delle φ sono equilimitate. Tanto basta per concludere che è sempre $\varphi(C, S) = \varphi'(C, S)$, e quindi anche in generale $\varphi(H, S) = \varphi'(H, S)$.

Possiamo scrivere brevemente, senza equivoco, $\varphi(H)$ in luogo di $\varphi(H, S)$. Indicheremo con $\varphi_1(H)$, $\varphi_2(H)$, $\varphi_3(H)$ le funzioni φ relative ai piani coordinati: se α, β, γ sono i coseni direttori dell'asse normale a π , si ha ovviamente $\varphi = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3$.

6. Le funzioni di proiezione $\varphi(H)$ che abbiamo definite non sono in ultimo altro che funzioni $\varphi(J)$ dell'insieme di Borel J variabile sulla superficie S o, ciò che è lo stesso, nello spazio \mathcal{K} ; funzioni, come deve essere, completamente additive. Sul modello esse non sono definite, nel caso più generale, che entro la famiglia F degli insiemi H corrispondenti agli insiemi J , ammettendo su quella di tutti gli insiemi di Borel I infiniti prolungamenti additivi.

Peraltro se non in tutte, almeno in circostanze di alta generalità il prolungamento di $\varphi(H)$ in $\varphi(I)$ è univocamente determinato. Ovviamente, il caso si presenta sempre che, i continui K riducendosi tutti a punti, F si identifichi con la famiglia degli insiemi I . È stato proposto di chiamare allora la superficie *non degenera* ⁽¹⁴⁾; preferiremmo, nonchè la denominazione di

(13) Con una considerazione affatto analoga a quella fatta in N I, n. 6.

(14) Ved. MORREY, loc. cit. (9). Si intende che la superficie è considerata in una *rappräsentazione non degenera*, della quale è supposta suscettibile.

propria, l'inclusione, nella categoria, delle superficie rappresentabili in modo che i K non ridotti a punti siano al più in infinità numerabile; si eviterebbe così di dover chiamare degenerare una porzione di superficie analitica contenente singolarità. Per superficie proprie, le funzioni di proiezione φ risultano additive entro l'intera famiglia degli insiemi di Borel I sul modello.

Affatto in generale, v'ha luogo a definire per ogni I il minimo insieme H_I che lo contenga, ed il massimo H^I che ne sia contenuto, e le funzioni (additive soltanto entro F)

$$\varphi'(I) = \varphi(H_I) \quad , \quad \varphi''(I) = \varphi(H^I).$$

Se $\varphi' \equiv \varphi''$, $\varphi(H)$ ammette l'ovvio prolungamento

$$\varphi(I) = \varphi'(I) = \varphi''(I);$$

in tal caso la superficie si può riguardare, ai fini della valutazione di φ , come non degenerare, essendo nullo il contributo dei punti di S corrispondenti a continui effettivi (cioè non ridotti a punti).

7. Un caso speciale da considerare a parte è quello che S sia *piatta* ⁽¹⁵⁾, cioè abbia traccia contenuta in un piano, che possiamo supporre sia $z = 0$. Le (1) si riducono allora, per una base \mathcal{A} nel piano uv , alle due equazioni

$$(2) \quad x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v),$$

che definiscono una trasformazione piana, di (u, v) in (x, y) .

Non v'è da considerare allora che la funzione φ_3 ⁽¹⁶⁾; la indichiamo con $W(H)$ o $W(J)$, e la chiamiamo *variazione (semplice) della coppia* $[x(u, v), y(u, v)]$. La variazione totale $V(H)$ o $V(J)$ della funzione additiva W è la *variazione totale* della coppia, che diciamo *a variazione limitata*. $W(J)$ e $V(J)$ sono rispettivamente l'*area semplice* (relativa) e quella *totale* (assoluta) di $J = S(H)$, porzione della superficie piatta S di equazioni (2).

Definiamo W', W'', V', V'' come dianzi φ', φ'' : se $W' \equiv W''$, donde $V' \equiv V''$, le funzioni $W(H), V(H)$ ammettono in \mathcal{A} i prolungamenti $W(I), V(I)$. Se poi $W(I)$ risulta assolutamente continua, diciamo che la coppia $[x(u, v), y(u, v)]$ è *assolutamente continua*. Le derivate

$$\frac{dW}{d\mu} \quad , \quad \frac{dV}{d\mu} = \left| \frac{dW}{d\mu} \right|,$$

μ designando la misura in \mathcal{A} , sono quasi ovunque definite, sommabili, e nel caso dell'assoluta continuità hanno come integrali indefiniti $W(I), V(I)$ rispettivamente. La notazione, da noi altrove introdotta,

$$\frac{dW}{d\mu} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

si presenta spontaneamente.

(15) L'aggettivo, adoperato da CESARI, è molto preferibile all'altro « piana » di cui mi servivo.

(16) È ovvio che le superficie poliedriche approssimanti si prendono piate anch'esse, cioè rappresentate da coppie *quasi-lineari*.

In generale, v'ha luogo a confrontare le funzioni $W(J)$, $V(J)$ con una qualunque funzione additiva non negativa (*peso*) di J ; tale è per esempio la misura $\mu(H)$, H essendo l'insieme corrispondente a J . Si può estendere la definizione di coppia assolutamente continua in base alla condizione dell'assoluta continuità di $W(J)$ rispetto a $\mu(H)$; ma la cosa ha interesse secondario, poichè il campo naturale di definizione di W è sempre quello degli insiemi J (o H).

8. Torniamo alla superficie spaziale S di classe L , rappresentata dalle equazioni, \mathcal{A} essendo il modello,

$$(3) \quad x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v).$$

Le sue proiezioni $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ sui piani yz , zx , xy sono di classe L , e le coppie a variazione limitata $[y, z]$, $[z, x]$, $[x, y]$ hanno le variazioni $W_1 = \varphi_1$, $W_2 = \varphi_2$, $W_3 = \varphi_3$; queste sono definite direttamente su S , e però su \mathcal{A} nella famiglia F degli insiemi H . Ma ove vengano considerate isolatamente su $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, i loro campi naturali di definizione sono in generale tre sotto-famiglie F_1 , F_2 , F_3 di F , costituite dagli insiemi $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, $H^{(3)}$ costruiti a partire da tre classi di continui $\{K^{(1)}\}$, $\{K^{(2)}\}$, $\{K^{(3)}\}$, che corrispondono a continui del *modello ridotto* \mathcal{K} ; tali classi sono i modelli ulteriormente ridotti \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 , \mathcal{K}_3 relativi alle tre proiezioni. W_i si prolunga da F_i a F , essendo nullo il contributo ai suoi valori dei punti di $S^{(i)}$ corrispondenti a continui $K^{(i)}$ non ridotti a continui K .

9. Ho introdotto per primo⁽¹⁷⁾ la nozione di coppia (trasformazione) a variazione limitata, confrontandola con altra dovuta a Banach⁽¹⁸⁾, e mettendo in luce la sostanziale diversità fra le due valutazioni, « interna » ed « esterna », della variazione totale; consideravo in pari tempo la variazione semplice, che naturalmente non aveva posto nella teoria di Banach; e identificavo le due variazioni con le aree totale e semplice di una superficie piatta. Il passaggio da questa ad una sua porzione variabile qualunque era ben naturale, l'additività delle funzioni ottenute intuitiva; s'imponeva poi la definizione dello jacobiano generalizzato tanto in valore assoluto quanto *in valore e segno*, come derivata di tali funzioni⁽¹⁹⁾.

Nell'esecuzione (unica a tutt'oggi) di questo programma ho preso un abbaglio: ho ragionato *sul modello e non sull'immagine*, con una assimilazione lecita, al fine proposto, sotto condizioni estremamente larghe, ma non incondizionatamente⁽²⁰⁾. Ho ritenuto fosse (o piuttosto non ho pensato non fosse) senz'altro possibile la definizione di W e di V su *tutti* gli insiemi di Borel; la

(17) Nelle due Note citate in (3), che contengono già tutti i fondamenti della teoria.

(18) Ved. nota (4). Nella recente terminologia americana: *essentially, strongly of bounded variation*.

(19) Questa definizione è tuttora irreperibile nel labirinto delle nuove teorie; eppure si tratta della proprietà fondamentale dello jacobiano elementare, e non dovrebbe andare perduta in una generalizzazione naturale, e perciò stesso semplice. Cfr. RADÒ, loc. cit. (7), IV, 5, 2.

(20) Per un esempio, ved. CESARI, « Boll. Un. Mat. It. », II, 4 (1942).

semplice analisi precedente mostra che il campo naturale di esistenza di queste funzioni è, come deve essere, la famiglia additiva F ; un prolungamento oltre questa non ha d'altronde ragion d'essere che nel caso dell'assoluta continuità, e viene allora assicurato da un'ipotesi supplementare⁽²¹⁾. Bastava una semplice revisione critica dei fondamenti della teoria (ciò che, passato senza altro alle applicazioni, ho avuto il torto di non fare) per eliminare l'errore non altro che segnalandolo.

La prima esposizione della mia teoria sussiste dunque non appena esplicitare le restrizioni ivi ignorate; per esempio è valida *almeno* per tutte le superficie proprie. Per estenderla poi al caso generale, basta sostituire al modello che è alla base delle (1) il *modello ridotto* \mathcal{K} , ai punti di \mathcal{A} i continui K di cui sono immagini i punti della superficie⁽²²⁾.

Un notevole progresso della presente trattazione rispetto alla precedente consiste nell'impiego di approssimazioni poliedriche sotto la sola condizione dell'equilimitatezza delle aree; laddove prima supponevo queste tendenti al limite minimo, ai fini di una convergenza stretta, che la quasi-convergenza sostituisce vantaggiosamente.

Analisi matematica. — *Sulle derivate delle funzioni ipergeometriche confluenti rispetto ai parametri.* Nota^(*) del Corrisp. FRANCESCO G. TRICOMI.

1. Le derivate delle funzioni ipergeometriche confluenti $\Phi(a, c; x)$ e $\Psi(a, c; x)$ rispetto ai parametri a e c ⁽¹⁾, al contrario di quel che succede per le derivate rispetto alla variabile x , non sono, in generale, esprimibili mediante funzioni della stessa specie. Tuttavia in qualche caso particolare la cosa è possibile mediante alcune formule, apparentemente sconnesse fra loro, che si presentano qua e là nei vari capitoli della teoria: per esempio le formule sulle derivate delle funzioni di Bessel rispetto all'ordine ν , quando questo coincide con un numero intero.

(21) È quanto fa CESARI, ved. per esempio loc. cit. (20).

(22) RADÒ e REICHELDERFER (« Trans. Amer. Math. Soc. », 49 (1941)) hanno voluto credere che un mio insanabile errore consistesse nell'enunciato trascurato di un facile lemma (dove non era formulata un'ipotesi che poi occorreva nella dimostrazione); è l'unico mio « risultato » riportato, in compenso con un rigore alla Landau. Ma il vero errore era quello che ho dichiarato; che non invalidava affatto, ma soltanto limitava la teoria; e che come ho detto bastava individuare per rimuovere completamente.

Che questa semplice correzione sia stata omessa proprio da esperti in « path-surfaces »; che debba farla ora io, più che altro all'occasione di nuove ricerche e di nuovi risultati, dà una singolare idea della collaborazione fra studiosi ad un'opera *impersonale* comune.

(*) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) Le notazioni qui adoperate per le funzioni ipergeometriche confluenti sono quelle di cui faccio uso, da quattro anni in qua, nei miei numerosi lavori sull'argomento e che furono adottate anche nel *Bateman Manuscript Project*. Vedansi per esempio le mie *Lezioni sulle funzioni ipergeometriche confluenti* in corso di stampa, in litografia, presso l'editore Gheroni di Torino.

Scopo di questa Nota è di dedurre un gruppo di tali formule, solo in parte già note, e in particolare le formule nelle funzioni di Bessel cui si è alluso, da un semplicissimo principio generale che potrà, forse, essere utile anche in altri casi.

2. Consideriamo un'equazione differenziale ordinaria, lineare ed omogenea, contenente un parametro λ , che, per semplicità, supporremo sia del 2° ordine. Supponiamo inoltre che di essa si conoscano *tre* integrali particolari

$$f_1(x, \lambda), \quad f_2(x, \lambda), \quad \varphi(x, \lambda)$$

di cui i primi due *non* siano più linearmente indipendenti quando λ assume un certo valore particolare $\lambda = \lambda_0$, mentre il terzo si mantenga linearmente indipendente dai primi due anche per $\lambda = \lambda_0$, laddove sarà invece $f_1 = k f_2$ essendo k una certa costante ⁽²⁾.

Il principio generale cui si è accennato consiste semplicemente nell'osservazione che dovranno evidentemente esistere due certe costanti A e B tali da aversi

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f_1(x, \lambda) - k f_2(x, \lambda)}{\lambda - \lambda_0} = A f_1(x, \lambda_0) + B \varphi(x, \lambda_0)$$

da cui, supposto applicabile al calcolo del limite la regola di L'Hospital, segue

$$(1) \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} - k \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} = A f_1(x, \lambda_0) + B \varphi(x, \lambda_0).$$

Si ha cioè che un'opportuna combinazione lineare delle derivate dei due integrali f_1 e f_2 rispetto a λ è, per $\lambda = \lambda_0$, esprimibile come una combinazione lineare di due integrali particolari dell'equazione (f_1 e φ) rimanenti linearmente indipendenti anche per $\lambda = \lambda_0$.

3. Nel caso dell'equazione differenziale delle funzioni ipergeometriche confluenti:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (c - x) \frac{dy}{dx} - ay = 0$$

si hanno i tre integrali particolari

$$\Phi(a, c; x), \quad x^{1-c} \Phi(a - c + 1, 2 - c; x), \quad \Psi(a, c; x),$$

di cui i due primi vengono a coincidere fra loro per $c = 1$, mentre il terzo si conserva linearmente indipendente da essi purchè a non sia un intero negativo o nullo. Sotto quest'ultima restrizione la (1) ci permette dunque di

(2) Ad esempio, nel caso di un'equazione differenziale dotata di un punto singolare fuchsiano, nell'intorno di un valore λ_0 del parametro per cui le due radici dell'equazione determinante vengano a coincidere fra loro, il classico metodo d'integrazione di Frobenius fornisce appunto tre integrali particolari che si trovano nelle condizioni di quelli di cui sopra.

affermare (identificando λ con c) che dovranno esistere due costanti A e B tali da aversi

$$\left[\frac{\partial}{\partial c} \{ \Phi(a, c; x) - x^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; x) \} \right]_{c=1} = A\Phi(a, 1; x) + B\Psi(a, 1; x)$$

cioè, con ovvie notazioni,

$$[\Phi_c(a, c; x) + x^{1-c} \Phi_a(a-c+1, 2-c; x) + x^{1-c} \Phi_c(a-c+1, 2-c; x) + x^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; x) \log x]_{c=1} = A\Phi(a, 1; x) + B\Psi(a, 1; x)$$

da cui, ponendo per brevità

$$(2) \quad \Phi_a(a, c; x) + 2\Phi_c(a, c; x) \equiv \dot{\Phi}(a, c; x),$$

segue

$$\dot{\Phi}(a, 1; x) = (A - \log x) \Phi(a, 1; x) + B\Psi(a, 1; x).$$

Ma per $x \rightarrow 0$, per note formule si ha

$$\Phi(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c} x + \dots, \quad \dot{\Phi}(a, c; x) = \frac{c-2a}{c^2} x + \dots$$

$$\Psi(a, 1; x) = -\frac{1}{\Gamma(a)} [2C + \psi(a) + \log x] + O(x \log x)$$

dove C è la costante di Euler-Mascheroni e ψ la derivata logaritmica della funzione *gamma*; quindi deve necessariamente essere

$$-1 - \frac{B}{\Gamma(a)} = 0, \quad A - \frac{B}{\Gamma(a)} [2C + \psi(a)] = 0$$

e se ne conclude che è

$$(3) \quad \dot{\Phi}(a, 1; x) = -[2C + \psi(a) + \log x] \Phi(a, 1; x) - \Gamma(a) \Psi(a, 1; x)$$

purchè, beninteso, a non sia un intero negativo o nullo.

4. Una corrispondente formula per la seconda soluzione Ψ dell'equazione confluyente può ottenersi, anche più semplicemente, derivando rispetto a c la fondamentale relazione

$$\Psi(a, c; x) = x^{1-c} \Psi(a-c+1, 2-c; x).$$

Invero si ha così

$$\Psi_c(a, c; x) = -x^{1-c} [\Psi_a(a-c+1, 2-c; x) + \Psi_c(a-c+1, 2-c; x) + \Psi(a-c+1, 2-c; x) \log x]$$

da cui ponendo $c = 1$ segue, non escluso il caso che a sia un intero negativo o nullo,

$$(4) \quad \dot{\Psi}(a, 1; x) \equiv \Psi_a(a, 1; x) + 2\Psi_c(a, 1; x) = -\Psi(a, 1; x) \log x.$$

Entrambe le equazioni (4) e (5) possono facilmente generalizzarsi al caso in cui il parametro c è un intero qualsiasi invece che proprio 1, utilizzando le note formule di derivazione rispetto ad x delle funzioni Φ e Ψ , ma, per brevità, sorvoliamo su ciò. Qualcosa del genere si vedrà, del resto, nel seguente n. 7.

5. Le precedenti considerazioni rendono conto delle peculiarità di un gruppo di formule della teoria delle funzioni di Bessel: le accennate formule sulle derivate rispetto all'ordine ν , su cui molti Autori sorvolano, mentre quelli che se ne occupano (per esempio Jahnke-Emde) non sempre riescono a porre ordine nella arruffata matassa.

Invero, considerato che le funzioni di Bessel di ordine ν sono funzioni ipergeometriche confluenti relative ai parametri $a = 1/2 + \nu$, $c = 2a = 1 + 2\nu$, e che in ispecie è

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu e^{-ix} \Phi\left(\frac{1}{2} + \nu, 1 + 2\nu; 2ix\right)$$

$$H_\nu^{(a)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (2x)^{\nu+1/2} e^{-ix} \Psi\left(\frac{1}{2} + \nu, 1 + 2\nu; 2ix\right);$$

si vede immediatamente che le loro derivate rispetto a ν si riconducono proprio a quelle combinazioni lineari di derivate parziali delle funzioni confluenti dianzi designate coi simboli Φ e Ψ , epperò potranno esprimersi anch'esse mediante funzioni di Bessel allorchè $c = 1 + 2\nu$ è intero, cioè quando l'ordine ν è esso stesso un intero o la metà di un intero.

Le relative formule potrebbero dedursi dalle precedenti (3) e (4) e accennate loro generalizzazioni ma si fa più presto a calcolare direttamente, con la regola di L'Hospital, il limite per $\nu \rightarrow n = \text{numero intero}^{(3)}$ del secondo membro della formula che serve a definire, finchè ν non è intero, la funzione di Bessel di 2^a specie:

$$N_\nu(x) \equiv Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}.$$

Invero, indicando brevemente le derivazioni rispetto all'ordine ν con un *punto sovrapposto*, tale procedimento - che, in fondo, non è altro che l'applicazione del principio generale di cui si è detto all'inizio - conduce subito alla formula

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} [\dot{J}_n(x) + (-1)^n \dot{J}_{-n}(x)]$$

che per $n = 0$ fornisce senz'altro

$$(5) \quad \dot{J}_0(x) = \frac{\pi}{2} N_0(x).$$

(3) Per brevità non ci occupiamo qui del caso che ν sia la metà di un intero dispari, in cui le funzioni di Bessel si riducono notoriamente a funzioni elementari.

Invece per $n = 1$, osservando altresì che dalla formula di ricorrenza delle funzioni di Bessel segue che

$$(6) \quad \dot{J}_{\nu+1}(x) + \dot{J}_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} \dot{J}_{\nu}(x) + \frac{2}{x} J_{\nu}(x)$$

e, in particolare, che

$$\dot{J}_1(x) + \dot{J}_{-1}(x) = \frac{2}{x} J_0(x),$$

si ha

$$(7) \quad \dot{J}_1(x) = \frac{\pi}{2} N_1(x) + \frac{1}{x} J_0(x).$$

Queste formule possono considerarsi come « ben note ». Tuttavia non è facile trovarle scritte esplicitamente, e perciò abbiamo voluto qui riportarle. Quanto ai valori di \dot{J}_n per gli altri valori interi di n , per esempio per $n = 2$, essi possono venir facilmente ricavati per mezzo della (6), o possono anche venire scritti esplicitamente servendosi di certi polinomi, detti di Lommel, e delle loro derivate rispetto a ν .

In modo analogo a quello più sopra indicato, partendo invece dalla (4) - o, più semplicemente, derivando rispetto a ν la nota formula

$$H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-\nu\pi i} H_{\nu}^{(2)}(x)$$

e servendosi ancora della (6) applicata alla funzione $H_{\nu}^{(2)}$ - si trovano le formule

$$(8) \quad \dot{H}_0^{(2)}(x) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(x), \quad \dot{H}_1^{(2)}(x) = \frac{i\pi}{2} H_1^{(2)}(x) + \frac{1}{x} H_0^{(2)}(x)$$

da cui, fra l'altro, si deduce che

$$(9) \quad \dot{N}_0(x) = -\frac{\pi}{2} J_0(x), \quad \dot{N}_1(x) = -\frac{\pi}{2} J_1(x) + \frac{1}{x} N_0(x).$$

6. Le precedenti formule (3) e (4) forniscono (per $c = 1$) le due combinazioni lineari $\dot{\Phi}$ e $\dot{\Psi}$ delle derivate delle funzioni Φ e Ψ rispetto ai parametri, ma non queste singole derivate individualmente. Per ottenere tali valori individuali occorrerebbe conoscere qualche altra combinazione lineare delle derivate stesse, ciò che in qualche caso particolare è possibile. Per esempio dall'elementarissima formula

$$\Phi(a, a; x) = e^x,$$

derivando rispetto ad a si trae

$$(10) \quad \Phi_a(a, a; x) + \Phi_c(a, a; x) = 0,$$

ciò che, per $a = 1$, combinato con la (3), fornisce

$$(11) \quad \Phi_a(1, 1; x) = -\Phi_c(1, 1; x) = (C + \log x) e^x + \Psi(1, 1; x).$$

Questo è un non spregevole risultato relativo alla *funzione gamma incompleta modificata* ⁽⁴⁾.

$$\gamma^*(\alpha, x) = \frac{e^{-x}}{\Gamma(1+\alpha)} \Phi(1, 1; x) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Invero, considerato altresì che

$$\Psi(1, 1; x) = e^x \Gamma(0, x) = e^x (\text{Ein } x - C - \log x),$$

essendo l'*esponenziale integrale modificato* $\text{Ein } x$ definito dalla formula

$$\text{Ein } x = \int_0^x (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t};$$

la (11) mostra che

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \{ \Gamma(1+\alpha) \gamma^*(\alpha, x) \} \right]_{\alpha=0} = e^{-x} \Phi_e(1, 1; x),$$

cioè che

$$\left[\Gamma(1+\alpha) \frac{\partial \gamma^*}{\partial \alpha} + \Gamma(1+\alpha) \psi(1+\alpha) \gamma^*(\alpha, x) \right]_{\alpha=0} = -\text{Ein } x$$

donde, essendo $\psi(1) = -C$, segue ⁽⁵⁾

$$(12) \quad \left(\frac{\partial \gamma^*}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = C - \text{Ein } x.$$

Poichè $\gamma^*(\alpha, x)$ per $\alpha = 0$ si riduce alla costante 1, la (12) consente la determinazione approssimata di $\gamma^*(\alpha, x)$ per piccoli valori di α . Inoltre essa mostra che la superficie topografica rappresentante i valori di $\gamma^*(\alpha, x)$ per α e x reali, ha uno ed un solo *colle* sull'asse $\alpha = 0$, e precisamente nel punto $x = 0,6764$ circa, che è l'unica radice reale dell'equazione $\text{Ein } x = C$.

7. Un altro caso in cui si riesce a trovare una seconda relazione del genere della (10) è il caso $c = a + 1$ per la funzione Ψ . Invero, essendo

$$(13) \quad \Psi^*(a, a+1; x) = x^{-a},$$

si vede che è

$$(14) \quad \Psi_a(a, a+1; x) + \Psi_c(a, a+1; x) = -x^{-a} \log x,$$

donde, combinando con la (4) dopo aver posto $a = 0$, segue che

$$(15) \quad \Psi_a(0, 1; x) = -\log x, \quad \Psi_c(0, 1; x) = 0.$$

Un risultato più generale può ottenersi servendosi della nota formula di derivazione

$$\frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{c-a+n-1} \Psi^*(a, c; x)] = (-1)^n e^{-x} x^{c-a-1} \Psi^*(a-n, c; x)$$

(4) Per le notazioni relative alla funzione gamma incompleta e connesse vale una osservazione analoga a quella della nota (1).

(5) Questa formula, sotto forma leggermente diversa, trovasi per la prima volta (se non andiamo errati) senza dimostrazione, nella Memoria dell'A., *Sulla funzione gamma incompleta*. [« Annali di Matem. » (4), 31 (1950), 263-279].

che per $c = a + 1$, tenendo conto della (13), dà

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n-a}) = (-1)^n e^{-x} \Psi(a - n, a + 1; x)$$

e donde, derivando rispetto ad a , si deduce ulteriormente che

$$-\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n-a} \log x) = (-1)^n e^{-x} [\Psi_a(a - n, a + 1; x) + \Psi_c(a - n, a + 1; x)]$$

e, per $a = 0$, in particolare che

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n \log x) = (-1)^{n+1} e^{-x} [\Psi_a(-n, 1; x) + \Psi_c(-n, 1; x)].$$

Ma, d'altro lato, per la (4) in cui sia posto $a = -n$, si ha

$$\Psi_a(-n, 1; x) + 2 \Psi_c(-n, 1; x) = -\Psi(-n, 1; x) \log x = (-1)^{n+1} n! L_n(x) \log x,$$

dove $L_n(x) \equiv L_n^{(0)}(x)$ denota l' n -esimo polinomio di Laguerre con $\alpha = 0$; dunque è

$$(16) \quad \begin{cases} \Psi_a(-n, 1; x) = (-1)^n \left[2e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n \log x) + n! L_n(x) \log x \right] \\ \Psi_c(-n, 1; x) = (-1)^n \left[-e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n \log x) + n! L_n(x) \log x \right]. \end{cases}$$

Ricordando che

$$(17) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{\alpha+n}) = \frac{(-1)^n}{n!} \Psi(-n, \alpha + 1; x),$$

dalla seconda delle (16) si deduce l'elegante formula

$$(18) \quad \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} L_n^{(\alpha)}(x) \right]_{\alpha=0} = \frac{e^x}{n!} \left[\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n \log x) - \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n) \cdot \log x \right]$$

che, del resto, potrebbe anche più rapidamente dedursi derivando la (17) rispetto ad α .

8. La precedente formula, per quanto elegante, non sembra certo molto adatta pel calcolo della derivata rispetto ad α dei polinomi di Laguerre, sia pure nel caso $\alpha = 0$. Tale calcolo può però venire più facilmente eseguito per mezzo della più generale formula

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} L_{n-m}^{(\alpha)}(x)$$

che può facilmente dedursi dalla classica funzione generatrice dei polinomi di Laguerre che, derivando rispetto ad α , fornisce

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\partial}{\partial \alpha} L_n^{(\alpha)}(x) &= -(1-z)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right) \log(1-z) = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} z^h L_h^{(\alpha)}(x) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} L_{n-m}^{(\alpha)}(x). \end{aligned}$$

Anche la (19) è una di quelle formule che, per quanto quasi certamente non nuove, non è facile trovare nelle ordinarie opere di consultazione.

Geometria. — *Alcune applicazioni del calcolo esterno.* Nota (*)
del Corrisp. BENIAMINO SEGRE.

Il primo — recentemente apparso — dei volumi in cui verranno raccolte le lezioni che, a partire dal 1950-51, vengo svolgendo presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica ⁽¹⁾, mostra la grande agilità e fecondità dei metodi di Grassmann e Cartan, e dà fra l'altro nuove e svariate applicazioni del calcolo esterno nell'algebra, nella geometria proiettiva, nello studio degli invarianti integrali e delle funzioni analitiche e relative estensioni, nonché nelle teorie dei funzionali isogeni e dei funzionali coniugati secondo Volterra. Nella presente Nota espongo per sommi capi, con qualche complemento, taluna di dette applicazioni.

1. Il classico teorema che un determinante emisimmetrico di ordine pari $2m$:

$$(1) \quad A = |a_{ij}|_{i,j=1,2,\dots,2m} \quad (a_{ij} = -a_{ji}, \quad a_{ii} = 0)$$

risulta il *quadrato di una forma di grado m* nelle a_{ij} , si ottiene subito come segue, assieme all'espressione di tale forma, col riferirsi alla forma quadratica esterna

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2m} a_{ij} [\xi^i \xi^j].$$

Posto:

$$(\omega_2)^m = m! P \cdot [\xi^1 \xi^2 \dots \xi^{2m}],$$

il coefficiente P risulta una forma algebrica ordinaria di grado m nelle a_{ij} , definita da questa relazione, e si dimostra ch'essa è irriducibile (*F. D.*, n. 11). Poichè ovviamente l'equazione $A = 0$ *equivale* alla $P = 0$, così A non può differire che per un fattore numerico da P^2 . E si constata che è precisamente

$$A = P^2,$$

col verificare che quel coefficiente numerico vale 1 in un caso particolare opportunamente scelto.

2. Consideriamo una forma bilineare alternata in due serie di $2p$ variabili

$$(2) \quad f(x, y) = \sum_{r,s=1}^{2p} c_{rs} x_r y_s \quad (c_{rs} = -c_{sr}, \quad c_{rr} = 0),$$

(*) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) Ved. B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, vol. I (Roma, Docet, 1951). Questo volume verrà in seguito brevemente richiamato con la sigla *F. D.*

col determinante

$$(3) \quad C = |c_{rs}|_{r,s=1,2,\dots,2p} \neq 0.$$

Prese $2m (\leq 2p)$ serie di $2p$ variabili

$$a^i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_{2p}^i) \quad (i = 1, 2, \dots, 2m),$$

ed assunto

$$(4) \quad a_{ij} = f(a^i, a^j),$$

si voglia ora calcolare il relativo determinante (1). A tal uopo, detto C_{rs} il complemento algebrico di c_{rs} nel determinante (3), introduciamo la forma quadratica esterna

$$(5) \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{2p} C_{rs} [\xi^r \xi^s],$$

avente per associata l'aggiunta della (2) (*F. D.*, n. 7), e le $2m$ forme lineari

$$(6) \quad \tau^i = \sum_{r=1}^{2p} a_r^i \xi^r \quad (i = 1, 2, \dots, 2m).$$

Risulta allora manifestamente

$$(7) \quad [(\sigma_2)^{p-m} \tau^1 \tau^2 \dots \tau^{2m}] = (p-m)! Q \cdot [\xi^1 \xi^2 \dots \xi^{2p}],$$

ove Q denota una forma algebrica ordinaria, di grado $2m$ nelle a e di grado $(p-m)(2p-1)$ nelle c . Stabiliremo che *attualmente sussiste l'identità*:

$$(8) \quad A \cdot C^{2p-2m-1} = Q^2,$$

la quale risponde alla questione proposta.

Incominciamo con l'osservare che, in forza della (7), Q è una forma irriducibile nelle a , il cui annullarsi ha il seguente significato geometrico. Si interpretino $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2p}$ quali coordinate proiettive omogenee di punto in un S_{2p-1} , e si considerino ivi la polarità nulla σ definita dalla (5) (*F. D.*, n. 24), e gli iperpiani τ^i rappresentati uguagliando a zero le forme (6). Si vede allora (poggiando sul n. 10 di *F. D.*) che, nell'ipotesi che questi iperpiani siano indipendenti, e cioè che essi si seghino lungo un $S_{2p-2m-1}$, $Q = 0$ esprime la condizione affinchè risulti singolare la polarità nulla subordinata da σ su quell' $S_{2p-2m-1}$, ossia affinchè tale spazio incontri lo spazio S' polare di questo rispetto a σ .

Il polo dell'iperpiano τ^j ($j = 1, 2, \dots, 2m$) rispetto a σ è il punto t^j di coordinate

$$t_r^j = \sum_{s=1}^{2p} c_{rs} a_s^j \quad (r = 1, 2, \dots, 2p);$$

ed i vari punti x di S' hanno le coordinate

$$x_r = \sum_{j=1}^{2m} \lambda_j t_r^j \quad (r = 1, 2, \dots, 2p),$$

al variare dei $2m$ parametri omogenei λ . Affinchè un punto x siffatto appartenga all'iperpiano τ^i , occorre e basta che si abbia $\sum_{r=1}^{2p} a_r^i x_r = 0$, e cioè:

$$\sum_{j=1}^{2m} \lambda_j f(a^i, a^j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2m).$$

Queste equazioni risultano dunque compatibili - per valori non tutti nulli delle λ - se, e soltanto se, i $2m$ iperpiani τ^i sono fra loro dipendenti [nel qual caso si ha ovviamente $Q = 0$ in forza della (7)], oppure se, i τ^i essendo indipendenti fra loro, lo spazio $S_{2p-2m-1}$ è incidente al relativo spazio polare S' . Pertanto, ove si definisca A mediante le (1), (2), (4), l'equazione $A = 0$ equivale alla $Q = 0$. Badando ai gradi delle forme A e Q nelle a , c , ed alla irriducibilità della Q come forma nelle a , se ne trae un'identità del tipo

$$Q^2 = \gamma A,$$

ove γ denota una forma nelle sole c , di grado

$$2p(2p - 2m - 1),$$

la quale non può annullarsi fintantochè vale la (3). Poichè C è il quadrato di una forma irriducibile di grado p nelle c (n. 1), così γ non può differire da $C^{2p-2m-1}$ che per un fattore numerico. Ne consegue quindi la (8), dopo aver valutato tale fattore in un caso particolare numerico opportunamente scelto.

3. Una forma esterna ω_3 di grado 3 e rango 6, in 6 variabili $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^6$, può generalmente ridursi, mediante una sostituzione lineare (a coefficienti complessi) sulle ξ , alla forma canonica

$$[\xi^1 \xi^2 \xi^3] + [\xi^4 \xi^5 \xi^6];$$

tuttavia, in casi particolari tale riduzione non è più possibile, e si ha invece la forma canonica:

$$[\xi^1 \xi^5 \xi^6] + [\xi^2 \xi^6 \xi^4] + [\xi^3 \xi^4 \xi^5].$$

Ciò corrisponde, mediante una semplice interpretazione geometrica, al fatto che un complesso lineare di piani di S_5 in generale definisce intrinsecamente due piani distinti, che C. Segre ha chiamato i *cardini* del complesso, i quali possono però venir a coincidere in casi speciali.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè ω_3 ammetta la *seconda delle due forme canoniche indicate*, e cioè definisca un complesso lineare coi due *cardini coincidenti*, è che risulti

$$(9) \quad [(\omega_3 \sigma_2) \omega_3] \omega_3 = 0,$$

ove si è posto

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^6 a_i \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi^i},$$

le a essendo 6 costanti arbitrarie, e le parentesi quadre o tonde racchiudendo rispettivamente prodotti progressivi o regressivi. La (9) compendia formal-

mente 36 equazioni di 4° grado nei coefficienti della ω_3 , le quali si riducono però sostanzialmente ad una sola di esse. Su ciò, e per indicazioni storiche e bibliografiche sull'argomento, cfr. *F. D.*, n. 30.

4. La teoria degli invarianti integrali può venir semplificata e completata, con l'introduzione delle *forme principali* e dei *prodotti regressivi*.

Dato un operatore differenziale lineare

$$U = \sum_{i=1}^n u_i(x^1, x^2, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

e posto per abbreviare

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x^i},$$

si dirà che una forma differenziale esterna

$$\sigma_r = \sigma_r(x^1, \dots, x^n; dx^1, \dots, dx^n)$$

è principale per la trasformazione infinitesimale associata ad U , se risulta

$$U(\sigma_r) = \lambda \sigma_r.$$

Si vede allora (*F. D.*, n. 70) che il prodotto di un moltiplicatore per una forma principale è una forma invariante; e, viceversa, il quoziente di una forma invariante per un moltiplicatore è una forma principale.

Si ha inoltre che la totalità delle forme principali di un operatore U costituisce un insieme chiuso di fronte all'operazione di prodotto regressivo. Ciò conduce a risultati comprendenti, come casi particolari, teoremi ben noti di Poincaré e Goursat (*F. D.*, n. 73).

5. Il sistema canonico

$$\frac{dx^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^{p+i}}, \quad \frac{dx^{p+i}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

definito dalla funzione di Hamilton

$$H = H(x^1, x^2, \dots, x^{2p}, t),$$

gode della proprietà caratteristica (*F. D.*, n. 75) di ammettere - nello spazio delle variabili x^1, x^2, \dots, x^n, t - l'invariante integrale assoluto e completo $\int \omega_2$, ove

$$(10) \quad \omega_2 = [dx^1 dx^{p+1}] + [dx^2 dx^{p+2}] + \dots + [dx^p dx^{p+p}] + [dt dH].$$

Ne consegue che, se $f = f_1, f_2, \dots, f_{2k}$ (ove $k \leq p$) sono $2k$ integrali dell'equazione a derivate parziali

$$(11) \quad \frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{i=1}^p \frac{\partial H}{\partial x^{p+i}} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^{p+i}} = 0,$$

anche la forma differenziale esterna

$$(12) \quad \Omega_{2p} = [(\omega_a)^{p-k} df_1 df_2 \dots df_{2k}]$$

è l'integrando di un invariante integrale assoluto, ossia ammette la trasformazione infinitesima definita dall'operatore

$$(13) \quad V = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^p \frac{\partial H}{\partial x^{p+i}} dx^i + \sum_{i=1}^p \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^{p+i}.$$

D'altro canto, le (10), (12) forniscono

$$(14) \quad \Omega_{2p} = (p-k)! (f_1, f_2, \dots, f_{2k}) \cdot [dx^1 dx^{p+1} \dots dx^p dx^{2p}] + [dt \Theta_{2p-1}],$$

ove, per abbreviare, si è posto

$$(15) \quad (f_1, f_2, \dots, f_{2k}) = \sum_{(i)} \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_{2k})}{\partial (x^{i_1}, x^{p+i_1}, \dots, x^{i_k}, x^{p+i_k})},$$

la somma essendo estesa alle combinazioni $(i) = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ dei numeri $1, 2, \dots, p$ a k a k , e dove Θ_{2p-1} denota una forma differenziale esterna di grado $2p-1$, che non occorre precisare. Dalle (13), (14) si trae

$$V(\Omega_{2p}) = (p-k)! V((f_1, f_2, \dots, f_{2k})) \cdot [dx^1 dx^{p+1} \dots dx^p dx^{2p}] + [dt \Theta'_{2p-1}],$$

ove Θ'_{2p-1} designa una nuova forma di grado $2p-1$, sicchè risulta:

$$V((f_1, f_2, \dots, f_{2k})) = 0.$$

Pertanto:

Se f_1, f_2, \dots, f_{2k} sono integrali di un sistema canonico, tale è altresì la parentesi $(f_1, f_2, \dots, f_{2k})$, definita dalla (15).

Questo risultato estende un classico teorema di Poisson⁽²⁾, a cui precisamente si riduce per $k=1$. Esso tuttavia, ai fini dell'integrazione dei sistemi canonici, non fornisce per $k>1$ nulla più del teorema di Poisson; infatti, a norma del n. 2, sappiamo che la parentesi generalizzata (15) - elevata a quadrato - uguaglia il determinante emisimmetrico d'ordine $2k$ avente per elementi le parentesi di Poisson delle f_1, f_2, \dots, f_{2k} a due a due (su ciò ved. anche il lemma a p. 366 di F. D.).

6. Le equazioni di Maxwell reggenti il campo elettromagnetico nel vuoto, in assenza di cariche elettriche, possono venir interpretate geometricamente in modo elegante come segue.

Introdotte nello spazio coordinate cartesiane ortogonali (x^1, x^2, x^3) , e detti t il tempo e c la velocità della luce, si rappresentino i punti del cronotopo col biquaternione

$$(16) \quad x = x^0 u_0 + x^1 u_1 + x^2 u_2 + x^3 u_3,$$

(2) Cfr. S. D. POISSON, *Sur la Variation des Constantes arbitraires dans les questions de Mécanique*, « Journ. de L'Ec. Polyt. », 8 (1809), 266-344. Dimostrazioni di tale teorema, di altri tipi, trovansi per esempio nella Nota VII di J. BERTRAND in appendice alla 3ª ed. (1853) della *Mécanique Analytique* di Lagrange (ved. LAGRANGE, *Coeuvres*, t. XI (1888), 484-491), in E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, 4ª ed. (1937), 320, ed in T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, t. II, parte 2ª (1927), 333-336.

ove si è posto

$$x^0 = ict \quad (i = \sqrt{-1}),$$

e le unità u soddisfano alle ben note relazioni:

$$u_0^2 = u_0, \quad u_0 u_l = u_l u_0 = u_l, \quad u_l^2 = -u_0 \quad (l = 1, 2, 3),$$

$$u_2 u_3 = -u_3 u_2 = u_1, \quad u_3 u_1 = -u_1 u_3 = u_2, \quad u_1 u_2 = -u_2 u_1 = u_3.$$

Se $E(e_1, e_2, e_3)$ ed $H(h_1, h_2, h_3)$ sono rispettivamente i vettori elettrico e magnetico, definiti nel cronotopo (ossia come funzioni di x), e poniamo

$$(17) \quad \begin{cases} f(x) = (h_1 - e_1 i) u_1 + (h_2 - e_2 i) u_2 + (h_3 - e_3 i) u_3, \\ \bar{f}(x) = (h_1 + e_1 i) u_1 + (h_2 + e_2 i) u_2 + (h_3 + e_3 i) u_3, \end{cases}$$

$$\omega_3 = [dx^1 dx^2 dx^3] - [dx^0 dx^2 dx^3] + [dx^0 dx^1 dx^3] - [dx^0 dx^1 dx^2],$$

le equazioni di Maxwell esprimono (*F. D.*, n. 91) le condizioni necessarie e sufficienti affinché *risulti chiusa tanto la forma differenziale esterna* $[f(x) \omega_3]$ *che la* $[\omega_3 \bar{f}(x)]$; o, ancora, affinché i *biquaternioni* f ed \bar{f} , *forniti dalle* (17), *risultino funzioni monogene - rispettivamente a sinistra ed a destra - del biquaternion* x *dato dalla* (16).

Cosmogonia. — *Sulla espansione dell'Universo.* Nota II ^(*) del Corrisp. FRANCESCO ZAGAR.

Da quanto è noto fino ad oggi sulla distribuzione spaziale delle nebulose extragalattiche, si può ammettere per uno studio generale sulle condizioni dinamiche una distribuzione uniforme ⁽¹⁾; tutte le cosmologie sono del resto più o meno basate su questo assioma o su postulati equivalenti. Ammetteremo inoltre che l'insieme di tutte le galassie sia limitato e di forma sferica.

1. Consideriamo in queste condizioni ogni sistema soggetto ad una forza repulsiva proveniente dagli altri sistemi simili e (per due di essi) inversamente proporzionale al quadrato della distanza, come avviene per esempio per forze elettromagnetiche o per la pressione di radiazione, sulla quale ritorneremo più avanti. È facile vedere allora che la risultante di tutte le repulsioni sopra un determinato sistema è proporzionale alla distanza di questo dal centro del gruppo. Infatti, posto per la forza agente fra due corpi alla distanza r

$$(1) \quad F = + \frac{k^2 \mu_1 \mu_2}{r^2},$$

(*) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) O. HECKMANN, *Theorien der Kosmologie*. Fortschritte der Astronomie n. 2. Springer, Berlin 1942.

H. SIEDENTOPF, *Grundriss der Astrophysik*. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft Stuttgart 1950.

con h^2 quantità positiva dipendente dalle unità di misura e μ_1, μ_2 quantità dipendenti dalla natura della forza e dei corpi che ne sono sollecitati, identificando per semplicità i singoli sistemi galattici con punti materiali, sia P la posizione di uno particolare di essi, alla distanza r dal centro dell'insieme e col proprio μ unitario; in un sistema di assi ortogonali coll'origine nel detto centro la forza esercitata da un generico punto Q (x_0, y_0, z_0) su P (x, y, z) ha allora le componenti

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

dove si ha in questo caso per la (1)

$$(2) \quad V = - \frac{h^2 \mu}{\Delta},$$

essendo Δ la distanza tra P e Q.

Facendo passare l'asse z per P e introdotte coordinate polari, essendo ρ la distanza di Q dall'origine, ϕ la sua latitudine sul piano xy e ϑ la longitudine intorno a z , si ha pure

$$(2') \quad V = - \frac{h^2 \mu}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2 r \rho \sin \phi}}.$$

Per avere la risultante dell'azione di tutti i punti della sfera su P, si immagina la materia distribuita omogeneamente in tutto lo spazio e si integra rispetto a ϑ , ϕ e ρ . È evidente che per ragioni di simmetria la risultante sarà diretta radialmente, e indicando con σ la densità spaziale della quantità μ , densità che per le ipotesi premesse potremo supporre uniforme e quindi indipendente dalle variabili di integrazione, il potenziale risulta

$$V = - h^2 \sigma \int \frac{ds}{\Delta},$$

coll'integrale esteso a tutto il volume della sfera. L'integrazione rispetto a ϑ tra 0 e 2π è immediata, cosicchè, indicando ancora con R il raggio dell'insieme, segue

$$V = - 2 \pi h^2 \sigma \int_0^R \rho d\rho \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\rho \cos \phi \cdot d\phi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2 r \rho \sin \phi}} = + \frac{\pi h^2 \sigma}{R} \int_0^R \left\{ \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2 r \rho \sin \phi} \right\}_{-\pi/2}^{+\pi/2} \rho d\rho,$$

e scindendo quest'ultimo integrale, per la presenza della radice, in uno tra 0 ed r , e uno tra r ed R, si ha subito

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 \sigma r^2 - \pi h^2 \sigma R,$$

da cui appunto per la accelerazione risultante

$$(3) \quad a = + \lambda^2 r,$$

dove λ^2 contiene il fattore σ . L'accelerazione (repulsiva) cui è soggetta ogni galassia è dunque in ogni istante proporzionale alla distanza dal centro, e il fattore di proporzionalità - uguale in ogni istante per tutte le galassie - è costante o variabile col tempo come la densità σ .

2. In base alla (3), trattandosi di moto piano, abbiamo le equazioni seguenti per il moto di P

$$(4) \quad \ddot{x} = \lambda^2 x, \quad \ddot{y} = \lambda^2 y.$$

La integrazione di queste equazioni esige la conoscenza del fattore σ contenuto in λ^2 , e noi considereremo qui due casi per i nostri scopi.

Supponiamo in primo luogo che σ sia costante nel tempo, allora l'integrale generale risulta notoriamente

$$(5) \quad x = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t}, \quad y = c_3 e^{\lambda t} + c_4 e^{-\lambda t},$$

ed è evidente che, qualunque siano le condizioni iniziali, da un certo tempo in poi il secondo termine diventa insignificante rispetto al primo, e il punto si allontana indefinitamente dal centro. Non solo, ma quando il primo termine diventa preponderante, si ha con grande approssimazione

$$x = c_1 e^{\lambda t}, \quad \dot{x} = \lambda c_1 e^{\lambda t}, \quad y = c_3 e^{\lambda t}, \quad \dot{y} = \lambda c_3 e^{\lambda t},$$

da cui

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y} = \lambda,$$

cioè la velocità è tutta radiale, ed inoltre

$$x^2 + y^2 = r^2 = c e^{2\lambda t}, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2 = \lambda^2 c e^{2\lambda t} = \lambda^2 r^2,$$

ossia infine

$$(6) \quad v = \lambda r,$$

vale a dire: *La velocità di qualunque membro dell'insieme è radiale e cresce col tempo proporzionalmente alla sua distanza.* Ed essendo il rapporto λ tra velocità e distanza, per quanto si è detto, lo stesso per tutte le galassie, si ha una *espansione generale ed uniforme* dell'insieme, nel senso che non solo dal centro, ma da qualunque punto di riferimento si osserveranno in qualunque punto dello spazio velocità di fuga proporzionali alla distanza. Nel caso particolare che inizialmente le singole galassie dell'insieme considerato siano in quiete rispetto al centro si ha facilmente dalle (5) $c_1 = c_2$, $c_3 = c_4$, da cui risulta che la (6) e quindi l'espansione uniforme è rigorosamente verificata sin dall'inizio del movimento.

Supponiamo in secondo luogo che σ non sia costante, ma funzione qualunque del tempo, rimanendo però l'insieme sempre omogeneo, allora nelle equazioni (4) il coefficiente λ^2 è una funzione positiva qualunque del tempo t . Per il moto vale ancora la legge delle aree

$$(7) \quad x\dot{y} - \dot{x}y = r^2 \dot{\vartheta} = \alpha,$$

dalla quale si vede già che quanto più grande è la distanza, tanto minore è $\dot{\vartheta}$, quindi tanto più il moto diventa radiale. Inoltre, posto nelle (4),

$$u_1 = \frac{\dot{x}}{x}, \quad u_2 = \frac{\dot{y}}{y},$$

sarà per le stesse (4) e per la (7), escludendo naturalmente ch  possa aversi in un istante $x = y = 0$, perch  allora il moto   gi  radiale,

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 + u_1^2 &= \lambda^2, & u_2 - u_1 &= \frac{\alpha}{xy}, \\ \dot{u}_2 + u_2^2 &= \lambda^2, \\ (8) \quad \begin{cases} \dot{x} = u_1 x \\ \dot{y} = u_1 y + \frac{\alpha}{x} \end{cases}, & \text{oppure} & \begin{cases} \dot{x} = u_2 x - \frac{\alpha}{y} \\ \dot{y} = u_2 y. \end{cases} \end{aligned}$$

Osserviamo anzitutto che le due funzioni u_1, u_2 per t sufficientemente grande sono sempre positive; infatti, si ha per una di esse secondo le precedenti, indicando con λ_0 il valore minimo (positivo) di λ^2 ,

$$\dot{u} + u^2 > \lambda_0^2, \quad du > (\lambda_0^2 - u^2) dt,$$

e da questa, per $u < \lambda_0$ (se   $u > \lambda_0$, la u   gi  positiva)

$$\frac{du}{\lambda_0^2 - u^2} > dt,$$

e, integrando e riducendo,

$$u > \frac{e^{2\lambda_0 t} - c}{e^{2\lambda_0 t} + c} \lambda_0,$$

dalla quale risulta appunto che per t sufficientemente grande, qualunque siano le condizioni iniziali (dalle quali dipende la costante c), le u sono positive (basta allo scopo che sia $e^{2\lambda_0 t} > c$). Ci  significa intanto che \dot{x} ha il segno di x , \dot{y} ha il segno di y , dunque la componente radiale   positiva e tutti i movimenti sono diretti verso l'esterno. Inoltre si ha dalle (8) che per distanze sufficientemente grandi (grande x o y), essendo il termine α/x o α/y trascurabile di fronte all'altro nel secondo membro, non solo la velocit  diventa sempre pi  radiale e positiva, ma in un determinato istante, avendo tutti i corpi lo stesso valore delle u , tutte le velocit  radiali sono proporzionali alla rispettiva distanza. Si ha infatti con grande approssimazione

$$(9) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = u(x^2 + y^2), \quad v = ur.$$

Anche qui si ha per il caso particolare delle singole galassie inizialmente in quiete, essendo allora nelle precedenti $\alpha = 0$, $u_1 = u_2$, $\dot{x}/x = \dot{y}/y$, che la relazione (9)   soddisfatta sin dall'inizio del movimento.

L'unica differenza dal caso precedente sta nel fatto che per la densit  σ costante il fattore di proporzionalit  λ   costante nel tempo e quindi non solo in un determinato momento le velocit  osservate sono proporzionali alle distanze, ma anche coll'andar del tempo uno stesso elemento si muove con velocit  crescente proporzionalmente alla distanza; mentre per la densit  variabile il fattore u   variabile e la predetta proporzionalit  vale soltanto nello spazio e non nel tempo.

3. Da quanto precede, risulta evidente che una forza repulsiva del tipo (1), isolatamente considerata, sarebbe senz'altro capace di spiegare il

fenomeno della espansione delle galassie, qualunque fossero le condizioni iniziali, e tanto per una densità σ costante nello spazio e nel tempo, quanto per una densità costante solo nello spazio; nel primo caso infatti la espansione è uniforme nel tempo, cioè la costante α della recessione è una costante anche nel tempo, nel secondo caso invece è una costante soltanto spaziale; le osservazioni, evidentemente, non possono decidere per uno o l'altro dei due casi. Se quindi noi ammettiamo *a priori* una forza del tipo (1) ed escludiamo l'attrazione universale, oppure ammettiamo senza discussione che negli spazi intergalattici quella prevalga su questa, il problema della espansione dell'Universo appare spiegato.

Volendo però arrivare ad una conclusione più convincente e motivata per poter accettare una spiegazione di questo tipo per l'espansione dell'Universo, occorre esaminare: 1° se esiste una plausibile forza del tipo (1) tra le galassie, e 2° quale sia la relazione tra questa e l'attrazione universale, che non possiamo ignorare.

Ora alla prima domanda è facile rispondere affermativamente; *la pressione di radiazione* è notoriamente una forza che agisce tra i corpi celesti con la legge (1), che è dimostrata sperimentalmente e che sotto certe condizioni può diventare alquanto maggiore della stessa attrazione newtoniana. Le quantità μ sono allora dipendenti dalla intensità delle radiazioni emanate e dalle superfici colpite, eventualmente anche da altre condizioni che non occorre indagare, e se per semplicità supponiamo tutte le galassie uguali rispetto alle predette condizioni, la densità σ considerata in precedenza viene ad essere strettamente legata alla densità di radiazione nello spazio intergalattico, dalla quale essenzialmente dipende la pressione di radiazione.

Per quanto riguarda invece la seconda domanda, occorre dapprima ricordare che, essendo l'attrazione universale della forma (1) ma col segno opposto, la risultante delle due forze è ancora del tipo (1), col segno negativo o positivo, secondo che prevale tra due astri il coefficiente $k^2 m_1 m_2$ oppure il coefficiente $h^2 \mu_1 \mu_2$; mentre per l'azione dell'insieme su una galassia il rapporto dell'intensità tra attrazione e repulsione è dato dal comportamento delle due densità, quella materiale ρ e quella di radiazione σ , che entrano nel fattore λ^2 delle (3) e (4).

Ora, si possono invocare due fenomeni importanti che agiscono rispettivamente il primo col tempo e il secondo nello spazio, pienamente atti a condurre col tempo alla prevalenza della forza repulsiva su quella attrattiva nell'Universo delle galassie.

a) Il primo è dato dalla diversità della legge con cui diminuiscono le due densità spaziali anzidette col tempo. Mentre infatti per effetto della espansione la densità materiale ρ dell'insieme diminuisce in ragione inversa del cubo della distanza, la densità della radiazione diminuisce sicuramente in misura minore, dato che la continua produzione di nuova energia raggiante nell'Universo può – a seconda del comportamento della densità materiale – aumentare la densità di radiazione, mantenerla costante [come approssimati-

vamente si ammette per l'Universo ⁽²⁾], oppure infine compensare solo in parte la rarefazione materiale. Perciò, mentre l'attrazione esercitata su una galassia qualunque, in un insieme che si espande anche debolmente, diminuisce col quadrato della distanza dal centro, la pressione di radiazione - che nel caso ideale di una densità di radiazione costante aumenta proporzionalmente alla distanza - diminuisce in ragione molto minore; ciò equivale appunto ad affermare che la pressione di radiazione guadagna col tempo (e, per l'espansione, con la distanza) rispetto all'attrazione, e quindi ad una certa distanza deve eguagliarla, per poi superarla.

Per il caso schematico ideale ora accennato, di un insieme che si espande, mentre la densità σ rimane costante, per cui ogni galassia si muove sotto l'azione di due forze radiali, una attrattiva che diminuisce col quadrato della distanza, e l'altra repulsiva che aumenta in ragione diretta della distanza, è facile vedere che l'insieme deve continuare ad espandersi con velocità crescenti ⁽³⁾.

b) Il secondo fenomeno che si può invocare in questo problema in aggiunta al precedente è l'assorbimento della gravità. Benchè non si abbiano da esperienze dirette sulla Terra o da fenomeni astronomici dimostrazioni sperimentali dell'esistenza di un assorbimento dell'attrazione newtoniana, la presenza indubbia di materia diffusa in tutto lo spazio rende tuttavia plausibile un assorbimento, che può essere insignificante entro gli spazi accessibili alle predette esperienze, ma che a grandi distanze, dell'ordine di quelle intergalattiche, può avere un effetto anche molto sensibile. Il fenomeno dell'assorbimento può ammettersi per l'analogia a quanto avviene per l'attrazione magnetica, che presenta lo stesso fenomeno molto spiccato, e comunque, è una ipotesi certamente meno rischiosa di quella della variabilità della costante k^2 dell'attrazione universale, più volte ammessa nelle considerazioni cosmologiche ⁽⁴⁾. Della materia diffusa intergalattica si hanno pochi dati, ma si può affermare che essa è per la maggior parte di natura gassosa, quindi tale da non influire sulla propagazione dell'energia raggiante, o almeno non nella misura in cui influisce sull'attrazione.

Le considerazioni che precedono riguardano un insieme già in espansione, sia pure lieve o agli inizi, e rimane ancora da dare, per completare il meccanismo, una spiegazione per arrivare al primo moto espansionistico. Comunque, notiamo già qui che, ammesse le considerazioni precedenti, il problema si libera dalla fantastica ipotesi della nascita catastrofica dell'Universo, con quella immane esplosione che dovrebbe aver impartito nell'istante iniziale alle singole nebulose delle velocità fin più alte di quella della luce; e, anche se non si riuscisse a completare il meccanismo, l'aver eliminato quell'atto in-

(2) H. SIEDENTOPF, loc. cit., pp. 286-87.

(3) F. ZAGAR, *Su un caso del problema dei più corpi e sue conseguenze astronomiche*. « Rendiconti Istituto Lombardo di Scienze », 1952. « Contributi Osservatorio astronomico di Milano-Merate », N. S. Num. 37.

(4) G. J. WHITROW and D. G. RANDALL, *Expanding world-models characterized by a dimensionless invariant*. « M. N. », vol. III, n. 5 (1951).

verosimile dal problema, e ridotto lo stato passato dell'Universo ad una dilatazione moderata in cui le velocità non occorre abbiano nulla di anormale, sarebbe già un merito indiscusso.

Ma si può fare anche un ulteriore passo e completare il modello con la fase preespansionistica. Basta all'uopo immaginare che allo stato primordiale la materia sia stata tutta in forma diffusa e costituita da particelle microscopiche. Tutte le teorie ammettono che la materia attualmente condensata in stelle, ammassi e galassie sia il risultato di un processo di concentrazione graduale di materia originariamente diffusa, e perciò la supposizione ora detta non ha nulla di azzardato. Ma si sa che in un simile insieme nebulare o pulviscolare la pressione di radiazione si manifesta con azione ben preponderante sull'attrazione newtoniana; in questo stato della materia la prevalenza della prima forza è assicurata sin dall'inizio senza supporre altre condizioni particolari. Perciò si può ammettere che la prima fase della dilatazione sia stata causata finchè la materia primordiale dell'Universo era ancora tutta diffusa.

Una conseguenza di importanza cosmologica notevole risulta dal modello esposto: la velocità della luce è una velocità limite nell'Universo. Infatti, essendo le galassie sollecitate dalla pressione di radiazione, è evidente che nessuna potrà muoversi con velocità maggiore di questa, perchè dal momento che una galassia ha raggiunto tale velocità, la radiazione non ha più alcun effetto su essa.

Naturalmente non occorre supporre che per l'avvenire le condizioni attuali dell'Universo continuino a sussistere indefinitamente, e quindi non è il caso di fare previsioni sullo stato futuro. È sufficiente aver dato qui una possibile spiegazione dello stato attuale e delle circostanze che ne sono state e ne sono la causa.

Fisica. — *Nuove considerazioni cinematiche sulla relatività speciale.* Nota (*) del Socio QUIRINO MAJORANA (**).

La insostenibilità della teoria speciale della relatività appare in modo assai chiaro ed evidente quando, tenendo conto del suo 2° postulato, si confrontano sistemi costituiti ciascuno, da sorgente luminosa con osservatore, in reciproco movimento, fra i punti dei quali sistemi avvengano particolari coincidenze istantanee, spazio-temporali. Come esempio di ciò, consideriamo i sistemi costituiti da due regoli OS ed $O'S'$, di lunghezze diverse, $OS = l$, $O'S' = l'$, con $l' > l$. Essi si muovono scorrendo su due rette vicinissime, parallele, R, R' , con la velocità uniforme, reciproca v ; talchè, in un certo istante, S ed S' vanno a coincidere. Ammettiamo che in tale istante, S e S' man-

(*) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1952.

(**) Si ricorda che a termini dell'art. 25 del Regolamento dell'Accademia gli Autori sono responsabili della forma e del contenuto dei lavori presentati per la pubblicazione nei Rendiconti,

dino ciascuno un segnale luminoso. I due segnali viaggiano così sulle due rette e raggiungono rispettivamente, in due istanti, diversi o no, entrambi gli osservatori O ed O'. Ora, per la relatività, tanto O, quanto O' giudicano che i due segnali luminosi di S ed S' viaggino, per ciascuno di essi, con la velocità c . Tali osservatori ritengono perciò che quei due segnali vengano a costituire fasci istantanei di particelle energetiche o di onde, o di fotoni, coerenti, cioè riuniti, per quanto la loro provenienza sia promiscua (cioè da due sorgenti coincidenti, reciprocamente in moto). Si appalesa già da ciò, un certo senso di incomprensione, da cui, per ora, vogliamo prescindere. Consideriamo, dapprima, l'osservatore O. Per opportuno aggiustaggio delle lun-

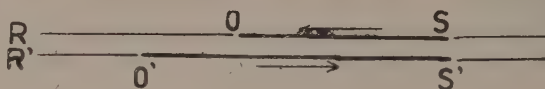


Fig. 1.

ghezze l ed l' e della loro velocità reciproca v , possiamo ottenere che, quando i segnali di S ed S' arrivano su O, anche O' venga a coincidere con O. Se ciò è verificato, si deve ammettere che, mentre la luce va da S-S' ad O-O', O' si è portato su O. Si ha dunque, per O, classicamente:

$$(1) \quad l/c = (l' - l)/v \quad ; \quad \text{dove: } l' = l(1 + v/c).$$

Se scegliamo i punti O, O' come origini delle coordinate x, t , per OS, e delle x', t' , per O'S', ne viene, per la trasformazione di Lorentz (T. L.), che i segnali di S ed S' sono stati mandati rispettivamente, per O ed O', dai punti restanti:

$$(2) \quad x = l \quad ; \quad t = -l/c \quad ; \quad x' = \beta l(1 + v/c) \quad , \quad t' = -\beta(l/c)(1 + v/c),$$

con $\beta = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Poichè i segnali arrivano su O ed O' quando questi coincidono ed hanno il tempo zero, si deve ammettere che il fatto spazio-temporale della trasmissione unica, istantanea, da S od S', verso O ed O', è giudicato, da questi osservatori, avvenire in due tempi t e t' , che, a meno di termini in $(v/c)^2$, differiscono per un termine di 1° ordine, cioè in v/c . Tale differenza è ben superiore a quella ammessa solitamente dalla relatività. Così, per esempio, se $v = 30$ km/sec, si sa che, le variazioni metriche spaziali e temporali, di un sistema rispetto all'altro in moto, sono, relativisticamente, di 5 miliardesimi, mentre quella ora rilevata sarebbe ben più importante, e cioè di un diecimillesimo.

Consideriamo ora l'osservatore O'. Se l'aggiustaggio di l, l' e v è fatto come nel caso precedente, poichè per O' la velocità della luce su l' è ancora c , si ha, invece delle (1):

$$(3) \quad l'/c = (l' - l)/v \quad ; \quad \text{dove: } l = l'(1 - v/c);$$

la quale ci dice che il rapporto delle lunghezze l/l' differisce per termini di ordine superiore a v/c , da quello della (1). Anche ora, consideriamo le coordinate x', t' , per $O'S'$ ed x, t , per OS . Osservando che qui la velocità v ha segno negativo, tali coordinate sono così espresse:

$$(4) \quad x' = l' \quad , \quad t' = -l'/c \quad ; \quad x = \beta l' (1 - v/c) \quad ; \quad t = -\beta (l'/c) (1 - v/c).$$

Si vede dunque che in ogni caso, salvo termini di 2° ordine, il tempo impiegato dalla luce per portarsi da $S \rightarrow S'$ a $O \rightarrow O'$, è per O' più lungo (per termine di 1° ordine) di quanto giudica l'osservatore O . Ciò è vero qualunque dei due sistemi, sia considerato, rispetto all'altro, in quiete od in riposo.

In contrasto con simile conclusione, si rileva che a norma delle comuni ammissioni relativistiche, la metrica temporale (o spaziale) di un sistema in moto, è sempre alquanto ridotta rispetto a quella di un sistema in quiete; e come si è detto, tale riduzione è del 2° ordine. Ma, per la simmetria dei due sistemi, si è dovuto finire per ammettere che tali variazioni della metrica temporale (o spaziale) siano solo apparenti, perchè è indifferente considerare in moto od in quiete, l'uno o l'altro dei due sistemi (per vero, Einstein non aveva riconosciuto ciò, per lo meno, quando scrisse la sua prima Memoria).

Nel caso ora considerato, si scorge, invece, che la variazione della metrica temporale di uno stesso fenomeno (trasmissione di luce fra due punti, ben determinati, per reciproca coincidenza dei due sistemi, per entrambi i punti) è del 1° ordine, e sempre dello stesso segno, tanto che si consideri in moto od in quiete uno o l'altro dei due sistemi.

Vi ha dunque una profonda differenza tra le ammissioni relativistiche comuni, e quelle che ora siamo costretti a fare. Per il sistema più lungo $O'S'$, in ogni caso, il tempo impiegato dalla luce a percorrerlo, è maggiore di quello corrispondente al sistema più corto OS . A parte differenze di 2° ordine, tali tempi risultano proporzionali alle lunghezze $O'S'$ ed OS . Ciò rappresenta, per vero, una assoluta necessità logica e matematica, dalla quale, nemmeno la relatività di Einstein può prescindere. Infatti, dovendosi ammettere che ciascun osservatore, O ed O' , giudica che la luce si muove per lui, sempre con la velocità c , è giusto che il tempo impiegato da essa a percorrere $O'S'$ sia più lungo di quello per OS .

Ma il nonsenso di tale ammissione si ha, osservando che ciascun osservatore, O , O' , ammette che entrambe le quantità di energia raggiante, partenti da S ed S' , viaggino con la stessa velocità c . Se si considera un fotone partito nell'istante di coincidenza $S-S'$, da S , si può ammettere ragionevolmente che esso proceda, per O , con la velocità c . Ma è inconcepibile che faccia lo stesso per l'osservatore O' , che ha la velocità v rispetto ad O . Analogamente, è inammissibile che i fotoni di S' , viaggianti per S' con la velocità c , la abbiano anche per S .

Ammissioni di tal genere, oltre al non essere logiche, in quanto uno stesso fotone dovrebbe avere la stessa velocità, ad un tempo, rispetto a due punti

in moto reciproco, costituisce un'aperta violazione del principio di causalità. Infatti, ciascun osservatore verrebbe a non tener conto della causa che ha dato origine al moto del fotone: a tale moto corrisponde invece una velocità ben determinata, impressa dalla sorgente che lo ha emesso. Si vede dunque come la relatività speciale, e per essa il suo 2° postulato, si basi su di una ipotesi che, fisicamente, è grossolanamente errata, e che deve essere risolutamente scartata. Tutta la teoria in parola, perde così ogni carattere di attendibilità.

Forse mai, con tanta evidenza come ora, era stata riconosciuta la inammissibilità di quel postulato. Comunque, già dalla comparsa della relatività, sorsero non pochi oppositori a tale teoria. Direi che da ciò è nato un contrasto, tuttora in atto, che non ha riscontro alcuno, nella storia della scienza, sia per la diversità grande di opinioni, sia per l'epoca ormai lontana dalla quale esso dura. È opportuno ricordare certe qualifiche, che alla relatività venivano date da autorevoli fisici, come: *mathematische Fiktion*, od *überflüssig und falsch*, od anche *drolliger Witz* ⁽¹⁾. Dopo quanto ho esposto, si deve dar maggior valore a giudizi di tal genere.

Oggi, l'opposizione alla relatività, anche in seguito alle apparenti verifiche sperimentali o d'osservazione che essa ha ricevuto, si è alquanto assopita. Ma, come ho detto, ritengo che mai siano stati formulati argomenti contro di essa, come quelli, per vero assai semplici, di questa Nota. Si impone dunque il problema di dare altra spiegazione delle verifiche ora ricordate. Guidato da tale concetto, ho da tempo formulato, sebbene in modo sommario, teorie tendenti a spiegare in altro modo, le pretese verifiche della relatività. Le principali di queste si riferiscono alle osservazioni delle stelle doppie, l'una, ed alla asserita equivalenza tra massa ed energia, l'altra. Ho dato, in precedenza, schemi di spiegazione di tali fatti, all'infuori della teoria di Einstein.

Va doverosamente osservato, che, malgrado le obiezioni sollevate, nel suo complesso, la relatività ha costituito un ottimo strumento di lavoro. Ciò è però avvenuto perchè essa, in modo peraltro non del tutto chiaro (ed in ogni modo incompleto), si è sostituita ad altra teoria più razionale, dei fenomeni ottici, fra corpi in moto. Per le ragioni esposte, si deve ritenere così, che essa abbia avuto la funzione di un'impalcatura, che ha permesso la costruzione di un solido edificio (la fisica moderna). Ma essendo ora ciò avvenuto, per il più sicuro sviluppo e per la utilizzazione dello stesso edificio, quell'impalcatura va decisamente rimossa.

Qualcosa si deve ancora dire, per spiegare il modo con cui Einstein sia stato indotto, nella formulazione delle sue teorie. Nel far ciò, egli non ha tenuto presente un principio, già enunciato da H. Poincaré, secondo il quale relazioni matematiche, riguardanti anche solo infinitesimi, fra parametri od incognite fisiche, possono corrispondere ad infiniti schemi fisici. Tali relazioni

(1) Cfr. E. GHERKE, *Handbuch der physikalischen Optik*. Band. II, S. 986-1013, 1928; O. D. CHWOLSON, *Traité de Physique*. Tome V, p. 262, 1914.

non esprimono mai in pieno, il fatto fisico, che va ogni volta opportunamente specificato, con precisazioni aggiuntive. Si potrebbe dire che un controllo della giustezza di tale principio, ce lo fornisce l'Einstein stesso. Egli, pur avendo abolito la concezione dell'etere cosmico, in base alla quale Lorentz aveva scritto la sua trasformazione, ci ripresenta questo gruppo di equazioni, appoggiandole ad uno schema fisico del tutto contrario. Ma realmente, tale esempio non è esatto, perchè il modo usato da Einstein per ritrovare quella trasformazione è discutibile.

Einstein, senza aver l'abitudine, non dico di sperimentare, ma di spaziare con la mente tra le possibilità sperimentali, si è lasciato dominare dal concetto di attribuire significati fisici (spaziali, temporali, cinematici, dinamici, ecc.) alle formule che successivamente ricavava. Così, egli non si è peritato di asserire che semplici fatti cinematici della materia, siano legati alla velocità della luce. Se ciò fosse vero, ignorando o non servendosi del fenomeno luminoso a distanza, si potrebbe scoprire col solo esame del movimento della materia, qual sia la velocità della luce. Quale altro esempio che illustri il metodo di indagine di Einstein, possiamo citare il caso di orologi in reciproco movimento d'insieme. Einstein ammette che il battito di un orologio (ed anche il periodo di qualsiasi fenomeno naturale, anche biologico) rallenti, tanto più, quanto maggiore sia la velocità uniforme di esso, rispetto a un osservatore. Tale asserzione egli fa, traducendo in un concreto fatto fisico, certe deduzioni tratte dalla T. L., senza domandarsi se l'esperienza potrà mai confermare un fatto simile; o meglio, ritenendo che tale conferma non potrebbe in ogni caso mancare. Quanto ciò è in contrasto, con lo spirito di chi ponderatamente vuol studiare i fatti naturali! Ma nel fare la detta asserzione, Einstein non considera la mancanza di significato del moto assoluto dell'orologio. Se si esamina il moto di questo, in rapporto a quello dell'orologio dell'osservatore, non si comprende, nel caso d'incontro di tali due orologi, quale dei due debba avere il suo tempo indietro rispetto all'altro. Si suggerisce che la relatività porta a variazioni metriche (spaziali o temporali) che sarebbero soltanto apparenti. Ma tale ammissione non ha alcun senso, nel caso del detto incontro. Infatti, le constatazioni fatte tra due osservatori in coincidenza spaziale e temporale, non possono essere che reali ed identiche. Forse un attento esame dei fatti possibili, avrebbe indotto Einstein a rinunciare alla sua teoria. Ed è tuttora sorprendente come, considerazioni così semplici e chiare non siano fatte o prese in considerazione dai relativisti. Si deve dire che ciò non può esser dovuto che all'abitudine di trattare i problemi fisico-matematici, dal solo punto di vista ideale e non sperimentale. Con ciò non si vuole si mancare di riguardo alla loro opera.

A parte la critica ora fatta dell'opera di Einstein, ritengo che la considerazione del modello fisico ideale, presentato in questa Nota, porti ad una interessante conseguenza: alla necessità cioè, di riprendere in considerazione la teoria balistica della luce. I motivi per cui questa teoria, con quasi generale consenso, in armonia con la teoria di Einstein, fu decisamente respinta

(malgrado i lavori di Ritz e La Rosa), vanno attentamente riveduti, come io stesso ho fatto, altra volta.

Per chiarire ciò, si deve avvertire che, escludendo la teoria della relatività speciale, occorre tornare ad ammettere il concetto di *tempo unico* nell'osservazione dei fatti naturali. Non si deve però far confusione, tra tale locuzione ed un *tempo assoluto*, che non ha senso. Possiamo, infatti fissare solo la scala universale dei tempi, riferendoci ad un istante arbitrario qualsiasi: presente, passato, futuro. Inoltre, il concetto di simultaneità va ristabilito in pieno; e vi ha modo di distinguere come esso possa venire apparentemente falsato, da eventuali segnalazioni luminose, che si trasmettono con la velocità della luce, rispetto alla sorgente: tale velocità deve essere costante per la sorgente stessa, ma non per i vari osservatori in moto reciproco, come falsamente ammette la relatività.

Ammettendo la teoria balistica, possiamo considerare il modello della figura di questa Nota. Supponiamo ancora, che i due sistemi OS ed O' S' siano in moto relativo, con la velocità uniforme v ; e che nell'istante in cui S ed S' coincidono, ciascuna di queste sorgenti mandi un segnale luminoso, verso O ed O'. Questi segnali si trasmettono ciascuno nel proprio sistema, con la velocità c . Ma per il sistema SO, la luce proveniente da S' viaggia con la velocità $c - v$; così vuole la teoria balistica, perfettamente d'accordo con la cinematica classica. Così pure, per il sistema S' O', la luce proveniente da S, ha la velocità $c + v$. Supponiamo ancora, che quando la luce di S arriva su O, anche O' venga a coincidere con O. Si avrà così che tanto O quanto O', ricevono il segnale luminoso di S, dopo il tempo $t_1 = l/c$, dalla sua emissione. Il segnale di S' arriva invece su O', dopo il tempo, alquanto maggiore:

$$t_2 = l'/c = (l/c) (1 + v/c);$$

ossia esso arriva su O', in ritardo rispetto a t_1 per il tempo:

$$t_3 = t_2 - t_1 = (l/c) (1 + v/c) - l/c = lv/c^2.$$

durante questo tempo t_3 , O' si è spostato, rispetto ad O, del tratto $l(v/c)^2$. Indi, la luce che era pervenuta su O', prosegue oltre, e raggiunge O al tempo:

$$t_4 = l(v/c)^2/(c - v) = (l/c) ((v/c)^2 + (v/c)^3 + \dots).$$

Queste semplici deduzioni della cinematica classica, fanno comprendere che ciascuno dei due segnali di S ed S' arriva su O ed O' in tempi diversi, cioè uno quando coincidono e l'altro quando essi non sono più coincidenti. Tale risultato non è d'accordo con la relatività.

Tutto quanto ho esposto nelle Note precedenti ed in questa, ha avuto lo scopo di chiarire e giustificare il mio atteggiamento, decisamente contrario ad una teoria che, per contro, ha acquistato, in questo ultimo mezzo secolo, decisa fiducia presso la grande maggioranza dei competenti (matematici e fisici). Se io non condivido affatto tale fiducia, ciò dipende dalla mia abitudine alla reale considerazione dei fatti, ispirata al retto raziocinio,

nell'osservarli o nel cercare di prevederli. Ciò va inteso, dentro i limiti delle nostre possibilità mentali. Tale criterio è consono ad una massima filosofica che risale ad Aristotele, va a Galileo, e poi a Righi. In base ad essa, si può rilevare, che la maggior soddisfazione del nostro spirito corrisponde all'inclinarsi di fronte alle verità naturali, che il nostro studio ci rende accessibili.

Tale principio dovrebbe essere tenuto presente, ancor da quelli che con tanto zelo (e senza considerazione per coloro che sono d'avviso contrario), coltivano le teorie di Einstein.

Può forse, umanamente, giustificarsi un simile atteggiamento. È infatti, difficile rinunciare a idee, che da tempo hanno costituito la base dei propri raziocinii. Anche se questi contengono una recondita e non facilmente rilevabile causa di equivoco, soltanto argomenti nuovi e decisivi potrebbero modificare quelle idee, con retto spirito di comprensione. Io penso, che tali argomenti potrebbero essere costituiti da quelli che ho svolto in questa Nota. Ma più di essi, avrebbero valore fatti veramente nuovi, che mettano in chiara evidenza l'errore delle dette idee. Per vero, alla ricerca di essi mi vado dedicando da molti anni. Ma la mancanza di mezzi sperimentali idonei, che gli organi competenti non hanno creduto opportuno concedermi, ritarda od impedisce del tutto, la conclusione delle mie ricerche.

E d'altra parte, per imprescindibile legge di natura, io non posso avere ancora molto tempo per proseguire le ricerche stesse. Sono sicuro peraltro, che in un avvenire più o meno prossimo, la giustezza dei miei rilievi sarà concordemente riconosciuta. A ciò corrisponderà sicuramente, notevole progresso nella correttezza del nostro pensiero scientifico.

Fisiologia. — *Sul processo di ripolarizzazione nel muscolo cardiaco.* Nota (*) del Corresp. IGINO SPADOLINI.

Recenti ricerche di Draper e Weidmann e di Weidmann⁽¹⁾ sul potenziale di membrana della fibra cardiaca eseguite col metodo della derivazione intracellulare a mezzo del micro-elettrodo di Ling e Gerard hanno contribuito a precisare la forma del potenziale di azione (p.d.a.) monofasico (constatando la comparsa assai frequente di *overshoots* che implicano una inversione del p.d.a.) ed a stabilire che detto potenziale può raggiungere valori assai elevati (121 mV contro 90 mV del potenziale di riposo).

Il p.d.a. monofasico presenterebbe una rapida ascesa che sovente si continuerebbe in uno *spike* a decorso rapido seguito da un *plateau* che termina colla fase di ripolarizzazione. Risulterebbe da queste ricerche che il *plateau* della derivazione monofasica fosse realmente l'espressione della

(*) Presentata nella seduta del 9 febbraio 1952.

(1) « J. of Physiol. », 1951, vol. 115, pp. 74 e 227.

attività elettrica della singola fibra miocardica e non già il risultato dei p.d.a. asincroni e di più breve durata localizzati nella regione stessa degli elettrodi o in zone vicine.

Su questo punto io dissento dai suddetti autori poichè reputo non esatto considerare la cosiddetta fibra miocardica come una unità elementare alla stessa stregua di una fibra muscolare scheletrica. Il miocardio, come è stato confermato dalle recenti osservazioni del Kisch⁽²⁾ al microscopio elettronico è un sincizio sarcoplasmatico nel quale i veri elementi funzionali sono esclusivamente rappresentati dalle miofibrille (unità non sinciziali, isolate o riunite in fascetti) che il Kisch stesso ritiene dover distinguere in due gruppi differenti A e B.

Pertanto, nel cuore la derivazione da una singola fibra non ha alcun preciso significato anatomico o funzionale. Nell'area di una presunta fibra miocardica, completamente delimitata da una guaina di sarcolemma, si possono contare da 300 a 700 miofibrille. Ne consegue che l'elettrodo penetrato in una fibra miocardica raccoglie sempre i p.d.a. di un numero variabile di miofibrille che non entrano sincronicamente in eccitazione.

A sostegno di questo mio punto di vista ricordo che nella ipersincronia, cui vanno incontro i potenziali di azione nel tetano del miocardio, il *plateau* tende praticamente a scomparire e in sua vece permane un breve potenziale lento che, più o meno sviluppato (tanto da essere talvolta appena identificabile), sembra inderogabilmente accompagnare nel miocardio il potenziale di azione (fig. 1).

Quindi una dispersione temporale dell'eccitamento a livello delle miofibrille può ancora giustificare, almeno in parte, la comparsa del *plateau*. Sta il fatto che anche dalle ricerche degli autori suddetti emerge una larga variabilità di risultati tanto in riguardo ai valori del p.d.a. che di quello di riposo. Inoltre, l'azione del curaro e della procaina sul cuore⁽³⁾, che si accompagna sempre ad accentuati fenomeni di desincronizzazione, non può essere a parer mio interpretata che con fenomeni di dispersione temporale dell'eccitamento nell'ambito delle singole miofibrille⁽⁴⁾.

Dalle stesse ricerche di D. e W. viene del resto confermato che la durata del *plateau* può venire considerevolmente accorciata guidando con stimoli elettrici ad elevata frequenza il preparato cardiaco. Questo reperto, cui sopra ho accennato, già segnalato da Blair e Collaboratori, è appunto in rapporto con un effetto additivo da frequenza che da un lato ipersincronizza

(2) *Electron Microscopic Histology of the Heart*. « Brooklyn Medic. Press. », New York, 1951.

(3) LUIGI SPADOLINI, « Rendic. Accad. Naz. dei Lincei », questo stesso fascicolo.

(4) È probabile che anche per spiegare il meccanismo della sommazione meccanica nel tetano della singola fibra muscolare scheletrica convenga prendere in considerazione il comportamento individuale delle miofibrille aventi caratteristiche di eccitabilità statisticamente raccolte in gruppi differenti. È molto probabile, però, che per ragioni di distribuzione geometrica delle miofibrille non siano molto numerosi nella fibra scheletrica i gruppi miofibrillari con caratteristiche differenti.

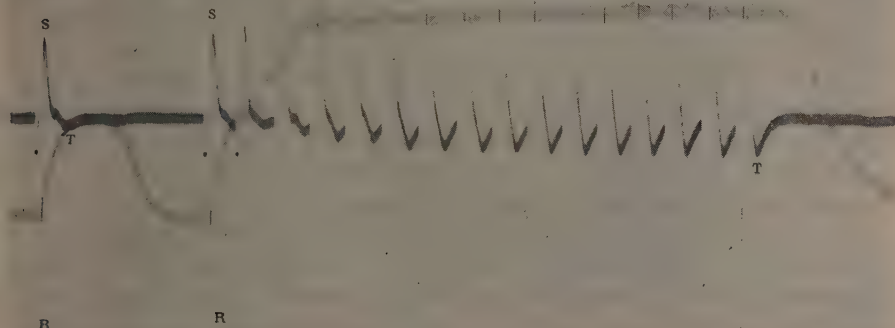


Fig. 1. - Potenziali di azione nel tetano del miocardio ventricolare di *Bufo vulgaris*.

Nel primo oscillogramma della serie è indicato il potenziale difasico R-S e il tratto S-T; in questo periodo S-T si svolge l'onda lenta di depolarizzazione, essa declina fino al completamento del processo di ripolarizzazione che termina qualche momento dopo l'onda T. Gli oscillogrammi seguenti indicano le modificazioni cui vanno incontro i potenziali rapidi e i potenziali lenti postumi per effetti additivi da frequenza di stimolazione durante lo svolgersi della contrazione tetanica. Nei primi si stabilisce gradatamente un processo di ipersincronizzazione che provoca un loro notevole aumento di voltaggio. Il potenziale lento finisce per stabilirsi anticipatamente sulla parte discendente dell'onda S e raggiunge valori sempre più accentuati. Il deficit di ripolarizzazione nel tetano è rivelato dal dislivello fra la prima e l'ultima oscillazione indicate con T. La depolarizzazione residua appare minore di quella reale per la costante di tempo relativamente breve dall'amplificatore usato. Nei primi oscillogrammi l'artefatto dovuto allo stimolo è stato indicato con un punto. Preparato in liquido di Ringer ipercalcico.

nelle miofibrille l'eccitamento, dall'altro riduce il decorso del potenziale postumo lento. Il trattamento del preparato con soluzioni di Ringer ipercalciche facilita enormemente lo svolgersi di tali effetti additivi (fig. 2). In molti esperimenti una opportuna concentrazione di Ca-ioni si dimostrò un fattore decisivo nell'abbreviare il tratto S-T dell'e.c.g. in derivazione difasica (5).

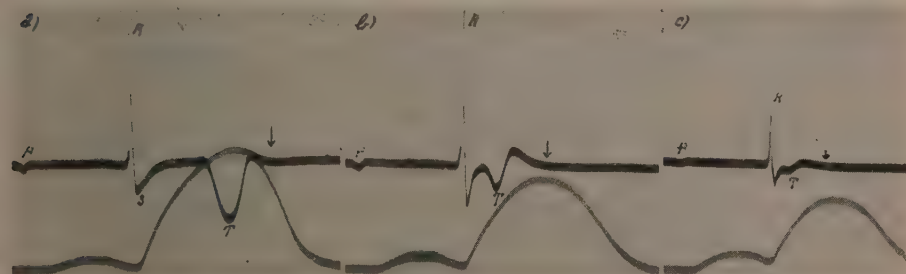


Fig. 2. - Azione di soluzioni ipercalciche nel determinare un accorciamento del periodo refrattario assoluto S-T. La presunta fine del periodo refrattario è stata indicata con una freccia.

a) preparato in liquido di Ringer normale per anfib; b) e c) lo stesso preparato in liquido ipercalcico rispettivamente dopo 10 e 20 minuti.

Detto tratto S-T che si sa corrispondere al *plateau* della derivazione monofasica è la risultante fra la depolarizzazione lenta che va declinando e il processo concomitante di ripolarizzazione che ha una fase molto rapida di completamento pressochè totale in corrispondenza dell'onda finale T dell'e.c.g.

Ora, secondo D. e W., sarebbe possibile dimostrare che impulsi di corrente anodica applicati al preparato cardiaco durante lo svolgersi del *plateau* provocano per valori crescenti della corrente polarizzante risposte graduate di ripolarizzazione, finchè raggiunto da detta corrente un certo valore critico si svolgerebbe una ripolarizzazione massimale T. o N. che si propaga nel tessuto senza decremento come una *off-response*. Invece, le risposte di ripolarizzazione graduata si propagherebbero con un certo decremento. La velocità di tale *off-response* sarebbe sempre assai minore di quella di una normale *spike*.

Che il processo di ripolarizzazione nel miocardio si svolga *in ogni caso* come una reazione massimale del tipo T. o N. credo non possa sicuramente ammettersi. E ciò per le conclusioni che derivano dallo studio del tetano cardiaco, cui pure sopra ho accennato.

Nella contrazione tetanica del cuore, ove occorre, come sempre, guidare il preparato a frequenze relativamente elevate, è stato dimostrato ⁽⁶⁾ che le condizioni essenziali affinché si verifichi la sommazione meccanica delle singole contrazioni sono: 1° che il tratto S-T (*plateau* della derivazione monofasica) si accorci notevolmente, sì che il periodo refrattario assoluto divenendo assai più breve corrisponda alle esigenze del processo meccanico di sommazione; 2° che fra una contrazione e l'altra, quindi fra un p.d.a. e l'altro, permanga nel preparato un certo stato di depolarizzazione residua.

Tale stato va accentuandosi dal momento in cui il tetano si inizia fino al momento in cui viene raggiunta la fusione completa delle singole contrazioni. Pertanto, nel tetano cardiaco, almeno, il processo di ripolarizzazione non giungendo mai a completarsi prima che il nuovo stimolo cada sul tessuto è bensì una risposta propagata ma non massimale del tipo T. o N. (fig. 1). Una riprova molto dimostrativa di tale comportamento si desume dal fatto che se la ripolarizzazione si accentua tendendo a completarsi prima che il tessuto riceva un nuovo stimolo (per rallentamento del ritmo di stimolazione imposto o per fatica) immediatamente il tetano diventa incompleto per il ristabilirsi della fase di rilasciamento. Così che il tetano finisce in breve per essere sostituito dal battito normale.

Su queste basi fu da me categoricamente affermato che soltanto un *completo rilasciamento diastolico può associarsi ad un valore massimale del processo di ripolarizzazione*. La contrazione tetanica del miocardio, i cui singoli eccitamenti ci sono rappresentati dall'onda rapida iniziale di depolarizzazione, permane sostenuta e completa fintanto che la membrana del

(6) I. e L. SPADOLINI, loc. cit.

muscolo, per l'opportuno ripetersi degli stimoli, rimane convenientemente depolarizzata. Degno di attenzione è il fatto che lo stato finale di depolarizzazione residua si raggiunge sempre attraverso reazioni di tipo graduato, come pure graduato si manifesta l'accorciamento che consegue il periodo refrattario assoluto con il restringersi del *plateau*. Nessuna delle reazioni che a carico del potenziale lento si svolgono durante il tetano del miocardio sembra pertanto rispondere alla regola del T. o N. (7).

Che il processo di depolarizzazione lenta sostenga la contrazione e che il valore di quest'ultima sia, *grosso modo*, direttamente proporzionale a detto processo e inversamente a quello della ripolarizzazione successiva è un dato di fatto che si trova in accordo anche con le vedute del Kuffler (8) per il quale la contrattura del muscolo striato scheletrico è l'espressione di una depolarizzazione residua non accompagnata o solo lentamente accompagnata da una ripolarizzazione della membrana del muscolo.

Tetano e contrattura manifesterebbero, pertanto, una stretta affinità riguardo al comportamento del processo di ripolarizzazione.

Se le considerazioni e le conclusioni suesposte emergono dalle osservazioni da me compiute sul tetano del cuore, ciò non esclude che in altre circostanze, durante per esempio il normale battito del cuore, il processo della ripolarizzazione possa svolgersi come una risposta massimale e si propaghi secondo la regola del T. o N. La durata della fase diastolica è tale da credere che il processo di ripolarizzazione abbia tempo sufficiente per raggiungere il suo valore massimale.

Se teniamo conto di tale possibilità le indagini del Weidmann finirebbero per concordare con le mie vedute. Impulsi anodici al di sotto di un certo valore evocano ripolarizzazioni graduate in progressivo aumento e pure capaci di propagarsi ad una certa distanza. Orbene, sarebbe forse questo il tipo di ripolarizzazione incompleta che si svolge nel miocardio sottoposto a stimoli tetanizzanti. Gli impulsi anodici, al di sopra di un certo valore di soglia (purchè investano il tessuto con un ritardo maggiore dei precedenti) evocano, invece, ripolarizzazioni massimali. Questo potrebbe essere il tipo critico di ripolarizzazione totale che si associa normalmente al rilasciamento completo diastolico.

(7) Solo il p. d. a. rapido anche nel tetano del cuore è con ogni probabilità una risposta del tipo T. o N. che va gradatamente incontro ad un notevole aumento di voltaggio per fenomeni temporali di sincronizzazione.

(8) *Muscular Contraction*. « Annals N. Y. Acad. Sc. », 47, 767 (1947).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Calcolo delle variazioni. — *Ricerca dell'estremo di un cosiddetto funzionale quadratico* (*). Nota di ENNIO DE GIORGI, presentata (**)
dal Socio M. PICONE.

Siano date nell'intervallo $t_1 \vdash t_2$ le matrici quadrate ad r linee $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ ed il vettore ad r componenti $g(t)$, funzioni tutte continue con le derivate prime nell'intervallo $t_1 \vdash t_2$; supponiamo inoltre che $A(t)$ sia, per ogni valore di t , la matrice dei coefficienti di una forma quadratica definita positiva e $C(t)$ una matrice simmetrica. Vogliamo trovare l'estremo inferiore del funzionale (1)

$$J[x] = \int_{t_1}^{t_2} (x' \cdot Ax' + 2x \cdot Bx' + x \cdot Cx + 2g \cdot x) dt$$

nell'insieme Γ delle funzioni vettoriali ad r componenti $x(t)$, assolutamente continue e con derivate prime di quadrato sommabile, che, nei punti t_1, t_2 , assumono rispettivamente i valori x_1, x_2 . Nella nostra trattazione possiamo limitarci ad esaminare il caso in cui sia $x_1 = x_2 = 0$, ed inoltre la matrice $B(t)$ sia emisimmetrica; infatti, trattandosi di un problema a estremi fissi, possiamo sempre ricondurci a questo caso mediante l'integrazione per parti del termine $x B x'$ e la sostituzione $\bar{x}(t) = x(t) - v(t)$, ove $v(t)$ è una funzione di classe C^2 che nei punti t_1, t_2 prende i valori x_1, x_2 .

1. UNA RICERCA PRELIMINARE. — Poniamo

$$(2) \quad L[x] = \int_{t_1}^{t_2} x' \cdot Ax' dt, \quad M[x] = \int_{t_1}^{t_2} (2x \cdot Bx' + x \cdot Cx) dt, \quad R[x] = \int_{t_1}^{t_2} g \cdot x dt;$$

si ha allora

$$(3) \quad J[x] = L[x] + M[x] + R[x].$$

Indichiamo con Γ_p e con $\Gamma_p^{(A)}$ gli insiemi delle funzioni di Γ per cui si ha rispettivamente

$$(4) \quad \int_{t_1}^{t_2} |x'|^2 dt \leq p, \quad (4') \quad L[x] = \int_{t_1}^{t_2} x' \cdot Ax' dt \leq p,$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 9 febbraio 1952.

(1) Adotto le notazioni usate dal prof. MAURO PICONE nella *Introduzione al Calcolo delle Variazioni*, lezioni tenute alla Università di Roma nell'anno accademico 1950-51.

p essendo un qualunque numero reale positivo; l'insieme Γ_p è notoriamente compatto e chiuso nello spazio Lagrangiano di ordine zero, al quale nel seguito intenderemo sempre riferirci; vogliamo mostrare che anche $\Gamma_p^{(A)}$ è compatto e chiuso. A tale scopo cominciamo col dimostrare che il funzionale $L[x]$ è infercontinuo ⁽²⁾ nell'insieme Γ_p . Scelto arbitrariamente un elemento $x_0(t)$ di Γ_p , poniamo

$$(5) \quad \eta(t) = x(t) - x_0(t);$$

quando $x(t)$ varia in Γ_p , $\eta(t)$ si mantiene sempre nell'insieme Γ_{4p} e dalle (2), (5) segue

$$(6) \quad L[x] - L[x_0] = \int_{t_1}^{t_2} \eta' \cdot A \eta' dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \eta' \cdot A x_0' dt.$$

Ora è noto che presi comunque due vettori $v_1(t)$ e $v_2(t)$ di norma som-
mabile nell'intervallo $t_1 - t_2$ il funzionale lineare $\int_{t_1}^{t_2} (v_1 \cdot \eta' + v_2 \cdot \eta) dt$ è continuo nell'insieme Γ_{4p} ; quindi in particolare sarà continuo il funzionale $\int_{t_1}^{t_2} \eta' \cdot A x_0' dt$

e, poichè il funzionale $\int_{t_1}^{t_2} \eta' \cdot A \eta' dt$, non essendo mai negativo, è infercontinuo

nell'origine dello spazio Lagrangiano, dalle (6) si vede che $L[x]$ è infercontinuo su Γ_p nell'elemento $x_0(t)$; ma $x_0(t)$ è stato scelto arbitrariamente in Γ_p e quindi $L[x]$ è infercontinuo in tutto Γ_p . Detto m il minimo della funzione $\lambda \cdot A \lambda$ al variare del punto $(t, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ nell'insieme definito dalle

$$(7) \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad |\lambda|^2 = 1$$

è evidente che $\Gamma_p^{(A)}$ è contenuto in $\Gamma_{p/m}$; esso sarà quindi compatto e, per l'infercontinuità di $L[x]$ in $\Gamma_{p/m}$, sarà anche chiuso. Il funzionale $R[x]$ è evidentemente continuo in $\Gamma_1^{(A)}$ e quindi vi ha un minimo ρ ; vogliamo mostrare che anche $M[x]$ è continuo in $\Gamma_1^{(A)}$. Cominciamo col considerare il

funzionale $N[x] = \int_{t_1}^{t_2} x \cdot B x' dt$ e proviamo che esso è continuo in Γ_p . Mantenendo le notazioni (5) abbiamo

$$(8) \quad N[x] - N[x_0] = \int_{t_1}^{t_2} \eta \cdot B \eta' dt + \int_{t_1}^{t_2} (\eta \cdot B x_0' + x_0 \cdot B \eta') dt;$$

(2) Seguo l'uso del vocabolo infercontinuità, in luogo della frase semicontinuità inferiore, proposto dal prof. Mauro Picone durante le conferenze sui fondamenti del calcolo delle variazioni tenute nei giorni 6 e 8 maggio 1950 all'Università di Napoli (vedi «Giornale di Matematiche» di BATTAGLINI, ser. IV, vol. 80 (1950-51), pp. 50-79).

il funzionale $\int_{t_1}^{t_2} (\eta \cdot Bx'_0 + x_0 \cdot B\eta') dt$ è continuo in Γ_{4p} , essendo un particolare funzionale lineare del tipo già visto. Siano ora b_{hk} gli elementi di B e sia b il massimo di $\sum_{h,k} |b_{hk}|$ nell'intervallo $t_1 - |t_2$; abbiamo allora

$$(9) \quad \left| \int_{t_1}^{t_2} \eta \cdot B\eta' dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} b |\eta| |\eta'| dt \leq b \left(\int_{t_1}^{t_2} \eta^2 dt \int_{t_1}^{t_2} \eta'^2 dt \right)^{1/2} \leq b \left(4p \int_{t_1}^{t_2} \eta^2 dt \right)^{1/2}.$$

Dalle (9) si vede che il funzionale $\int_{t_1}^{t_2} \eta B\eta' dt$ è continuo sull'insieme Γ_{4p} nell'origine dello spazio Lagrangiano; quindi $N[x]$ è continuo sull'insieme Γ_p nell'elemento x_0 , e, per l'arbitrarietà della scelta di x_0 , è continuo in tutto Γ_p . Tenendo presente la (2) dalla continuità di $N[y]$ si vede la continuità di $M[y]$ in Γ_p e, poichè Γ_1 è contenuto in $\Gamma_{1,m}$, $M[y]$ sarà continuo in Γ_1^v e quindi avrà in esso un minimo; detta z una sua minimante abbiamo

$$(10) \quad \frac{d}{dt} (\mu As' + Bz) + Bz' + Cz = 0$$

ove μ è una costante (nulla se z è interna a $\Gamma_1^{(A)}$). Presa una funzione $x(t)$ di Γ dalla (10) segue

$$(11) \quad x \cdot \left[\frac{d}{dt} (\mu As') + \frac{d}{dt} (Bz) + Bz' + Cz \right] = 0$$

e quindi, integrando per parti, abbiamo

$$(12) \quad \mu \int_{t_1}^{t_2} x' \cdot As' dt = \int_{t_1}^{t_2} (z \cdot Bx' + x \cdot Bz' + x \cdot Cz) dt.$$

Scegliendo come $x(t)$ la funzione minimante $z(t)$ vediamo dalle (12) che μ è il minimo del funzionale $M[x]$ in $\Gamma_1^{(A)}$ e che non vi possono essere autovalori della (10) relativi all'intervallo $t_1 - |t_2$ minori di μ ; ogni funzione di $\Gamma_1^{(A)}$ che soddisfa la (10) o rende minimo $M[x]$ in $\Gamma_1^{(A)}$ o è proporzionale ad una funzione minimante. Poichè il funzionale $R[x]$ è omogeneo di primo grado, mentre $M[x]$ ed $L[x]$ sono omogenei di secondo grado, dal fatto che ρ e μ sono rispettivamente i minimi di $R[x]$ e di $M[x]$ in $\Gamma_1^{(A)}$ segue

$$(13) \quad R[x] \geq \rho \sqrt{L[x]}, \quad M[x] \geq \mu L[x] \quad (3)$$

per ogni funzione $x(t)$ di Γ .

(3) Questo risultato può essere avvicinato a quelli ottenuti, in un diverso indirizzo, da BRUNO PINI nel suo lavoro *Sulle proprietà di minimo, e relative conseguenze, delle autosoluzioni di un sistema autoaggiunto di equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine*. « Rivista Matematica della Università di Parma », vol. I, fasc. 3-4, maggio-ottobre 1950.

2. RICERCA DELL'ESTREMO INFERIORE DEL FUNZIONALE $J[x]$. — Chiamiamo $j(\Gamma)$ l'estremo inferiore del funzionale $J[x]$ nell'insieme Γ e distinguiamo i 3 casi possibili: I) $\mu > -1$, II) $\mu = -1$, III) $\mu < -1$.

I) Nel primo caso, in tutto l'insieme $(\Gamma - \Gamma_{(q+1+\mu)^2}^{(A)})$ si ha per le (3), (13)

$$(14) \quad J[x] \geq (1 + \mu) L[x] + \rho \sqrt{L[x]} > 0.$$

Il funzionale $J[x]$ è, per le (3), infercontinuo nell'insieme $\Gamma_{(q+1+\mu)^2}^{(A)}$ e quindi, essendo $\Gamma_{(q+1+\mu)^2}^{(A)}$ compatto e chiuso, avrà un minimo in tale insieme. Il minimo di $J[x]$ nell'insieme $\Gamma_{(q+1+\mu)^2}^{(A)}$ è evidentemente minore o uguale a zero e quindi per la (14) coinciderà con $j(\Gamma)$; la funzione minimante dovrà essere di classe C^2 , e soddisfare la

$$(15) \quad \frac{d}{dt} (Ax' - Bx) - Bx' - Cx - g = 0.$$

II) Esaminiamo il secondo caso. Possono darsi due eventualità: esiste nell'insieme Γ una funzione $z(t)$ soddisfacente la (10) per cui si abbia

$$(16) \quad R[z] = s \neq 0$$

oppure per ogni funzione $z(t)$ di Γ soddisfacente la (10) si ha

$$(16') \quad R[z] = 0.$$

Nella prima eventualità, detto p un numero reale qualsiasi si ha, per le (2), (3), (12), (16)

$$(17) \quad J\left[-\frac{s}{p} z\right] = -\frac{s^2}{p} \quad ; \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} J\left[-\frac{s}{p} z\right] = -\infty \quad ; \quad j(\Gamma) = -\infty.$$

Nella seconda eventualità per le (2), (3), (12), (16') si ha

$$(18) \quad J[x + z] = J[x].$$

È noto che si può trovare un sistema ortonormale di soluzioni della (10) appartenenti a Γ , che indicheremo con $z^{(1)}(t)$, $z^{(2)}(t)$, ..., $z^{(n)}(t)$ (con $n \leq r$), tali che ogni soluzione della (10) appartenente a Γ sia una combinazione lineare a coefficienti costanti delle $z^{(i)}$. Poniamo ora, per ogni funzione $x(t)$ dell'insieme Γ

$$(19) \quad \bar{x}(t) = x(t) - \sum_{k=1}^n z^{(k)}(t) \int_{t_1}^{t_2} z^{(k)}(\tau) \cdot x(\tau) d\tau.$$

Indicando con Γ l'insieme degli elementi ottenuti dagli elementi di Γ mediante le (19), l'estremo inferiore $j(\Gamma)$ del funzionale $J[x]$ nell'insieme Γ coincide, per le (17) con $j(\Gamma)$. Detto $\Gamma_{\rho}^{(A)}$ l'insieme delle funzioni di Γ soddisfacenti le (4'), si vede immediatamente che tale insieme è compatto e chiuso; esisterà quindi il minimo $\bar{\mu}$ del funzionale $M[x]$ in $\Gamma_{\rho}^{(A)}$ e si avrà, per ogni elemento di Γ

$$(20) \quad M[x] \geq \bar{\mu} L[x] \quad , \quad \bar{\mu} > \mu = -1.$$

Con ragionamento del tutto analogo a quello seguito nel primo caso, si vede che $j(\Gamma)$ coincide col minimo di $J[x]$ nell'insieme $\Gamma_{(0, 1+\mu)^2}^{(A)}$; tale minimo allora coincide con $j(\Gamma)$ e la funzione minimante è di classe C^2 e soddisfa le (15).

III) Nel terzo caso, detta al solito \bar{z} una soluzione delle (10), si ha per le (2), (3), (12).

$$(21) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} J[p\bar{z}] = -\infty, \quad j(\Gamma) = -\infty.$$

Consideriamo ora l'equazione di Jacobi del nostro problema

$$(22) \quad \frac{d}{dt}(Ax' - Bx) - Bx' - Cx = 0:$$

vediamo che le condizioni $\mu > -1$, $\mu = -1$, $\mu < -1$, equivalgono rispettivamente alle condizioni che nell'intervallo $t_1 \vdash t_2$ non cada alcun punto coniugato di t_1 rispetto alle (22), che t_2 sia l'unico punto di $t_1 \vdash t_2$ coniugato di t_1 , che esista un punto coniugato di t_1 interno a $t_1 \vdash t_2$. Nel primo caso, come abbiamo visto, $j(\Gamma)$ è sempre un minimo, nel terzo caso è sempre $j(\Gamma) = -\infty$; nel secondo caso $j(\Gamma) = -\infty$ quando c'è qualche soluzione della (22) (che per $\mu = -1$ è uguale alla (10)) appartenente a Γ per cui valga la (16), $j(\Gamma)$ è finito ed è un minimo quando per ogni soluzione della (22) appartenente a Γ vale la (16'). Osserviamo che nel secondo caso ogni soluzione $x_0(t)$ della (15) appartenente a Γ dà il minimo di $J[x]$, come si verifica subito calcolando $J[x_0 + x]$ per una qualsiasi funzione x di Γ e tenendo presente la (13); quindi l'esistenza di una soluzione della (15) appartenente a Γ è condizione non solo necessaria ma anche sufficiente perchè $j(\Gamma)$ sia un minimo.

Analisi matematica. - *Sull'unicità della soluzione per una classe di equazioni differenziali alle derivate parziali, paraboliche, non lineari.* Nota di LANDOLINO GIULIANO, presentata^(*) dal Corrisp. G. SANSONE.

Sia R il rettangolo aperto del piano (x, t) di vertici opposti $(0, 0)$, $(1, T)$. Sia $f(x, t, u, p, r)$ una funzione reale (delle cinque variabili reali x, t, u, p, r) definita e continua in un dominio D (dello spazio a cinque dimensioni) la cui proiezione ortogonale, sul piano (x, t) , contenga il rettangolo R . Considerata l'equazione differenziale alle derivate parziali, parabolica, non lineare, del tipo

$$(I) \quad u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx})$$

H. Westphal ha dimostrato⁽¹⁾ il seguente:

TEOREMA. - *Se: a) la $f(x, t, u, p, r)$ è crescente, come funzione di r , per ogni quaterna assegnata di numeri $\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{p}$, tali che il punto (x, t, u, p, r) appartenga a D ;*

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) H. WESTPHAL, *Zur Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen*. «Math. Zeit.», 1949, 51 Band, pp. 690-695, p. 694.

b) esiste, nell'intervallo $0 < t < T$ una funzione reale $h(t)$ ivi continua, positiva e integrabile in modo che, per ogni coppia di punti (x, t, u_1, p, r) , (x, t, u_2, p, r) appartenenti, entrambi, a D , si abbia:

$$|f(x, t, u_1, p, r) - f(x, t, u_2, p, r)| \leq h(t) |u_1 - u_2|$$

allora non può esistere, nel rettangolo chiuso $R = R + FR^{(2)}$ più di una funzione $u(x, t)$ ivi continua, insieme con le sue derivate u_t, u_x, u_{xx} , la quale, supposto che il punto $[x, t, u(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t)]$ appartenga a D :

α) soddisfi, in R , la (I);

β) assuma prescritti valori per $t = 0$, $0 \leq x \leq 1$ (condizione iniziale di Cauchy), per $x = 0$, $0 \leq t \leq T$ e per $x = 1$, $0 \leq t \leq T$ (condizioni di Dirichlet) soddisfacenti, naturalmente, tutte le condizioni di compatibilità del problema che si sta considerando.

1. Noi faremo vedere, in questa Nota, che la conclusione del teorema di Westphal sussiste anche se si ammettono, invece delle a) e b) le seguenti ipotesi, più generali:

a') la $f(x, t, u, p, r)$ sia non decrescente, come funzione di r , per ogni quaterna assegnata di numeri x, t, u, p , tali che il punto (x, t, u, p, r) appartenga a D ;

b') esiste una funzione reale $h(t, \theta)$ definita nell'insieme $0 < t < T$, $\theta \geq 0$, ivi continua, tale che:

b₁) l'equazione differenziale ordinaria del primo ordine

$$\frac{d\theta}{dt} = h(t, \theta)$$

ammetta l'unico integrale $\theta(t) \equiv 0$ nell'intervallo $0 < t < T$ per cui $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = 0$;

b₂) per ogni coppia di punti (x, t, u_1, p, r) e (x, t, u_2, p, r) appartenenti, entrambi, a D , con $u_1 \geq u_2$ sia:

$$f(x, t, u_1, p, r) - f(x, t, u_2, p, r) \leq h(t, u_1 - u_2).$$

2. Quel che vogliamo provare è conseguenza immediata del seguente:

TEOREMA. — Se $f_1(x, t, u, p, r)$, $f_2(x, t, u, p, r)$ sono due funzioni reali (delle cinque variabili reali x, t, u, p, r) definite e continue in un dominio D' (dello spazio a cinque dimensioni) la cui proiezione ortogonale, sul piano (x, t) , contenga il rettangolo R , si supponga che:

I) la f_1 sia non decrescente, come funzione di r , per ogni quaterna assegnata di numeri x, t, u, p tali che il punto (x, t, u, p, r) appartenga a D' ;

II) se $h(t, \theta)$ è la funzione di cui all'ipotesi b') del n. 1 soddisfacente alla condizione b₁) ivi indicata, per ogni coppia di punti (x, t, u_1, p, r) , (x, t, u_2, p, r) appartenenti, entrambi, a D' , con $u_1 \geq u_2$ si abbia:

$$f_1(x, t, u_1, p, r) - f_2(x, t, u_2, p, r) \leq h(t, u_1 - u_2).$$

(2) Con FR s'intende la frontiera di R .

Allora, se $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ sono due funzioni definite in \bar{R} , ivi continue, insieme con le loro derivate $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, $\frac{\partial u_2}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$ soluzioni, in R , rispettivamente, delle equazioni:

$$(I_1) \quad u_t = f_1(x, t, u, u_x, u_{xx})$$

$$(I_2) \quad u_t = f_2(x, t, u, u_x, u_{xx})$$

tali che:

$$(A) \quad u_1(x, 0) \leq u_2(x, 0) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$(B) \quad u_1(0, t) \leq u_2(0, t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$(C) \quad u_1(1, t) \leq u_2(1, t) \quad 0 \leq t \leq T$$

è, in tutto R :

$$u_1(x, t) \leq u_2(x, t).$$

Dimostrazione. - Si ponga:

$$\varphi(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t), \quad M(t) = \max_{0 \leq x \leq 1} \varphi(x, t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

È, per la (A): $M(0) \leq 0$. Basterà provare che è, per $0 \leq t \leq T$, $M(t) \leq 0$. Se fosse, per qualche t , $M(t) > 0$, esisterebbero due valori di t : \bar{t} e t_1 , $0 \leq \bar{t} < t_1 \leq T$ per cui $M(\bar{t}) = 0$, $M(t) > 0$, $\bar{t} < t \leq t_1$. Sia perciò $\bar{t} < t \leq t_1$. Per un lemma di Ważewski⁽³⁾, tenendo presente che è, per le (B) e (C): $\varphi(0, t) \leq 0$, $\varphi(1, t) \leq 0$, detta $M'_+(t)$ la derivata a destra di $M(t)$, esiste almeno un punto⁽⁴⁾ $\bar{P} \equiv (\bar{x}, t)$, $0 < \bar{x} < 1$, con $\bar{x} = \bar{x}(t)$ dipendente da t , in cui è:

$$M'_+(t) = \varphi'_t(\bar{P}), \quad M(t) = \varphi(\bar{P}).$$

Dunque:

$$\varphi(\bar{P}) = \varphi(\bar{x}, t) = u_1(\bar{x}, t) - u_2(\bar{x}, t) > 0.$$

Se $\Phi(t)$ è l'insieme, *limitato e chiuso*, dei punti del segmento $0 \leq x \leq 1$ in cui la funzione della sola x , $\varphi(x, t)$ (in cui si dà a t un valore assegnato tale che $\bar{t} < t \leq t_1$) raggiunge il suo massimo, il punto $\bar{P} \equiv (\bar{x}, t)$ è⁽⁴⁾ uno

(3) T. WAŻEWSKI, *Sur l'unicité et la limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. « Rend. Acc. Lincei », ser. VI, vol. XVIII, pp. 372-376 (1933).

Il lemma è il seguente:

Sia E l'insieme dei punti (x, y_1, \dots, y_n) per i quali si ha: $0 \leq x \leq a$, $c_v + L_v x \leq y_v \leq d_v - L_v x$ ($v = 1, \dots, n$) dove $L_v \geq 0$, $c_v < d_v$, $a \leq \frac{d_v - c_v}{2L}$ e sia g una funzione definita in E , ivi continua, insieme con le sue derivate del primo ordine. Se $M(\xi)$ è il massimo della funzione g , considerata nella sezione $S(\xi)$ di E con il piano $x = \xi$, la derivata a destra $M'_+(\xi)$ di $M(x)$ nel punto ξ ha la forma $M'_+(\xi) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_P - \sum_{v=1}^n \left| \left(\frac{\partial g}{\partial y_v} \right) \right|_{L_v}$ dove P è un opportuno punto di $S(\xi)$. Una proprietà analoga vale per la derivata sinistra di $M(x)$, $M'_-(\xi)$.

(4) Per maggior chiarezza è utile richiamare qui le linee essenziali della dimostrazione data dal Ważewski del lemma enunciato in (3), nel caso particolare in cui noi lo applichiamo, in questo momento ($v = 1$, $L_1 = 0$). I punti P della sezione $S(\xi)$ per i quali si

qualunque dei punti dell'insieme, *limitato e chiuso*, $\Phi^*(t)$, componente di $\Phi(t)$, in cui la funzione della sola x , $\varphi'_t(x, t)$ (dove s'intende di assegnare a t il valore poco fa considerato) raggiunge il suo massimo. Pertanto può darsi un criterio per la scelta del punto \bar{P} (basterà ad esempio scegliere quel punto di $\Phi^*(t)$ di ascissa minima). Noi intendiamo di avere assegnato un tale criterio. Il punto $\bar{P} \equiv (\bar{x}, t)$ è perciò perfettamente determinato. Essendo \bar{P} punto di massimo per la funzione $\varphi(x, t)$, come funzione di x , poichè è $0 < \bar{x} < 1$, si ha in esso:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\bar{P}} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{\bar{P}} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{\bar{P}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{\bar{P}} = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)_{\bar{P}} - \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)_{\bar{P}} \leq 0.$$

Perciò è, per le ipotesi I) e II):

$$M'_+(t) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\bar{P}} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)_{\bar{P}} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)_{\bar{P}} = f_1\left[\bar{x}, t, u_1(\bar{P}), \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{\bar{P}}, \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)_{\bar{P}}\right] -$$

$$- f_2\left[\bar{x}, t, u_2(\bar{P}), \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{\bar{P}}, \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)_{\bar{P}}\right] = f_1\left[\bar{x}, t, u_1(\bar{P}), \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{\bar{P}}, \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)_{\bar{P}}\right] -$$

$$- f_2\left[\bar{x}, t, u_2(\bar{P}), \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{\bar{P}}, \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)_{\bar{P}}\right] \leq f_1\left[\bar{x}, t, u_1(\bar{P}), \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{\bar{P}}, \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)_{\bar{P}}\right] -$$

$$- f_2\left[\bar{x}, t, u_2(\bar{P}), \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{\bar{P}}, \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)_{\bar{P}}\right] \leq h[t, M(t)].$$

Analogamente è:

$$M'_-(t) \leq h[t, M(t)].$$

Ne viene, per la proprietà b'_i del n. 1 di cui gode la funzione $h(t, \theta)$ che è ⁽⁵⁾:

$$M(t) \leq 0, \quad \bar{t} < t \leq t_i$$

contro l'ipotesi $M(t) > 0$ che risulta perciò assurda.

Osservazione I. — Tenendo presente il lemma di Ważewski ⁽⁶⁾ si deduce, con lo stesso ragionamento sopra esposto:

i) il teorema dimostrato nel n. 2 (e quindi il criterio di unicità enunciato che estende quello del Westphal) vale anche se si sostituisce al rettangolo R l'insieme dei punti del piano (x, t) :

$$0 < t < T, \quad c + Lt < x < d - Lt$$

$$L > 0, \quad c < d, \quad T \leq \frac{d-c}{2L}$$

ha $g(P) = M(\xi)$ formano un insieme limitato e chiuso $G(\xi)$. La derivata g'_x considerata su $G(\xi)$, prende il valore massimo in un punto P_0 almeno. Ważewski prova allora che è $M'_+(\xi) = g'_x(P_0)$. Essendo P_0 punto di $G(\xi)$ è perciò anche $g(P_0) = M(\xi)$. Analogamente per quanto riguarda la $M'_-(\xi)$.

(5) E. KAMKE, *Ueber eindeutige Bestimmtheit der Integrale von Differentialgleichungen*, «Sitz. der Heidelberger Akademie», 1930, 17 Abh., p. 8.

(6) Cfr. nota (3).

ii) il criterio di unicità del n. 1 si può estendere alle equazioni del tipo:

$$(2) \quad u_t = f\left(x_1, x_2, \dots, x_k, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)$$

nell'incognita $u = u(x_1, x_2, \dots, x_k, t)$, in cui le x_1, x_2, \dots, x_k, t variano nell'insieme:

$$(\Omega) \quad 0 < t < T, \quad c_v + L_v t < x_v < d_v - L_v t \quad (v = 1, \dots, k) \\ L_v \geq 0, \quad c_v < d_v, \quad T \leq \frac{d_v c_v}{2 L_v}$$

che sostituisce il rettangolo R del piano (x, t) e la funzione

$$f(x_1, \dots, x_k, t, u, p_1, p_2, \dots, p_k, r_1, \dots, r_k)$$

soddisfa alle seguenti ipotesi:

a'') essa è non decrescente, come funzione di r_j ($j = 1, \dots, k$), per ogni $(2k+2)$ -upla di numeri fissati $x_1, x_2, \dots, x_k, t, p_1, p_2, \dots, p_k$ tali che il punto $(x_1, x_2, \dots, x_k, t, u, p_1, p_2, \dots, p_k, r_1, r_2, \dots, r_k)$ appartenga al dominio Δ di definizione della f , dominio la cui proiezione ortogonale sull'iperpiano $u = 0$, $p_j = 0$, $r_j = 0$ ($j = 1, \dots, k$) contenga l'insieme Ω .

b'') per ogni coppia di punti $(x_1, x_2, \dots, x_k, t, u^{(1)}, p_1, p_2, \dots, p_k, r_1, r_2, \dots, r_k)$ e $(x_1, x_2, \dots, x_k, t, u^{(2)}, p_1, p_2, \dots, p_k, r_1, r_2, \dots, r_k)$ appartenenti, entrambi, a Δ , con $u^{(1)} \geq u^{(2)}$ si abbia:

$$f(x_1, \dots, x_k, t, u^{(1)}, p_1, \dots, p_k, r_1, \dots, r_k) - \\ - f(x_1, \dots, x_k, t, u^{(2)}, p_1, \dots, p_k, r_1, \dots, r_k) \leq h(t, u^{(1)} - u^{(2)})$$

dove $h(t, \theta)$ è la funzione di cui all'ipotesi b') del n. 1 soddisfacente alla ipotesi b'') ivi indicata.

Ciò si deduce immediatamente dopo avere esteso il teorema del n. 2 in cui si suppone ora che le equazioni (I₁) e (I₂) ivi indicate sono del tipo (2), e dove le f_1 e f_2 soddisfano a ipotesi che, tenendo presente quanto si è supposto poco fa per la f si deducono, in modo ovvio, dalle I) e II) che compaiono nel teorema del n. 2.

Osservazione II. - Possono estendersi ai casi da noi trattati, immediatamente, i teoremi 2 e 3 di Ważewski ⁽⁷⁾ e i teoremi, più generali di questi, dati da S. Turski ⁽⁸⁾.

Osservazione III. - Ci si può porre anche nelle condizioni più generali espresse in un lavoro recente di Volpato ⁽⁹⁾ e il nostro ragionamento e le nostre conclusioni continuano a sussistere, con le opportune, dovute, del resto immediate, precisazioni.

(7) Cfr. loc. cit. (3), pp. 375-376.

(8) S. Turski, *Sur l'unicité et la limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. « Ann. Soc. Pol. », vol. XII, pp. 81-86 (1933); T. Ważewski, *Sur l'unicité et la limitation des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*. « Annali di Matematica », Tomo XV, pp. 155-158 (1936).

(9) M. Volpato, *Criteri di confronto e di unicità per le soluzioni dell'equazione $p = f(x, y, z, q)$ coi dati di Cauchy*. « Rend. Sem. Mat. di Padova », vol. XX, pp. 232-43 (1951).

Osservazione IV. — Le considerazioni da noi svolte si possono estendere ai sistemi di equazioni differenziali del tipo (2), sotto opportune ipotesi che generalizzano, in modo naturale, quelle da noi introdotte nel caso che si tratti di una sola equazione. Sussistono poi in questo caso osservazioni analoghe alle II e III ⁽¹⁰⁾.

Esempio. — Il seguente esempio mostra che le nostre ipotesi enunciate nel n. 1 sono effettivamente più generali di quelle che compaiono nel teorema di Westphal.

Sia $f(x, t, u, p, r) \equiv \frac{Mx \cdot u \cdot p \cdot r}{t}$, dove $0 < t < T$, $0 < x < 1$, $-d < p < d$, $-d < r < d$, essendo d una costante positiva e M una costante positiva per cui $Ma^2 \leq 1$, ed essendo, inoltre, $u p > 0$.

L'equazione

$$u_t = \frac{Mxupr}{t}$$

non rientra nel teorema di Westphal perchè non è soddisfatta l'ipotesi b) che compare in questo teorema. Essa invece rientra nel teorema dimostrato in questa Nota, nel n. 1, quando si supponga però che sia $up \geq 0$. Infatti, per quanto si è ora supposto è soddisfatta la a') del n. 1 e la b') del n. 1 è anch'essa soddisfatta perchè l'equazione differenziale ordinaria $\theta' = \frac{Md^2 \theta}{t}$, ammette, per $0 < t < T$, l'unico integrale $\theta(t) \equiv 0$ per cui $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \theta'(t) = 0$.

Geometria. — *Alcune V_3 irrazionali a generi nulli.* Nota di LEONARD ROTH, presentata ^(*) dal corrisp. B. SEGRE.

In una serie di ricerche ⁽¹⁾ sulle V_3 algebriche a curve sezioni canoniche, Fano ha considerato alcune varietà completamente regolari, a generi e plurigeneri nulli, su cui l'aggiunzione si estingue. Queste, per la maggior parte, sono certamente unirazionali, e presumibilmente non birazionali; però la dimostrazione dell'irrazionalità viene data ricorrendo ad una certa ipotesi di lavoro. Nella presenta Nota, poggiando sul concetto di *divisore*, dovuto a Severi ⁽²⁾, costruiamo delle V_3 dotate delle proprietà testè nominate, le quali sono birazionalmente distinte e non unirazionali, ed altre V_3 che sono unirazionali ma non birazionali.

1. Consideriamo la varietà V , studiata da Severi ⁽³⁾ per primo, che rappresenta le coppie di punti di una curva \mathcal{C} e di una superficie F . Suppo-

(10) Cfr. anche WĄŻEWSKI, loc. cit. (8).

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) G. FANO, «Comm. Pont. Ac. Sc.», II, 635 (1947); cfr. L. ROTH, *Algebraic threefolds*, «Rend. di mat.», (5), 10, 297 (1951), cap. V.

(2) F. SEVERI, «Math. Annalen», 62, 194 (1906); «Ann. Ec. Norm. Sup.», (3), 25, 449 (1908).

(3) F. SEVERI, «Rend. Palermo», 28, 33 (1909).

niamo che \mathcal{L} abbia genere π , e che F sia priva di curve eccezionali di prima specie ed abbia generi p_g, p_a ; allora è noto che i generi P_g, P_a e la irregolarità superficiale q_2 di V sono espressi dalle formule

$$(1) \quad P_g = \pi p_g, \quad P_a = (\pi - 1) p_a + \pi, \quad q_2 = p_g - p_a + \pi.$$

Su V , inoltre, una superficie K canonica virtuale viene data dall'equivalenza $K \equiv (2\pi - 2)F_0 + \mathcal{L} \times \mathcal{H}$, ove F_0 e \mathcal{H} denotano rispettivamente la superficie delle coppie formate da un punto fisso di \mathcal{L} e da un punto variabile arbitrariamente su F , ed una curva canonica (virtuale, pura) di F .

Risulta dalle (1) che V è completamente regolare a generi nulli se, e soltanto se, $\pi = p_g = p_a = 0$.

2. Fissiamo ora l'attenzione sul caso in cui F è la superficie di Enriques ⁽⁴⁾, per cui $p_g = p_a = 0$, avente una curva bicanonica effettiva di ordine zero. È noto che un modello proiettivo di tale superficie viene fornito dalla F^6 che passa doppiamente per gli spigoli di un tetraedro di S_3 .

È classico il risultato che F^6 ha divisore $\sigma = 2$; che sia $\sigma \geq 2$, si vede subito considerando il fascio di quadriche passanti per i quattro spigoli incidenti ad una coppia $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ di spigoli opposti: denotando con \mathcal{C} una quartica ellittica del fascio da quello segato su F^6 , abbiamo che $2\mathcal{C}_1 \equiv 2\mathcal{C}_2 \equiv \mathcal{C}$.

È pure nota la rappresentazione di F^6 sul piano doppio con curva \mathcal{C}^8 di diramazione, data da una sestica \mathcal{C}^6 irriducibile, con due tacnodi ed un punto doppio nel punto d'incontro delle tangenti tacnodali, a cui si sommino tali tangenti. Queste ultime sono curve eccezionali, alle quali corrispondono punti semplici di F^6 ; e gli intorno dei tacnodi, che sono punti $(3, 3)$ di \mathcal{C}^8 , sono immagini di $2\mathcal{C}_1$ e $2\mathcal{C}_2$.

Considerando il fascio \mathcal{C} si ha che ⁽⁵⁾ $\mathcal{H} \equiv \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}$: risulta dunque che su V v'è un fascio $|R|$ di superficie riferibili a rigate ellittiche, e vi sono inoltre due superficie R_1, R_2 consimili isolate, tali che $2R_1 \equiv 2R_2 \equiv R$, $K \equiv R_1 + R_2 - R - 2F_0$. Da quest'ultima equivalenza si ricava $2iK \equiv -4iF_0$ (con i intero positivo). Quindi l'aggiunta di indice $2i$ di un qualunque sistema $|A|$ viene data da $A^{(2i)} \equiv A - 4iF_0$, ed è dunque virtuale per tutti i valori di i sufficientemente grandi. Risulta così che su V l'aggiunzione si estingue, epperanto V ha tutti i plurigeneri nulli.

Osserviamo ora che, in base ad un risultato generale di Lefschetz ⁽⁶⁾ concernente i prodotti topologici di più varietà, V ha divisore $\sigma = 2$; e siccome σ è invariante assoluto di fronte alle trasformazioni birazionali, segue che V non può essere birazionale.

3. Come secondo esempio, supponiamo che F sia la superficie, anch'essa scoperta da Enriques ⁽⁷⁾, rappresentabile sul piano doppio con curva \mathcal{C}^{10}

(4) F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche* (Bologna, 1949), cap. VII.

(5) F. GAETA, «Rend. Acc. Lincei» (8), 8, 570 (1950); «Rend. Acc. dei XL» (4), 2, 1 (1951).

(6) S. LEFSCHETZ, «Trans. Amer. Math. Soc.», 22, 362 (1921).

(7) F. ENRIQUES, op. cit., cap. VI; L. CAMPEDELLI, «Rend. Acc. Lincei» (6), 15, 358 (1932).

(riducibile) di diramazione, dotata di un punto O sestuplo e di tre punti $(3, 3)$ con relative tangenti passanti per O . Il fascio di rette doppie per O rappresenta un fascio $|\mathcal{C}|$ di curve ellittiche su F , e gli intorno dei punti $(3, 3)$ sono immagini di tre curve doppie ellittiche $2\mathcal{C}_1, 2\mathcal{C}_2, 2\mathcal{C}_3$ tali che $\mathcal{C} \equiv 2\mathcal{C}_1 \equiv 2\mathcal{C}_2 \equiv 2\mathcal{C}_3$. In questo caso si ha che $\mathcal{K} \equiv \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 - \mathcal{C}$, e quindi risulta ⁽⁸⁾ che F ha divisore $\sigma = 4$.

Con notazioni analoghe a quelle del n. 2, sulla relativa varietà $V' = \mathcal{L} \times F$ una superficie canonica virtuale viene data da $K \equiv R_1 + R_2 + R_3 - R - 2F_0$, ove $2R_1 \equiv 2R_2 \equiv 2R_3 \equiv R$.

Su V' (come su V) v'è una congruenza Γ del 1° ordine di curve \mathcal{K} razionali, immagini delle coppie formate da un punto fisso di F e da un punto variabile su \mathcal{L} . Per dimostrare che su V' l'aggiunzione ha sempre termine, basta osservare che se una superficie A di V' incontra una \mathcal{K} generica secondo un gruppo di n punti, una sua aggiunta $A' = A + K$ sega le \mathcal{K} in $n - 2$ punti. Segue inoltre che tutti i plurigeneri di V' sono nulli.

In base al citato risultato di Lefschetz, V' ha divisore $\sigma = 4$, e quindi non è birazionale; di più, V' risulta birazionalmente distinta da V .

4. Il fatto che nè V nè V' possa essere unirazionale, si stabilisce col seguente ragionamento, dovuto a Fano ⁽⁹⁾. Supponiamo, se possibile, che una di tali varietà sia riferibile birazionalmente ad una involuzione I di S_3 ; allora alla relativa congruenza Γ del 1° ordine corrisponde in S_3 un sistema di curve composte colla I , eventualmente spezzate; tale sistema è una congruenza Γ' del 1° ordine. Alla curva generica di Γ corrisponde un gruppo di $n \geq 1$ curve variabili di Γ' . Ora Γ' è certamente birazionale, in quanto sega sul piano generico di S_3 una involuzione di punti, necessariamente birazionale. Risulta dunque che anche Γ è birazionale, in contraddizione col fatto che essa è in corrispondenza biunivoca coi punti di F .

Nella sua Memoria ⁽⁵⁾ Gaeta ha stabilito l'esistenza d'una serie infinita di superficie regolari a generi nulli, aventi divisori $\sigma = 2, 4, 8, \dots$; esiste quindi una serie infinita di V_3 birazionalmente distinte, completamente regolari ed a generi e plurigeneri nulli, che non sono unirazionali.

5. Passiamo ad esaminare altri tipi di V dotate di divisore maggiore di uno; ed incominciamo colla V^6 « di Enriques », e cioè con la forma ⁽¹⁰⁾ di S_4 avente per sezione generica la F^6 del n. 2. Essa possiede sei piani doppi, intersezioni a due a due di quattro iperpiani, quattro rette triple, ed un punto O quadruplo. Assumendo tali iperpiani con le equazioni $x_i = 0$

(8) F. GAETA, loc. cit.

(9) G. FANO, « Rend. Acc. Lincei » (6), 15, 3 (1932).

(10) Questa forma è stata precedentemente considerata, da altri punti di vista, da Godeaux e da Fano; cfr. G. FANO, « Mem. Soc. Ital. delle Scienze » (3), 24, 41 (1938).

($i = 1, 2, 3, 4$), si vede che l'equazione di V^6 può scriversi sotto la forma

$$(2) \quad x_1 x_2 x_3 x_4 \{x_1^2 + x_5 f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)\} + \\ + \varphi_2(x_2 x_3 x_4, x_3 x_1 x_4, x_1 x_2 x_4, x_1 x_2 x_3) = 0,$$

ove f_i e φ_i denotano forme di ordine i nei rispettivi argomenti.

Anzitutto osserviamo che V^6 ha divisore $\sigma \geq 2$. V^6 è infatti un fascio di conici quadrici, ad esempio quello rappresentato dall'equazione $x_1 x_2 = \lambda x_3 x_4$, passanti per i quattro piani doppi incidenti, secondo rette, ad una data coppia C_1, C_2 di piani doppi opposti (aventi cioè il solo punto O a comune); detto fascio sega su V^6 , fuori di tali piani, un fascio $|C|$ di superficie quarte di Del Pezzo. Quindi, analogamente a quanto ottenuto nel n. 2, abbiamo su V^6 due superficie C_1, C_2 isolate⁽¹¹⁾ tali che $2C_1 \equiv 2C_2 \equiv C$; e poichè $\sigma \leq \sigma_0$, ove σ_0 denota il divisore di F^6 , segue che $\sigma = 2$.

Dimostriamo ora, con procedimento dovuto ad Enriques⁽¹²⁾, che V^6 è unirazionale e rappresentabile su una involuzione I_4 di S_3 . Per un punto semplice qualsiasi di V^6 passa uno ed un solo piano secante C_1 e C_2 secondo rette passanti per O , e l'intersezione residua di tale piano con V^6 è una conica, generalmente irriducibile. Su V^6 v è dunque una congruenza razionale e del 1° ordine di coniche⁽¹³⁾. Fissiamo una superficie C particolare e determiniamo per essa una rappresentazione birazionale, in modo che le coordinate del suo punto P generico vengon espresse in funzioni razionali di due parametri λ e μ . Per P passa una ed una sola conica della congruenza; per essa determiniamo una rappresentazione birazionale, in modo che le coordinate del suo punto Q generico - che è anche il punto generico di V^6 - vengon espresse come funzioni razionali di λ, μ e di un terzo parametro v . Evidentemente, ad un gruppo (λ, μ, v) di valori dati dei parametri, corrisponde in generale un unico punto Q di V^6 ; ma siccome detta conica è quadrisecante C , a Q corrispondono quattro gruppi (λ, μ, v) di valori. Quindi V^6 è rappresentabile sopra una involuzione I_4 ; ma poichè è dotata di divisore maggiore di uno, non può essere birazionale.

Quest'ultimo risultato mostra anche l'esistenza in S_3 di involuzioni irrazionali (di ordine 4). Per di più, siccome il cono che proietta V^6 da un S_r ($r \geq 0$) è unirazionale ed a divisore 2, discende che esistono delle involuzioni irrazionali in S_{r+4} .

(11) In caso contrario, C_1 e C_2 dovrebbero appartenere ad un fascio di superficie quadriche, il quale segherebbe sulla sezione F^6 generica di V^6 un fascio di coniche; ed allora F^6 risulterebbe razionale o riferibile a rigata.

(12) F. ENRIQUES, «Annali di Mat.» (3), 20, 109 (1913); cfr. anche L. ROTH, op. cit., cap. V.

(13) Partendo da una seconda coppia di piani doppi opposti di V^6 , possiamo costruire una congruenza, razionale e del 1° ordine, di coniche, che è certamente diversa dalla prima; quindi, in base ad un teorema di B. SEGRE (*Colloque international d'algèbre et de théorie des nombres* [Paris, 1949], p. 135), risulta che V^6 è unirazionale.

È chiaro che il sistema continuo di forme rappresentato dalla (2) contiene come casi particolari dei coni, proiettanti da O delle superficie di Enriques. Ebbene, tali coni, in base al n. 4, non sono unirazionali: si tratta quindi di un sistema continuo di varietà, il cui elemento generico è unirazionale, contenente tuttavia varietà particolari completamente regolari, a generi e plurigeneri nulli, ma non unirazionali.

Proiettando V^6 da O sopra un iperpiano S_3 , otteniamo una rappresentazione sullo spazio doppio con superficie di diramazione che consta di una superficie di Enriques; insieme ai quattro piani del relativo tetraedro: il che ci fornisce un esempio di un S_3 doppio che è unirazionale ma non birazionale.

6. Quale ulteriore esempio consideriamo un S_3 doppio avente per sezione generica il piano doppio del n. 2; in questo caso la superficie F^8 di diramazione consta di una superficie ϕ^6 irriducibile, dotata di retta r doppia nodale, e due rette r_1, r_2 doppie tacnodali; e di due piani, tangenti a ϕ^6 lungo r_1 e r_2 rispettivamente, e passanti per r . Supponiamo che le rispettive equazioni di r, r_1, r_2 siano $x_2 = x_3 = 0$; $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = x_4 = 0$; e che i piani tangenti suddetti abbiano equazioni $x_2 = 0$, $x_3 = 0$: allora si vede che l'equazione di ϕ^6 è della forma

$$(3) \quad x_2^2 f_4(x_3, x_4) + x_3^2 \phi_4(x_1, x_2) + x_1 x_2 x_3 x_4 f_1(x_1 x_3, x_2 x_4, x_2 x_3) = 0$$

Al sistema dei piani doppi di S_3 corrisponde sulla varietà W semplice un sistema $\infty^3 |G|$ lineare di superficie birazionalmente equivalenti alle F^6 di Enriques; ai piani tangenti lungo r_1 e r_2 rispettivamente corrispondono due punti base semplici di $|G|$; ed agli intorni di r_1 e r_2 corrispondono due superficie C_1, C_2 disequivalenti – in quanto segano delle curve disequivalenti su G – luoghi delle curve doppie ellittiche di $|G|$, e tali che $2C_1$ e $2C_2$ appartengono al fascio di superficie rappresentate dai piani doppi per r . Quindi W ha divisore $\sigma \geq 2$, e perciò non è birazionale.

Ora questi piani doppi per r rappresentano delle superficie razionali della « seconda famiglia » di Enriques ⁽¹⁴⁾, le quali sono unirazionali in $\gamma(P)$; quindi, se fissiamo una retta (propriamente) tritangente a ϕ^6 , e immagine dunque di una curva razionale bisecante il fascio, otteniamo senz'altro una rappresentazione unirazionale di W .

(14) Vedi L. ROTH, op. cit. cap. V.

Geometria algebrica. — *Complementi alla teoria delle varietà algebriche V_{r-2} di residuale finito in S_r .* Nota I di FEDERICO GAETA presentata (*) dal Socio F. SEVERI.

In questa breve Nota si espongono alcuni complementi alla teoria in oggetto⁽¹⁾ per inquadrarla entro quella delle varietà-base⁽²⁾, che è il suo campo naturale di validità. Ciò permette di costruire una teoria puramente algebrica degli H-ideali di residuale finito di dimensione $r-2$ nell'anello $K[x_0, x_1, \dots, x_r]$ (K corpo commutativo), la quale si può estendere inoltre agli ideali matriciali in un anello graduato qualsiasi. Ciò è tutt'altro che privo d'interesse geometrico. Basta pensare all'uso fatto da Andreotti degli ideali di funzioni theta per la classificazione delle superficie algebriche d'irregolarità $q (\geq 4)$, che presenta interessanti analogie col problema simile per le varietà immerse in uno spazio lineare⁽³⁾.

Inoltre si descrivono alcune famiglie di curve sghembe di residuale finito non trattate precedentemente. Questo studio permette di *caratterizzare le famiglie di curve origini di una catena completa di resti minimali successivi, mediante la condizione che tutti gli invarianti μ_{ij} ⁽⁴⁾ siano positivi.*

1. Comincerò col concetto di resto di una varietà algebrica pura V_{r-2} di S_r rispetto a due ipersuperficie $f_1 = 0, f_2 = 0$ passanti per essa. Se c è l'H-ideale nelle coordinate omogenee x_0, x_1, \dots, x_r individuate da V_{r-2} e c' quello individuato dal resto W_{r-2} sono verificate per definizione le⁽⁵⁾:

$$(I) \quad c = (f_1, f_2) : c' \quad , \quad c' = (f_1, f_2) : c .$$

L'intuizione geometrica, dalla quale è nato il concetto, richiede la simmetria del rapporto fra V_{r-2} ed W_{r-2} . Inoltre, per gli ideali non è sempre vera la relazione espressa da: $b = a : (a : b)$. Tuttavia una delle condizioni (1)

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) Sviluppata dall'A. nelle Memorie: *Sulle curve sghembe algebriche di residuale finito*. «Ann. di Matematica pura appl.», ser. IV, T. XXVII, 1948 (citata in seguito con R. F.) e *Nuove ricerche sulle curve sghembe algebriche di residuale finito e sui gruppi di punti del piano*. Stessi «Annali», ser. IV, t. XXXI, 1950 (citata in seguito con N. R.).

(2) Ved. SEVERI, *Les images géométriques des idéaux de polynômes*. «Comptes rendus de l'Acc. des Sciences de Paris», 25 juin 1951; *Propriétés des images géométriques des idéaux de polynômes* («C. R.», 2 juillet 1951); *Le diverse concezioni di varietà nella geometria algebrica*. «Mem. Acc. Nazionale dei XL», 1952.

(3) ANDREOTTI, *Sopra le varietà di Picard d'una superficie algebrica e sulla classificazione delle superficie irregolari*. «Rend. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. X, fasc. 5, 1951. Ved. inoltre il lavoro in collaborazione GAETA-ANDREOTTI di prossima pubblicazione negli «Annali di Matematica».

(4) N. R., p. 15. Chiamo *resto minimale* di una curva C quello rispetto a due superficie d'ordine minimo.

(5) N. R., p. 20.

implica l'altra come conseguenza di proprietà note degli H-ideali α di dimensione d di S_r con una base minima costituita da $r - d$ forme ⁽⁶⁾.

2. — Nella definizione di residuale data in N. R., basata sul concetto precedente di resto riferivo sempre le definizioni agli H-ideali puri (= ungemischt) rappresentativi delle varietà ammettendo la biunivocità senza eccezioni della corrispondenza fra H-ideali e varietà ⁽⁷⁾. Questa corrispondenza, che può sembrare *a priori* una mera identificazione formale, è suscettibile di un contenuto geometrico come ha mostrato recentemente Severi ⁽⁸⁾. Questo Autore distingue le varietà puntuali (*varietà intersezione* o *varietà semplici*, a seconda che si tenga o no conto della molteplicità d'intersezione in ciascun loro punto), da quelle concepite come varietà-base di sistemi lineari di ipersuperficie d'ordine $l = 1, 2, \dots$. Fra le varietà-base e gli H-ideali passa effettivamente una corrispondenza biunivoca senza eccezioni.

Ebbene, secondo queste idee, la teoria sviluppata in N. R. riguarda la varietà-base, senza le ipotesi restrittive inutili richieste in R. F., che sono applicabili alle varietà semplici. Ne segue la possibilità, accennata nell'introduzione, di costruire una teoria puramente algebrica riferibile agli ideali matriciali di $K[x_0, \dots, x_r]$ (con K commutativo senza caratteristica).

L'applicazione non corretta della teoria alle varietà semplici associate ad una data varietà-base può condurre ad alcuni paradossi. Per esempio entro il piano proiettivo (complesso) di coordinate omogenee x_0, x_1, x_2 l'ideale puro, a zero dimensioni $(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)$, quadrato dell'ideale (x_1, x_2) , rappresenta la varietà-base di tutte le curve piane passanti doppiamente per il punto O intersezione delle rette $x_1 = 0, x_2 = 0$. Essa è di residuale uno, come resto della varietà base (rappresentata da (x_1, x_2) , di tutte le curve piane passanti semplicemente per quel punto) rispetto alle rette doppie $x_1^2 = 0, x_2^2 = 0$.

In relazione alle varietà puntuali associate agli ideali (x_1, x_2) $(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)$ se si volesse dare un significato ad esse secondo la molteplicità d'intersezione di Severi ⁽⁹⁾ si vedrebbe che mentre il primo ideale è primo e rappresenta un punto, la molteplicità d'intersezione delle tre forme $x_1^2, x_1 x_2, x_2^2$ (o di tre coppie di rette generiche uscenti da O) è uguale a quattro secondo Severi. Inoltre la molteplicità d'intersezione delle due rette doppie

(6) Tutte le componenti primarie di questi ideali sono irriducibili (ved. KRULL, *Ideal-theorie*. «Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete», IV Band. 3, p. 67). Siccome non vi sono inoltre componenti immerse, segue la proprietà: $b = a : (a : b)$ per ogni H-ideale d -dimensionale contenente a (Ved. GRÖBNER, *Ueber irreduzible Ideale in kommutativen Ringen*. «Mathematische Annalen», Bd. 110, Heft. 2, 1934, p. 219).

(7) Ved. ad esempio GRÖBNER, *Moderne algebraische Geometrie*. Springer-Wien, 1949, § 2, n. 7.

(8) SEVERI, loc. cit. in (2).

(9) SEVERI, *Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni nei sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione*. «Annali di Matematica», ser. IV, vol. 26, 1947, riprodotta nel I volume delle *Memorie scelte*. Zuffi, Bologna, 1950, p. 327.

$x_1^2 = 0, x_2^2 = 0$ è uguale a quattro. Essendo $1 + 4 \neq 4$ non ha senso dire che la varietà semplice associata a $(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)$ è l'intersezione ulteriore (ed il resto) di $x_1^2 = 0, x_2^2 = 0$ fuori di O .

Tuttavia la varietà-base rappresentata da $(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)$ è limite della varietà-base di tutte le curve piane passanti per tre punti distinti non allineati. Lo si può riconoscere direttamente oppure considerando le superficie d'ordine $l (= 2, 3, \dots)$ passanti per una terna di rette non complanari uscenti da un punto P . Segando con un piano generico si ottiene il sistema lineare di tutte le curve d'ordine l di quel piano con tre punti base distinti. Segando invece con un piano generico per P si ottiene la totalità delle curve piane d'ordine l passanti doppiamente per P .

Analogamente si riconosce che la varietà-base delle curve piane d'ordine l con un punto base s -plo O è limite della varietà-base delle curve piane con $\binom{s+1}{2}$ punti base semplici distinti.

3. L'esempio precedente permette di mostrare che l'ideale (f_x, f_a) del n. 1 non è individuato necessariamente da c e c' . Infatti, nell'esempio precedente possiamo sostituire le rette doppie $x_1^2 = 0, x_2^2 = 0$ con due qualsiasi coppie di rette uscenti da O e non aventi rette comuni.

Questa situazione non si presenta quando gli ideali c, c' sono primi, e quindi le varietà V_{r-2}, W_{r-2} sono irriducibili. Allora l'ideale (f_x, f_a) è univocamente determinato come ideale individuato dalla varietà somma $V_{r-2} + W_{r-2}$.

4. Nel caso in cui la varietà semplice associata ad una varietà base di residuale finito di S_r sia irriducibile e priva di punti multipli, si presenta il problema di caratterizzare tali varietà. Si vede che condizione caratteristica è che la sezione della varietà con un generico S_3 sia aritmeticamente normale nel senso di Zariski ⁽¹⁰⁾. Per questa ragione nel primo stadio di queste ricerche risultava fondamentale il teorema inverso: *Ogni curva sghemba aritmeticamente normale è di residuale finito*. La proprietà risulta oggi subito osservando che la curva risulta perfetta nel senso di Macaulay ⁽¹¹⁾ ed ammette di conseguenza una rappresentazione matriciale, che permette di concludere come si è detto. Ma non era evidente nei primi tentativi di dimostrarlo geometricamente, usufruendo del fatto che l'ordine minimo n_x delle superficie passanti per un resto C_x aritmeticamente normale di una curva aritmeticamente normale data C , rispetto a due superficie d'ordine minimo per C , è minore del carattere analogo n per C . Se fosse possibile assicurare l'esistenza di resti

(10) *Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties*, « American Journal of Math. », LXI, 1939; MUHLY, *A remark on normal varieties*, « Annals of Math. », vol. 42, n. 1, 1942, p. 921.

(11) Ved. N. R., p. 13. Per le nozioni di ideali o varietà perfette, ved. MACAULAY, *The algebraic theory of modular systems*. Cambridge Tracts, N. 19, 1916, GRÖBNER, libro citato in (7); DUBREIL, « C. Rendus », Paris 1948, p. 548; APÉRY, *Thèse*, 1947.

minimali ⁽¹²⁾ irriducibili e privi di punti multipli, si potrebbe costruire una catena di resti minimali successivi, necessariamente finita, in quanto la successione decrescente $n > n_1 > n_2 > \dots$ deve finire quando si giunge ad un'intersezione completa.

Tuttavia, come dimostro nella II Nota, non è possibile giungere a una simile conclusione (e perciò il metodo non poteva riuscire!) perchè *esistono famiglie di curve di residuale finito, la cui curva generica è spezzata*.

Invece, partendo da una curva aritmeticamente normale C è sempre possibile costruire una catena di *resti massimali* successivi costituita da curve aritmeticamente normali.

Si presenta dunque il problema di caratterizzare le famiglie di curve la cui curva generica è origine di una catena di resti minimali successivi, problema che risolverò in una Nota successiva.

Geometria algebrica. — *Sopra la serie di Severi d'una superficie algebrica*. Nota di LOUIS NOLLET, presentata ^(*) dal Socio F. SEVERI.

Sia F una superficie irriducibile, senza punti multipli. È noto che la serie di equivalenza S di Severi fornisce l'interpretazione funzionale dell'invariante di Zeuthen-Segre I di F . Questa serie è invariante rispetto alle trasformazioni birazionali e biregolari della superficie e ha l'ordine $I + 4$ ⁽¹⁾. Essa presenta analogie colla serie canonica di una curva algebrica, epperò fu chiamata dapprima la serie canonica di F . Quando F è irregolare, la serie S contiene totalmente una serie di equivalenza S' , che è la *serie d'irregolarità* definita da Severi ⁽²⁾ come l'insieme dei gruppi Jacobiani degli integrali semplici di prima specie della superficie; la serie canonica di una curva di genere positivo può definirsi similmente. Comessatti ⁽³⁾ ha enunciato, accennando la deduzione, e Severi ha compiutamente dimostrato ⁽⁴⁾, che la serie S della superficie F è la serie caratteristica virtuale della diagonale $F \times F$, allo

(12) Ho sostituito la denominazione *ridotta* (réduite) di LÉGAUT, precursore di queste ricerche, con quella di *resti minimali* (ved. nota (4)), appunto perchè occorre considerare i *resti massimali* di una curva C , cioè quelli rispetto a due superficie generatrici d'ordine massimo (ved. N. R., p. 16, R. F. p. 232). I resti massimali di una curva di residuale p sono quelli d'ordine massimo e residuale $p - 1$.

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) F. SEVERI, *Un nuovo campo di ricerche geometriche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*. «Mem. Acc. d'Italia», 4, 71-129 (1932).

(2) F. SEVERI, *La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica*. «Comm. Math. Helv.», 4, 268-326 (1932).

(3) A. COMESSATTI, *Sulla serie canonica d'una superficie algebrica*. «Rend. Acc. Lincei», ser. 6^a, XVI, 555-560 (1932).

(4) F. SEVERI, *Le involuzioni razionali sopra una superficie come serie d'equivalenza*. 2 Note. «Rend. della R. Acc. dei Lincei», XIX (1934). Un'altra dimostrazione dello stesso Autore trovasi a p. 335 del volume sottocitato sulle *Serie, sistemi d'equivalenza, ecc.*

stesso modo che la serie canonica di una curva C è, a meno del segno, la serie caratteristica virtuale della diagonale $C \times C$.

L'analogia può essere spinta più a fondo. Severi ⁽⁵⁾ e Dantoni ⁽⁶⁾ hanno invero dimostrato che se F è irrazionale e priva di curve eccezionali di prima specie, la condizione $I + 4 = 0$ è necessaria e sufficiente perchè F possieda un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè. Le superficie ellittiche e iperellittiche sono caratterizzate dal valore 0 di $I + 4$ venendo così a corrispondere alle curve ellittiche ($2p - 2 = 0$, ove p è il genere della curva); le superficie riferibili a rigata di genere $q > 1$, sono caratterizzate dai valori negativi di $I + 4$ e corrispondono perciò alle curve razionali ($2p - 2 < 0$).

Sopra una curva C di genere p , l'ordine $2p - 2$ della serie canonica è sempre pari. È naturale domandarsi se l'ordine $I + 4$ della serie S possa assumere tutti i valori interi. Naturalmente, dato che $I + 4$ è un invariante relativo, dovremo supporre F priva di curve eccezionali di prima specie.

Sotto queste ipotesi, se $I + 4 < 0$, già sappiamo ⁽⁵⁾ che $I + 4 = -4(q - 1)$ è un multiplo di 4. Se invece $I + 4$ è positivo, può essere un multiplo di 4 aumentato di 0, 1 o 3. Infatti nello spazio proiettivo a tre dimensioni ogni superficie d'ordine n priva di punti multipli ha:

$$I + 4 = 2(n - 1)(n - 2)(n - 3) + 12 - n(n - 4)^2.$$

In questo lavoro dimostreremo che I non può valere -3 ; ossia che la serie di Severi non ha mai l'ordine uguale ad uno.

Si può pensare d'accostare questo risultato ad un teorema ottenuto nel 1942 da Severi in una bellissima Memoria delle *Commentationes* della Pontificia Accademia delle Scienze ⁽⁷⁾: se i punti d'una superficie algebrica F formano una serie di equivalenza s , F è regolare di genere geometrico nullo. Ora è pressochè immediato che F deve essere irregolare quando $s = S$ è d'ordine 1.

Il nostro risultato non è tuttavia una conseguenza di questo teorema: basta ricordare che la serie S è formata di gruppi *virtuali* di punti, d'ordine 1 nel caso che ci interessa, e non contiene necessariamente una serie superficiale effettiva come s . Al contrario i metodi utilizzati da Severi nella citata Memoria del 1942 permettono di dimostrare che, se F ha la serie S d'ordine 1, allora F è di irregolarità 2, di genere aritmetico 0, di genere lineare 12 e di numero base 2 o 3.

La serie di irregolarità di F è allora curvilinea e completa come serie a circolazione lineare nulla e come serie di equivalenza di punti effettivi. Noi abbiamo adottato un'altra via per pervenire alla dimostrazione del risultato enunciato, fondata sull'interpretazione funzionale dell'invariante di Zeuthen-Segre.

(5) F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*. Ed. Cremonese, Roma, 1942, cap. VI.

(6) G. DANTONI, *Determinazione delle superficie con serie di Severi di ordine nullo o negativo*. «Atti Acc. d'Italia», 14, 39-49 (1943).

(7) F. SEVERI, *Ulteriori sviluppi della teoria delle serie d'equivalenza sulle superficie algebriche*. «Comm. Pontif. Acc. Sc.», 6, 967-1029, (1942).

1. Sia F una superficie algebrica irriducibile senza punti multipli, nè curve eccezionali e sia $I = -3$.

Colle notazioni usuali, la formula di Picard-Alexander dà:

$$(1) \quad \rho + \rho_0 = 4g - 1$$

mentre quella di Noether dà:

$$(2) \quad p^{(1)} = 12(p_a + 1)$$

Siccome $\rho \geq 1$ e $\rho_0 \geq 0$, ne segue per la (1), che l'irregolarità di F è positiva.

Se F è riferibile a una rigata di genere g , deve essere $\rho_0 = 0$; e poichè F è senza curve eccezionali di prima specie, $\rho = 2$. La (1) diviene allora $4g = 3$. È quindi impossibile che F sia riferibile a rigata ossia, per il teorema di Noether-Enriques che essa contenga un fascio di curve razionali.

Questo ci permette di dire che il genere lineare di F è $p^{(1)} \geq 1$. Allora la (2) mostra che il genere aritmetico p_a di F non è negativo e che $p^{(1)} \geq 12$. F non può dunque possedere fasci di curve ellittiche.

Se F possiede un fascio di genere $x > 0$, di curve di genere p , si sa che:

$$4(x-1)(p-1) + \Delta = I + 4 = 1$$

e $\Delta \geq 0$, $p \geq 2$. Donde $x = 1$.

In ogni caso x è inferiore all'irregolarità g di F . Per provarlo è sufficiente ridurre all'assurdo l'ipotesi $g = 1$. Se $g = 1$, la superficie possiede un fascio ellittico di curve di grado 0. Dunque $\rho \geq 2$. D'altronde la disuguaglianza di Severi ⁽⁸⁾ porta $\rho_0 \geq 2p_g = 2(p_a + 1) \geq 2$. Sarebbe pertanto $\rho + \rho_0 \geq 4$, mentre la (1) dà $\rho + \rho_0 = 3$.

2. Riferiamoci ad una proiezione generica di F in uno spazio proiettivo a tre dimensioni e fissiamo su F due integrali semplici di prima specie u_1 e u_2 , linearmente indipendenti. Questi integrali sono funzionalmente indipendenti, altrimenti F conterrebbe un fascio di genere $x \geq 2$ ⁽⁹⁾, ciò che si è visto non poter essere.

Possiamo dunque supporre che il gruppo jacobiano $J(\lambda)$ dell'integrale $u(\lambda) = u_1 + \lambda u_2$ sia effettivo, salvo per un numero finito di valori $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ di λ ⁽¹⁰⁾. Il luogo di $J(\lambda)$ è una curva canonica (principale) K della superficie F ⁽¹¹⁾; $J(\lambda_i)$ è una curva algebrica K_i , parte di K ($i = 1, \dots, t$).

Al variare di λ , per valori distinti da $\lambda_1, \dots, \lambda_t$, il punto $J(\lambda)$ percorre un luogo che, insieme ai suoi punti di accumulazione è una curva algebrica K_0 , parte di K . Poichè K_0 è l'immagine di un'involuzione sopra la retta λ , K_0 è irriducibile e razionale.

(8) F. SEVERI, *Osservazioni a proposito della Nota di E. Kähler « Sui periodi, ecc. »*. « Rend. Circolo Mat. Palermo », LVI (1932).

(9) G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo*. « Rend. Circolo Mat. Palermo », XX, 1905.

(10) Loc. cit. in (2), n. 18.

(11) Loc. cit. in (2), n. 12.

Lungo K_0 , l'integrale $u(\lambda)$ conserva valore costante $c_0(\lambda)$. Fissato λ diverso da $\lambda_1, \dots, \lambda_t$, le curve di livello di $u(\lambda)$ formano un fascio analitico, nel quale una curva $E(\lambda)$ è dotata di un punto doppio $J(\lambda)$ situato su K_0 . L'equazione di $E(\lambda)$ è dunque $u(\lambda) = c_0(\lambda)$. K_0 fa dunque parte di $E(\lambda)$, e quest'ultima curva si completa con la curva analitica $\bar{E}(\lambda)$, senza punti multipli, che taglia K_0 nel punto $J(\lambda)$. Ciò mostra che K_0 è priva di punti multipli e quindi di genere virtuale 0.

Poichè il genere virtuale di K è $\rho^{(1)} \equiv 12$, K_0 non esaurisce la curva K epperò $t > 0$ e $K = K_0 + K_1 + \dots + K_t$.

3. Dimostriamo che $u(\lambda_i)$ resta costante lungo K_i e vi assume il valore $c_0(\lambda_i)$. Ci appoggeremo, per questa dimostrazione, sul fatto che $u(\lambda_i)$ è costante sopra ogni componente irriducibile di $K_i^{(12)}$ e sul fatto che K è topologicamente connessa.

Osserviamo subito che per i diverso da j , K_i e K_j non hanno punti comuni chè un tal punto appartenendo al gruppo jacobiano dei due integrali indipendenti $u(\lambda_i)$ e $u(\lambda_j)$, apparterrebbe al gruppo jacobiano di ogni integrale u di F e quindi $J(\lambda)$ sarebbe fisso.

Se dunque si percorre una parte connessa di K a partire da una componente θ_i di K_i , non si può abbandonare la curva K_i senza percorrere un pezzo di K_0 .

Osserviamo inoltre che K_i e K_0 hanno sempre almeno un punto comune. Infatti, dato che K è connessa, $[K_i, K - K_i]$ è positivo; d'altronde K_i non ha alcun punto comune con $K - K_0 - K_i$; pertanto $[K_i, K_0] > 0$.

Se K_i è irriducibile o multiplo di una curva irriducibile, il nostro asserto è senz'altro verificato. Supponiamo al contrario che a, b siano due componenti distinte di K_i di cui la prima incontra K_0 . Poichè K è connessa, esiste una parte connessa di K che incontra sia a che b . Percorriamola nel senso da b verso a senza abbandonare K_i ; incontreremo su questa catena sia a che K_0 . Di qui il nostro asserto.

Ne viene che il gruppo jacobiano K_i di $u(\lambda_i)$ è l'insieme dei punti doppi della curva $u(\lambda_i) = c_0(\lambda_i)$, limite di $E(\lambda)$ per $\lambda \rightarrow \lambda_i$.

Le curve $\bar{E}(\lambda)$ formano un fascio, poichè l'equazione $u_1(P) + \lambda u_2(P) = c_0(\lambda) = c_0(0) + \lambda c_0(\infty)$ è di primo grado in λ . Di più, per λ qualsiasi, si sa che $[\bar{E}(\lambda), K_0] = 1$.

K_i è l'insieme delle componenti multiple di $E(\lambda_i)$, ciascuna contata un conveniente numero di volte; poichè K_i interseca K_0 , esistono delle componenti multiple di $\bar{E}(\lambda_i)$ che intersecano K_0 ; pertanto $[\bar{E}(\lambda_i), K_0] > 1$. Risulta così che $\bar{E}(\lambda_i)$ contiene come parte K_0 epperò, siccome le $\bar{E}(\lambda)$ formano fascio, $\bar{E}(\lambda)$ interseca K_0 in un punto fisso $J(\lambda)$, e ciò è assurdo.

Questo assurdo ci permette concludendo di asserire che non esistono serie di Severi d'ordine 1.

(12) A. FRANCHETTA, *Sui sistemi pluricanonici di una superficie algebrica*. « Rend. Mat. Roma », VIII, 423-440 (1949).

Meccanica. — *Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti* (*). Nota II di DOMENICO CALIGO, presentata (**) dal Socio G. KRALL.

4. ASTA CON INCASTRO RIGIDO. — a) Il sistema differenziale, relativo al problema di un'asta omogenea (di lunghezza unitaria) libera ad un estremo ($\xi = 1$) e incastrata all'altro ($\xi = 0$) su suolo rigido, è il seguente:

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{d^4 w}{d\xi^4} - \delta^4 w(\xi) = 0, \\ w(\xi) \Big|_{\xi=0} = \frac{dw}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{d^2 w}{d\xi^2} \Big|_{\xi=1} = \frac{d^3 w}{d\xi^3} \Big|_{\xi=1} = 0, \end{cases}$$

e l'equazione delle frequenze:

$$(18) \quad \text{Ch } \delta \cdot \cos \delta + 1 = 0,$$

ovvero (poichè $\cos \delta \neq 0$):

$$(19) \quad \text{Cth } \frac{\delta}{2} = \text{tang } \frac{\delta}{2}.$$

La successione $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ degli autovalori (verificanti la (19)) ha la forma

$$(20) \quad \delta_\rho = (2\rho - 1) \frac{\pi}{2} + (-1)^{\rho-1} \varepsilon_\rho, \quad (\rho \geq 1),$$

con $0,304308 > \varepsilon_1 > 0,0183 > \varepsilon_2 > 0,038 > \varepsilon_3 > \varepsilon_4 > \dots > 0$.

Come preavvertito nella nota I, al § 5 tratteremo della risoluzione della (19) (e della (11)) e della determinazione dei numeri ε_ρ (η_ρ); nella tabella V sono riportati gli ε_ρ e i primi cinque autovalori.

Le autosoluzioni, normalizzate nell'intervallo $(0, 1)$, sono date dalle formule (21):

$$(21) \quad u_\rho(\xi) = - \left[\text{Ch } \delta_\rho \xi - \cos \delta_\rho \xi + \frac{A_\rho}{B_\rho} (\text{Sh } \delta_\rho \xi - \text{sen } \delta_\rho \xi) \right],$$

con

$$(22) \quad - \frac{A_\rho}{B_\rho} = \frac{\text{Sh } \delta_\rho - \text{sen } \delta_\rho}{\text{Ch } \delta_\rho + \cos \delta_\rho}, \quad (\rho \geq 1).$$

Per le applicazioni è talvolta necessario associare alle (21) l'autosoluzione (a cui conveniamo di attribuire l'ordine zero)

$$(21_0) \quad u_0(\xi) = \sqrt{3} \xi$$

pur essa normalizzata in $(0, 1)$ e corrispondente a una rotazione rigida nell'incastro. (N. B. — La (21_0) non appartiene alla classe delle (21), perchè non verifica la condizione $u'(0) = 0$, che è fra le (17)).

(*) Lavoro eseguito nell'Ist. Naz. per le Applicazioni del Calcolo; la Nota I è stata pubblicata su questi « Rendiconti », vol. XII, fasc. 1, pp. 76-83 (1952).

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) Cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni* (Zanichelli, Bologna 1940), vol. II, cap. XIII, § 1, n. 4 (pp. 281-282); cfr. anche G. KRALL, *Un progetto di torri piloni alte 200 m., ecc.* (in « Ingegneria Ferroviaria », febbraio 1948, Roma).

b) Se indichiamo ancora con E, \mathfrak{J}, μ, q , rispettivamente, il modulo di elasticità, il momento d'inerzia della sezione resistente, le masse e le forze perturbanti - per unità di lunghezza -, lo studio delle deformazioni dovuto all'intervento di perturbazioni del tipo $q(x, t) = q(x) e^{i \nu t}$, ($i = \sqrt{-1}$), richiede il calcolo degli integrali (3) (cfr. § 1) - nei quali si legga u in luogo di w - e dell'integrale, analogo a (3'') (cfr. § 3, *b*))

$$(3''') \quad f_q = \int_0^x \frac{q(\xi)}{q_0} u_q(\xi) d\xi.$$

I fattori $\mu(\xi)/\mu_0, j(\xi), q(\xi)/q_0$ sono ancora i polinomi di terzo grado (4) e (4') - con ξ in luogo di ξ' -; gli integrali (3) risultano perciò combinazioni lineari dei seguenti:

$$(23) \quad U_{q\tau, h} = \int_0^x \xi^h u_q(\xi) u_\tau(\xi) d\xi, \quad U_{q\tau, h}^{(2)} = \int_0^x \xi^h \frac{d^2 u_q}{d\xi^2} \frac{d^2 u_\tau}{d\xi^2} d\xi, \quad U_{q, h} = \int_0^x \xi^h u_q(\xi) d\xi,$$

per il calcolo dei quali è ancora di massima utilità tenere presente che i δ_q verificano la (18) e la (19) e notare che ne segue, per la (22), la identità

$$(24) \quad -\frac{A_q}{B_q} = \frac{\text{Sh } \delta_q}{\text{Ch } \delta_q + (-1)^{q-1}}$$

a cui si può applicare la formula (5), ponendovi $m = q - 1$.

c) Ripetiamo le posizioni (15) $\delta_q = \alpha, \delta_\tau = \beta$ e utilizziamo le notazioni del § 2, ponendovi $m = \rho - 1, n = \tau - 1$; e - se $\tau > \rho$ -: $i = 1$, per ρ, τ dispari; $i = 2$, per ρ, τ pari; $i = 3$, per ρ dispari, τ pari; se invece $\tau < \rho$, ρ dispari e τ pari: $i = 4$. Per gli integrali (23) si ottengono le espressioni qui sotto riportate:

$$U_{0, h} = \frac{\sqrt{3}}{h+2}, \quad (h \geq 0),$$

$$U_{q, h} \left\{ \begin{array}{ll} = -\frac{2}{\alpha} \frac{\text{Sh } \alpha}{\text{Ch } \alpha + (-1)^{q-1}} & , \quad \text{se } h = 0, \\ = -\frac{2}{\alpha^2} & , \quad \text{se } h = 1, \\ = (-1)^q \frac{4}{\alpha^3} \frac{\text{Sh } \alpha}{\text{Ch } \alpha + (-1)^{q-1}} & , \quad \text{se } h = 2, \\ = (-1)^q \frac{12}{\alpha^3} \left[\frac{\text{Sh } \alpha}{\text{Ch } \alpha + (-1)^{q-1}} - \frac{1}{\alpha} \right] & , \quad \text{se } h = 3, \\ = (-1)^q \frac{48}{\alpha^3} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)^q}{\alpha^2} \right) \frac{\text{Sh } \alpha}{\text{Ch } \alpha + (-1)^{q-1}} - \frac{1}{\alpha} \right] & , \quad \text{se } h = 4^{(2)}; \end{array} \right.$$

(2) Vale la pena di rilevare che le (20) e (21), introdotte nelle (17), forniscono $\alpha^4 \int_0^x \xi^h u_q(\xi) d\xi = \int_0^x \xi^h u_q^{(IV)}(\xi) d\xi$ e - mediante successive integrazioni per parti -

$$U_{q, h} = \frac{h(h-1)}{\alpha^4} [u'_q(1) - (h-2)u_q(1) + (h-2)(h-3)U_{q, h-4}] \quad , \quad \text{per } \rho \geq 1, h \geq 4,$$

dove $u_q(1) = (-1)^{q-2}, u'_q(1) = (-1)^{q-2} \alpha \frac{\text{Sh } \alpha}{\text{Ch } \alpha + (-1)^{q-1}}$. Analogamente si trova

$$\int_0^x \xi^{h-2} \frac{d^2 u_q}{d\xi^2} d\xi = \frac{\alpha^4}{h(h-1)} U_{q, h} \quad , \quad \text{per } \rho \geq 1, h \geq 2.$$

$$U_{0q,h} = \sqrt{3} U_{q,h+1} \quad , \quad (\rho \geq 0, h \geq 0);$$

$$U_{q\tau,0} \begin{cases} = 1 & , \quad \text{se } \tau = \rho, \\ = 0 & , \quad \text{se } \tau \neq \rho; \end{cases} \quad U_{q\tau,h} = U_{\tau q,h};$$

$$U_{q\tau,1} \begin{cases} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\alpha^2} \left(-\frac{A_0}{B_0} \right)^2 & , \quad \text{se } \tau = \rho \geq 1, \\ = (-1)^{q+\tau} \cdot 8 \cdot \left[1 - (-1)^{q+\tau} \frac{2\gamma^2}{1+\gamma^4} \right] M^{(i)}(\alpha, \beta) & , \quad \text{se } \tau \neq \rho; \end{cases}$$

$$U_{q\tau,2} \begin{cases} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha^2} \left(-\frac{A_0}{B_0} \right) \left[\frac{3}{2} \left(-\frac{A_0}{B_0} \right) + \frac{1}{\alpha} \right] & , \quad \text{se } \tau = \rho \geq 1, \\ = (-1)^{q+\tau} \cdot 16 \left\{ M^{(i)}(\alpha, \beta) + \frac{1 + (-1)^{q+\tau}}{2} N_1^{(i)}(\alpha, \beta) + \right. \\ \left. + \frac{1 - (-1)^{q+\tau}}{2} N_2^{(i)}(\alpha, \beta) \right\} & , \quad \text{se } \tau \neq \rho; \end{cases}$$

$$U_{q\tau,3} \begin{cases} = \frac{1}{4} + \frac{3}{\alpha^2} \left[\frac{2}{\alpha^2} - \frac{3}{2\alpha} \left(-\frac{A_0}{B_0} \right) + \frac{3}{4} \left(-\frac{A_0}{B_0} \right)^2 \right] & , \quad \text{se } \tau = \rho \geq 1; \\ = (-1)^{q+\tau} \cdot 24 \left\{ M^{(i)}(\alpha, \beta) + N_1^{(i)}(\alpha, \beta) + N_2^{(i)}(\alpha, \beta) - \frac{1 - (-1)^{q+\tau}}{2} L^{(i)}(\gamma^2) - \right. \\ \left. - \frac{1 + (-1)^{q+\tau}}{2} L^{(i)}(-\gamma^2) \right\} & , \quad \text{se } \tau \neq \rho; \end{cases}$$

$$U_{0q,h}^{(2)} = 0 \quad , \quad (\rho \geq 0, h \geq 0) \quad ; \quad U_{q\tau,h}^{(2)} = U_{\tau q,h}^{(2)} \quad ; \quad U_{q\tau,0}^{(2)} \begin{cases} = \alpha^4 & , \quad \text{se } \tau = \rho \geq 1, \\ = 0 & , \quad \text{se } \tau \neq \rho; \end{cases}$$

$$U_{q\tau,1}^{(2)} \begin{cases} = \alpha^4 \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha^2} \left(-\frac{A_0}{B_0} \right)^2 \right] & , \quad \text{se } \tau = \rho \geq 1, \\ = (-1)^{q+\tau+1} \alpha^2 \beta^2 U_{q\tau,1} & , \quad \text{se } \tau \neq \rho; \end{cases}$$

$$U_{q\tau,2}^{(2)} \begin{cases} = \alpha^4 \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha^2} \left(-\frac{A_0}{B_0} \right) \left[\frac{5}{2} \left(-\frac{A_0}{B_0} \right) - \frac{1}{\alpha} \right] \right\} & , \quad \text{se } \tau = \rho \geq 1, \\ = (-1)^{q+\tau} \cdot 16 \alpha^2 \beta^2 \left\{ \frac{2\gamma^2}{1+\gamma^4} M^{(i)}(\alpha, \beta) + \frac{1 + (-1)^{q+\tau}}{2} N_1^{(i)}(\alpha, \beta) - \right. \\ \left. - \frac{1 - (-1)^{q+\tau}}{2} N_2^{(i)}(\alpha, \beta) \right\} & , \quad \text{se } \tau \neq \rho; \end{cases}$$

$$U_{q\tau,3}^{(2)} \begin{cases} = \alpha^4 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{\alpha^2} \left[\frac{2}{\alpha^2} - \frac{5}{2\alpha} \left(-\frac{A_0}{B_0} \right) + \frac{5}{4} \left(-\frac{A_0}{B_0} \right)^2 \right] \right\} & , \quad \text{se } \tau = \rho \geq 1, \\ = (-1)^{q+\tau} 24 \alpha^2 \beta^2 \left\{ \frac{2\gamma^2}{1+\gamma^4} M^{(i)}(\alpha, \beta) + N_1^{(i)}(\alpha, \beta) - N_2^{(i)}(\alpha, \beta) - \right. \\ \left. - \frac{1 - (-1)^{q+\tau}}{2} L^{(i)}(\gamma^2) + \frac{1 + (-1)^{q+\tau}}{2} L^{(i)}(-\gamma^2) \right\} & , \quad \text{se } \tau \neq \rho. \end{cases}$$

Al calcolo di queste espressioni ha giovato la (24) e la osservazione che dalla (18) segue (per $\delta = \delta_q = \alpha$)

$$(18') \quad \cos \alpha = -\frac{1}{\operatorname{Ch} \alpha},$$

e dalla (19)

$$\operatorname{Cth} \frac{\alpha}{2} = (-1)^{q-1} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \quad , \quad (\rho \geq 1).$$

La tabella VI contiene gli integrali f_q per $0 \leq \rho \leq 5$; le tabelle VII e VIII contengono, rispettivamente, gli integrali $\mu_{q\tau}$, $\varepsilon_{q\tau}$ per ρ e τ compresi fra 0 e 5.

d) *Valutazioni asintotiche.* - Con la medesima convenzione, adottata al § 3, c), si possono dare le seguenti espressioni asintotiche per gli integrali (23):

$$U_{q,0} \sim -2 \cdot O[(\rho\pi)^{-1}] \quad , \quad U_{q,1} \sim -2 \cdot O[(\rho\pi)^{-2}] \quad , \quad U_{q,h} \sim (-1)^q \cdot \frac{4!}{(5-h)!} \cdot O[(\rho\pi)^{-3}] ,$$

$$(2 \leq h \leq 4) ;$$

fissato poi uno degli indici, quando ρ e τ sono diversi fra loro,

$$U_{q\tau,1} \begin{cases} \sim \frac{1}{2} + 2 \cdot O[(\rho\pi)^{-2}] & , \quad \text{se } \tau = \rho, \\ \sim (-1)^{q+\tau} \cdot 8 \alpha \cdot O[(\tau\pi)^{-3}] & ; \quad U_{q\tau,1}^{(2)} \sim -8 \alpha^3 \cdot O[(\tau\pi)^{-1}] \quad , \quad \text{se } \tau \neq \rho; \end{cases}$$

$$U_{q\tau,2} \begin{cases} \sim \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \cdot O[(\rho\pi)^{-2}] & , \quad \text{se } \tau = \rho, \\ \sim (-1)^{q+\tau} \cdot 16 \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \cdot O[(\tau\pi)^{-3}] & ; \quad U_{q\tau,2}^{(2)} \sim 8 \alpha^2 \cdot O[(\tau\pi)^{-1}] \quad , \quad \text{se } \tau \neq \rho; \end{cases}$$

$$U_{q\tau,3} \begin{cases} \sim \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cdot O[(\rho\pi)^{-2}] & , \quad \text{se } \tau = \rho, \\ \sim (-1)^{q+\tau} \cdot 24 \left(\alpha + 1 \right) \cdot O[(\tau\pi)^{-3}] & ; \quad U_{q\tau,3}^{(2)} \sim 24 \alpha^2 \cdot O[(\tau\pi)^{-1}] \quad , \quad \text{se } \tau \neq \rho; \end{cases}$$

gli $U_{q\tau,h}^{(2)}$ sono infiniti (per $\rho \rightarrow +\infty$) come $(\rho\pi)^4$.

5. SULLA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DELLE FREQUENZE. - a) Lord Rayleigh ⁽³⁾ ha osservato che la (11), a causa delle (12) equivale alla

$$(25) \quad e^{(-1)^q - 1} \eta_q \cdot \cotg \frac{\eta_q}{2} = e^{(2q-1) \frac{\pi}{2}} \quad , \quad (\rho \geq 2),$$

e che la (19), a causa della (20), equivale alla

$$(26) \quad e^{(-1)^q} \varepsilon_q \cdot \cotg \frac{\varepsilon_q}{2} = e^{(2q-1) \frac{\pi}{2}} \quad , \quad (\rho \geq 1);$$

poiché - fissato ρ - i secondi membri delle (25) e (26) sono costanti note, la determinazione approssimata di η_q e di ε_q si può ottenere dopo avere sviluppato in serie di potenze le funzioni $\cotg \chi/2$, $e^{\pm \chi}$.

Interessanti metodi di approssimazioni successive vengono anche consigliati e sperimentati da Hohenemser e Prager ⁽⁴⁾; essi hanno loro permesso di rilevare, come è accaduto indipendentemente anche a noi, un errore nel secondo autovalore fornito da Lord Rayleigh per il problema del § 4.

Ma noi abbiamo preferito risolvere la (10) e la (18) con un metodo diverso e di facile applicazione, del quale preciseremo i vantaggi alla fine del presente paragrafo. Poniamo

(3) J. W. STRUTT, baron RAYLEIGH, *The theory of Sound* (Macmillan, London 1944, ristampa), vol. I, § 174.

(4) K. HOHENEMSER und W. PRAGER, *Dynamik der Stabwerke* (Springer, Berlin 1933), cap. III, § 11 (p. 144 e sgg.).

$$(27) \quad C_q = \text{Ch}(2\rho - 1) \frac{\pi}{2}, \quad S_q = \text{Sh}(2\rho - 1) \frac{\pi}{2},$$

$$(28_j) \quad f_j(\chi) \equiv -1 + [C_q \text{Ch} \chi + (-1)^{q-j} S_q \text{Sh} \chi] \text{sen} \chi, \quad (j = 0, 1).$$

La risoluzione della (10) equivale alla risoluzione della

$$(28_0) \quad f_0(\eta) = 0, \quad (\rho \geq 2, 0 < \eta < 0,018),$$

e la risoluzione della (18) a quella della

$$(28_1) \quad f_1(\varepsilon) = 0, \quad (\rho \geq 1, 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{8}).$$

Poichè

$$\frac{d^{(4r+s)} f_j}{d\chi^{4r+s}} = -4 \frac{d^{4(r-1)+s} f_j}{d\chi^{4(r-1)+s}}, \quad \text{se } 4r+s > 4; r=1, 2, \dots; s=0, 1, 2, 3;$$

$$\frac{d^4 f_j}{d\chi^4} = -4 [f_j(\chi) + 1], \quad (j = 0 \text{ o } 1),$$

la (28_j) ha il seguente sviluppo in serie, che risulta a segni alternati:

$$(29) \quad f_j(\chi) \equiv -1 + \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l (2\chi^2)^{2l} \left\{ C_q \chi \left[\frac{1}{(4l+1)!} + \frac{2\chi^2}{(4l+3)!} \right] + \right. \\ \left. + (-1)^{q-j} S_q \frac{2\chi^2}{(4l+2)!} \right\}.$$

Si constata che arrestando lo sviluppo (29) al primo termine ($l=0$) si ha, in luogo di ciascuna delle (28_j), una equazione di III grado, che fornisce, fissato m , valori di η_0 (rispettivamente di ε_0 , se $j=1$) ⁽⁵⁾ concordanti con quelli di Lord Rayleigh almeno per le prime sette cifre decimali. *Le tabelle I e V sono state costruite con un calcolo più accurato* e corredate dei valori di $(\text{Sh} \delta_0)/(\text{Ch} \delta_0 + (-1)^{q-j})$, $\sigma_{j,q}$ per un comodo confronto.

b) Il procedimento adottato presenta tre notevoli vantaggi: 1° tutte le quantità usate possono essere calcolate facilmente e indipendentemente dal ricorso a tavole; 2° esse e i risultati, che ne conseguono, possono ottenersi con quante cifre significative occorranzo, purchè si conservi un adeguato numero di termini nello sviluppo (29); 3° la risoluzione di equazioni trascendenti viene sostituita da quella di equazioni algebriche.

Il calcolo degli autovalori si può ordinare così:

α) tabellazione delle (27) (dai valori di $e^{\pi/2}$, $e^{-\pi/2}$ si deducono quelli di $e^{(2q-1)\pi/2}$), dai quali - con semisomma o semidifferenza - si ricavano le due funzioni iperboliche;

β) prendendo i primi termini dello sviluppo (29), risoluzione delle corrispondenti equazioni di III, IV, ... grado in χ e valutazione approssimata di η_0 ovvero di ε_0 ;

(5) L'errore, che si commette, non supera in valore assoluto

$$\sigma_{j,q} = (2\chi^2)^2 \left\{ C_q \chi \left(\frac{1}{5!} + \frac{2\chi^2}{7!} \right) + (-1)^{q-j} S_q \frac{2\chi^2}{6!} \right\}.$$

γ) verifica del valore approssimato di η_0 (o di ε_0) scelto, sostituendolo nella (28₀) - ovvero nella (28₁) - e determinazione di β_0 - ovvero di δ_0 - con le (12) - oppure con le (20) - (6).

TABELLE.

V. - Autovalori δ_0 per l'asta incastrata ad un estremo e libera all'altro.

p	e	δ_0	$\frac{\text{Sh } \delta_0}{\text{Ch } \delta_0 + (-1)^{p-1}}$	$\sigma_{1,e}$
1	0,30430 77419 17	1,87510 40687 12	0,73409 55137 59	$2 \cdot 10^{-4}$
2	0,01829 78474 10	4,69409 11329 74	1,01846 73187 59	$38 \cdot 10^{-10}$
3	0,0 ³ 77 58042 631	7,85475 74382 376	0,99922 44965 1746	$12 \cdot 10^{-15}$
4	0,0 ⁴ 3 35526 888	10,99554 07348 755	1,0 ⁴ 3 35532 517	$4 \cdot 10^{-20}$
5	0,0 ⁵ 14498 9240	14,13716 83910 4647	0,9 ⁵ 85501 0865	$15 \cdot 10^{-26}$

VI. - Integrali f_0 per l'asta con incastro rigido.

p	f_0
0	0,866 025 - 0,577 350 q_1 - 0,433 0127 q_2 - 0,346 4102 q_3
1	- 0,782 992 + 0,568 826 q_1 + 0,445 3859 q_2 + 0,365 4694 q_3
2	- 0,433 936 + 0,090 7668 q_1 - 0,039 3870 q_2 - 0,093 4451 q_3
3	- 0,254 425 + 0,032 4164 q_1 + 0,008 2475 q_2 + 0,021 5902 q_3
4	- 0,181 898 + 0,016 5423 q_1 - 0,003 0090 q_2 - 0,008 206 11 q_3
5	- 0,141 471 + 0,010 0070 q_1 + 0,001 4157 q_2 + 0,003 946 69 q_3

(6) Una tabellazione assai ampia delle funzioni delle frequenze per i diversi problemi dell'asta si trova nell'op. cit. alla nota (4), pp. 323-343, essendo tali funzioni definite al cap. III, § 6 della stessa opera. Dobbiamo avvertire che nelle citate tabelle ci è avvenuto, casualmente, di riscontrare due errori: uno alla terza colonna di p. 338, per $\lambda = 7,26$, ove deve essere letto 191,33223, anzichè 191,33181; un altro alla prima colonna di p. 339, per $\lambda = 7,66$, ove deve essere letto 205,50284, anzichè 205,50584. Si segnala anche, per la teoria degli autovalori: L. COLLATZ, *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung* (Chelsea, N. Y. 1948); vi si veda in particolare l'utile riepilogo alle pp. 146-147.

VII. — Integrali $\mu_{\alpha\gamma}$ per l'asta con un incastro rigido.

$\mu_{00} = 1 - 0,75 m_1 -$ — $0,60 m_2 - 0,50 m_3$	$\mu_{10} = \mu_{01}$	$\mu_{20} = \mu_{02}$	$\mu_{30} = \mu_{03}$	$\mu_{40} = \mu_{04}$	$\mu_{50} = \mu_{05}$
$\mu_{01} = -0,985236 +$ + $0,7714310 m_1 +$ + $0,6330116 m_2 +$ + $0,5363195 m_3$	$\mu_{11} = 1 - 0,8065380 m_1 -$ — $0,6745833 m_2 -$ — $0,5791403 m_3$	$\mu_{21} = \mu_{12}$	$\mu_{31} = \mu_{13}$	$\mu_{41} = \mu_{14}$	$\mu_{51} = \mu_{15}$
$\mu_{02} = -0,1572127 -$ — $0,0682203 m_1 -$ — $0,1618517 m_2 -$ — $0,2009323 m_3$	$\mu_{12} = +0,1535168 m_1 +$ + $0,2191779 m_2 +$ + $0,2455573 m_3$	$\mu_{22} = 1 - 0,5941502 m_1 -$ — $0,4137927 m_2 -$ — $0,3239665 m_3$	$\mu_{32} = \mu_{23}$	$\mu_{42} = \mu_{24}$	$\mu_{52} = \mu_{25}$
$\mu_{03} = -0,0561469 +$ + $0,0142851 m_1 +$ + $0,0373953 m_2 +$ + $0,0666486 m_3$	$\mu_{13} = -0,0203232 m_1 -$ — $0,0583430 m_2 -$ — $0,0907298 m_3$	$\mu_{23} = +0,1908180 m_1 +$ + $0,2225393 m_2 +$ + $0,2155498 m_3$	$\mu_{33} = 1 - 0,5323661 m_1 -$ — $0,3596698 m_2 -$ — $0,2787096 m_3$	$\mu_{43} = \mu_{34}$	$\mu_{53} = \mu_{35}$
$\mu_{04} = -0,0286521 -$ — $0,0052117 m_1 -$ — $0,0142134 m_2 -$ — $0,0250657 m_3$	$\mu_{14} = +0,008787538 m_1 +$ + $0,01959643 m_2 +$ + $0,03420641 m_3$	$\mu_{24} = -0,02058420 m_1 -$ — $0,06540427 m_2 -$ — $0,09394062 m_3$	$\mu_{34} = +0,2006029 m_1 +$ + $0,2176599 m_2 +$ + $0,2050235 m_3$	$\mu_{44} = 1 - 0,5165434 m_1 -$ — $0,3464932 m_2 -$ — $0,2656367 m_3$	$\mu_{54} = \mu_{45}$
$\mu_{05} = -0,0173326 +$ + $0,0024521 m_1 +$ + $0,0068359 m_2 +$ + $0,0127783 m_3$	$\mu_{15} = -0,00376385 m_1 -$ — $0,01006858 m_2 -$ — $0,01724893 m_3$	$\mu_{25} = +0,01700876 m_1 +$ + $0,02744302 m_2 +$ + $0,04124194 m_3$	$\mu_{35} = -0,01297525 m_1 -$ — $0,06024124 m_2 -$ — $0,08782575 m_3$	$\mu_{45} = +0,1994780 m_1 +$ + $0,2097310 m_2 +$ + $0,1921293 m_3$	$\mu_{55} = 1 - 0,5100070 m_1 -$ — $0,3411925 m_2 -$ — $0,2598154 m_3$

VIII. - Integrali ε_{qr} per l'asta con un incastro rigido.

$\varepsilon_{00} = 0$	$\varepsilon_{10} = 0$	$\varepsilon_{20} = 0$	$\varepsilon_{30} = 0$	$\varepsilon_{40} = 0$	$\varepsilon_{50} = 0$
$\varepsilon_{01} = 0$	$\varepsilon_{11} = 12,362363 -$ - 2,3916470 k_1 - - 0,76037490 k_2 - - 0,30900442 k_3	$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$	$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}$	$\varepsilon_{41} = \varepsilon_{14}$	$\varepsilon_{51} = \varepsilon_{15}$
$\varepsilon_{02} = 0$	$\varepsilon_{12} = + 11,893504 k_1 +$ + 6,806504 $k_2 +$ + 3,763206 k_3	$\varepsilon_{22} = 485,518819 -$ - 197,047725 $k_1 -$ - 109,480779 $k_2 -$ - 65,526134 k_3	$\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23}$	$\varepsilon_{42} = \varepsilon_{24}$	$\varepsilon_{52} = \varepsilon_{25}$
$\varepsilon_{03} = 0$	$\varepsilon_{13} = + 4,4086810 k_1 -$ - 3,838982 $k_2 -$ - 5,0608616 k_3	$\varepsilon_{23} = + 259,410764 k_1 +$ + 216,286735 $k_2 +$ + 163,660626 k_3	$\varepsilon_{33} = 3806,54627 -$ - 1780,070016 $k_1 -$ - 1122,693524 $k_2 -$ - 773,495717 k_3	$\varepsilon_{43} = \varepsilon_{34}$	$\varepsilon_{53} = \varepsilon_{35}$
$\varepsilon_{04} = 0$	$\varepsilon_{14} = + 3,7355208 k_1 -$ - 0,85926152 $k_2 +$ + 0,75655996 k_3	$\varepsilon_{24} = + 54,836567 k_1 -$ - 64,564656 $k_2 -$ - 107,944717 k_3	$\varepsilon_{34} = + 1496,3593 k_1 +$ + 1369,1256 $k_2 +$ + 1147,6334 k_3	$\varepsilon_{44} = 14617,2733 -$ - 7066,81659 $k_1 -$ - 4581,14527 $k_2 -$ - 3277,37504 k_3	$\varepsilon_{54} = \varepsilon_{45}$
$\varepsilon_{05} = 0$	$\varepsilon_{15} = + 2,6448917 k_1 -$ - 1,7855009 $k_2 -$ - 1,1701991 k_3	$\varepsilon_{25} = + 75,299566 k_1 +$ + 29,745497 $k_2 +$ + 44,959172 k_3	$\varepsilon_{35} = + 159,99493 k_1 -$ - 422,83148 $k_2 -$ - 665,51950 k_3	$\varepsilon_{45} = + 4820,0658 k_1 +$ + 4572,3175 $k_2 +$ + 3899,2514 k_3	$\varepsilon_{55} = 39943,8318 -$ - 19572,1980 $k_1 -$ - 12829,1004 $k_2 -$ - 9336,5155 k_3

Meccanica quantica. — *Caratterizzazione analitica delle grandezze della meccanica quantica.* Nota di LUIGI FANTAPPIÈ, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. È ben noto che nella moderna meccanica quantica le grandezze fisiche non sono più rappresentate da *numeri reali* (le loro « misure »), comè nella meccanica classica, ma da *operatori funzionali lineari* ⁽¹⁾, mentre lo stato di un sistema fisico è rappresentato da una funzione $\varphi(\mathbf{x})$, indicando con \mathbf{x} l'insieme delle variabili indipendenti (o da un complesso di funzioni), che si dice appunto una *funzione di stato*. È noto altresì che, se nello stato rappresentato dalla funzione $\varphi(\mathbf{x})$ (nello stato φ , come diremo più brevemente) la grandezza rappresentata dall'operatore K (o la grandezza K , come anche diremo) ha il *valore esatto* λ , questo è un *autovalore* dell'operatore K e la funzione φ è un'*autofunzione* di K , corrispondente a quell'autovalore, si ha cioè

$$(1) \quad K\varphi(\mathbf{x}) = \lambda\varphi(\mathbf{x}).$$

In ogni altro caso, la funzione $\varphi_1 = K\varphi$, che corrisponde a φ , serve a calcolare, mediante il « prodotto scalare »

$$(2) \quad (\varphi_1, \varphi) = (K\varphi, \varphi) = \mathfrak{S}(K, \varphi)$$

il cosiddetto *valore probabile* (Erwartungswert) della grandezza K nello stato φ .

Vogliamo ora far vedere, in questo lavoro, che *non tutti gli operatori funzionali lineari possono rappresentare grandezze fisiche*, poichè la nozione stessa di grandezza fisica implica delle condizioni essenziali, che possono tradursi in altrettante condizioni analitiche, cui deve soddisfare l'operatore rappresentativo.

È infatti evidente che ogni grandezza, che abbia senso fisico, deve soddisfare alle due condizioni seguenti:

1° Essa deve essere *osservabile*, e cioè rilevabile sperimentalmente, attraverso operazioni esattamente definite (in base alla « definizione operativa », che si esige oggi per ogni grandezza fisica);

2° Una tale grandezza deve avere inoltre *carattere obiettivo*, deve cioè essere *indipendente dagli osservatori*.

2. Cominciamo ora con l'esaminare quali conseguenze ha questa 2ª condizione della *obiettività* della grandezza fisica, per l'operatore lineare K che la rappresenta. Osserviamo perciò che, se confrontiamo la descrizione del

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) Ved. per esempio: DIRAC, *Les principes de la mécanique quantique*. Les Presses Univ., Paris, 1931, p. 28.

mondo fisico fatta da un osservatore Θ con quella fatta da un osservatore Θ' , situato diversamente, queste due descrizioni dello *stesso* mondo fisico (obiettivo) differiscono fra loro per il fatto che la prima è effettuata in base al riferimento stabilito da Θ , la seconda invece rispetto all'altro riferimento, stabilito dal secondo osservatore Θ' . Le due descrizioni differiscono dunque soltanto per una trasformazione T , che esprime il *cambiamento di coordinate*. In altri termini, per passare dalla funzione φ che rappresenta un certo stato del sistema per il 1° osservatore Θ , alla funzione φ' , che rappresenta lo stesso stato per il 2° osservatore Θ' , basterà eseguire nella φ il cambiamento di coordinate espresso dalla T , si avrà cioè:

$$(3) \quad \varphi' = T\varphi.$$

Ma allora, se un operatore K rappresenta una effettiva *grandezza fisica*, avente dunque carattere *obiettivo*, la corrispondenza ch'esso stabilisce tra le funzioni di stato

$$(4) \quad K\varphi = \varphi_1$$

dovrà pure avere *carattere obiettivo* e dovrà quindi essere la stessa per tutti gli osservatori. Dovrà cioè essere, anche per le funzioni φ' ottenute dalle funzioni φ mediante un qualunque cambiamento T di coordinate

$$K\varphi' = \varphi'_1$$

cioè, per la (3) e (4),

$$(5) \quad KT\varphi = \varphi'_1 = T\varphi_1 = TK\varphi.$$

Vediamo così che la condizione essenziale della *obiettività* di una grandezza fisica si traduce analiticamente nella condizione molto semplice, ma altrettanto essenziale, per l'operatore funzionale K , che deve rappresentare una tale grandezza, di essere *permutabile con le trasformazioni T che esprimono tutti i possibili cambiamenti di coordinate*, e cioè, come anche diremo, col *gruppo* (continuo finito) di tali trasformazioni, in simboli

$$(6) \quad KT\varphi = TK\varphi$$

o anche

$$(7) \quad T^{-1}KT\varphi = K\varphi \quad (\text{«invarianza» di } K \text{ rispetto al gruppo delle } T)$$

qualunque sia la funzione φ , e qualunque sia la trasformazione del detto gruppo.

3. Riguardo a questo gruppo delle trasformazioni, che esprimono tutti i possibili cambiamenti di coordinate, si può osservare però che esso coincide col gruppo delle trasformazioni *che fanno passare da un oggetto fisico a un altro oggetto «uguale»*. Così, per esempio, se l'osservatore Θ' si trova alla destra dell'osservatore Θ , a una distanza ω , descriverà un qualunque oggetto, per esempio un tavolo, situato davanti ad ambedue, nello stesso modo con cui Θ lo descriverebbe, se il tavolo si spostasse verso sinistra, alla distanza ω .

In altri termini, se è T_{ω} la traslazione con cui si passa dall'osservatore \mathcal{O} all'osservatore \mathcal{O}' « uguale », come operatore fisico, ad \mathcal{O} , ma diversamente situato, la descrizione fatta da \mathcal{O}' coincide con quella che farebbe \mathcal{O} dello stesso oggetto, se a questo fosse stata applicata la *trasformazione inversa* e cioè la traslazione $T_{-\omega}$, in senso opposto, con cui, quindi, questo oggetto verrebbe trasformato in un oggetto uguale, ma diversamente situato. In generale se è T_{α} la trasformazione del gruppo, che definisce l'uguaglianza con la quale si passa da un osservatore \mathcal{O} a un altro osservatore \mathcal{O}' « uguale », ma diversamente situato, sarà proprio la trasformazione inversa T_{α}^{-1} quella che fa passare dalle antiche alle nuove coordinate.

È allora da mettere in rilievo, in base alle considerazioni precedenti, il vero significato della esigenza della *invarianza relativistica*.

Osserviamo infatti che tale invarianza non è altro che l'invarianza rispetto al gruppo delle trasformazioni di Lorentz, e che il significato più profondo del gruppo di Lorentz è appunto quello del *vero gruppo* delle trasformazioni che fanno passare da un ente fisico (oggetto o « fenomeno ») a un ente fisico *uguale*, o anche da un osservatore a un osservatore *uguale*. Tale gruppo, in effetti, si è imposto come l'unico possibile, in contrasto col gruppo di Galileo della fisica classica, una volta che i fisici hanno dovuto riconoscere l'invarianza, rispetto a tutti gli osservatori (fissi, o in moto relativo uniforme) della legge di propagazione della luce, rappresentata dall'equazione di D'Alembert

$$(8) \quad \square \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

invarianza che si esprime proprio con l'equazione (7), in cui si sia sostituito a K l'operatore particolare \square , e che, come è noto, è soddisfatta *solo se la trasformazione T varia nel gruppo di Lorentz* ⁽²⁾.

Il più profondo significato della esigenza della « invarianza relativistica » non è dunque altro che quello stesso della condizione generale (7), che esprime l'esigenza di un *significato obiettivo* delle grandezze fisiche, nel caso particolare che il gruppo fondamentale, che definisce l'uguaglianza nel nostro universo fisico, sia proprio il gruppo di Lorentz, gruppo che d'altra parte siamo stati costretti a scegliere, in base al riconosciuto carattere obiettivo dell'operatore \square di D'Alembert, e che quindi è finora considerato come *quello vero*.

Noi tuttavia riteniamo conveniente sviluppare le nostre considerazioni, in questo e in successivi lavori, senza legarci fin dall'inizio a questo particolare gruppo di Lorentz, lasciando finchè possibile indeterminato il gruppo (purchè continuo e a un numero finito di parametri), che si può adottare come fondamentale, per stabilire il concetto di *uguaglianza* di due enti fisici, e ciò per due ordini di ragioni:

1° Può accadere che il gruppo di Lorentz, che indicheremo con $L_{\mathbf{z}_{3+1}}^{10}$ (a 10 parametri), nella progressiva evoluzione delle nostre conoscenze scienti-

(2) Ved. per esempio M. VON LAUE, *Die Relativitätstheorie*, 1er Bd., 3 Aufl., F. Vieweg u. S., 1919, Braunschweig.

fiche, finisca col subire una sorte analoga a quella del gruppo di Galileo G_{3+1}^{10} (pure a 10 parametri) della fisica classica, e cioè finisca con l'essere sostituito da un altro gruppo più generale, per esempio dal gruppo D_{3+1}^{10} dei movimenti in sè del cronotopo di De Sitter, pure a 10 parametri, che dà proprio il gruppo di Lorentz *come caso limite*, quando il raggio di curvatura del cronotopo tende all' ∞ ⁽³⁾, così come il gruppo di Lorentz dà come caso limite il gruppo di Galileo, quando la velocità della luce si fa tendere all' ∞ .

2° Nello studio di particolari sistemi fisici può accadere che non sia necessario, per definire l'uguaglianza, tutto il gruppo fondamentale, ma basti un suo sottogruppo; così, per esempio, nello studio dei sistemi fisici *statici*, in cui non giuoca il tempo, le uniche trasformazioni di uguaglianza, che hanno interesse, sono quelle in cui il tempo non compare, le quali, tanto se il gruppo fondamentale è quello di Galileo, come se è il gruppo di Lorentz, formano sempre uno stesso sottogruppo Mv_3^6 e cioè il gruppo dei *movimenti* dello spazio ordinario, mentre invece, se il gruppo fondamentale è il gruppo D_{3+1}^{10} di De Sitter, esse formano il gruppo O_4^3 delle trasformazioni ortogonali di S_4 , e cioè il gruppo dei movimenti di uno spazio sferico a 3 dimensioni in sè (ipersfera dell' S_4), il quale ha la stessa struttura del prodotto diretto del gruppo O_3^3 (delle trasformazioni ortogonali dell' S_3 ordinario) per sè stesso, gruppo questo (a 3 parametri) che si presenta a sua volta come il gruppo naturale dell'uguaglianza, per esempio per l'atomo di idrogeno, e in generale per tutti i sistemi fisici, in cui esista un « nucleo » o centro privilegiato.

4. Passiamo ora a esaminare la 1ª condizione, riguardante invece l'*osservabilità* della grandezza, rappresentata da un operatore K, per cui ci occorre svolgere un'analisi del tutto nuova del modo di operare di un osservatore, quando rileva una grandezza fisica. Si può a tal fine precisare, a questo riguardo, che le sue osservazioni (che sono osservazioni *fisiche*) sono sempre collegate a suoi *movimenti nello spazio*, o a *traslazioni nel tempo* (se differisce nel tempo certi suoi atti o magari tutta un'esperienza) o a *trasciamenti* (se confronta rilevamenti effettuati su una piattaforma in moto con quelli effettuati su una piattaforma fissa, come nell'esperienza di Michelson). Possiamo perciò dire che tutti i rilevamenti che uno sperimentatore può concretamente effettuare sono dunque in sostanza, *rilevamenti collegati a « variazioni della sua situazione »* o, se si vuole, a *cambiamenti del suo sistema di riferimento*, e quindi *non possono dare altre informazioni, che quelle riguardanti tali variazioni del suo sistema di riferimento*.

Come conseguenza di questo fatto, segue allora che uno sperimentatore « osserva » lo « stato » del sistema fisico, rilevando direttamente non già la funzione $\varphi(\mathbf{x})$ rappresentativa di questo stato, ma piuttosto le variazioni che essa subisce, in dipendenza dalle variazioni della situazione dell'osservatore, e cioè in dipendenza dai cambiamenti del sistema di riferimento, che fanno

(3) Come vedremo in un successivo lavoro.

passare dalla funzione $\varphi(\mathbf{x})$ alla funzione trasformata $T_{\alpha}^{-1}\varphi(\mathbf{x})$. Esso osserva dunque, in realtà, questa funzione trasformata, ma in quanto essa dipende dai parametri α_k della trasformazione T_{α}^{-1} , che esprime il cambiamento delle coordinate, e non in quanto dipende dalle coordinate x_k del punto.

E poichè il rilevamento di una certa grandezza si deve tradurre, nel quadro dell'attuale fisica quantica, nell'applicazione dell'operatore K , rappresentativo di questa grandezza, alla funzione di stato, applicazione che è descritta dalla *definizione operativa* della grandezza stessa, ne segue che questa applicazione non può effettuarsi, manifestamente, altro che alla funzione $T_{\alpha}^{-1}\varphi(\mathbf{x})$, in quanto considerata funzione delle sole α_k . Essa deve dunque ridursi all'applicazione di un funzionale lineare puro F_{α} a tale funzione, e cioè ogni operatore K rappresentativo di una grandezza, che sia *fisicamente osservabile*, deve avere necessariamente la forma speciale

$$(9) \quad K\varphi(\mathbf{x}) = F_{\alpha} [T_{\alpha}^{-1}\varphi(\mathbf{x})].$$

5. Concludendo, possiamo dunque dire che la doppia esigenza di ogni grandezza fisica di essere *osservabile* e *obiettiva* si traduce, per l'operatore K che la rappresenta, nelle due condizioni espresse rispettivamente dalla (9) e dalla (7), le quali sono non soltanto necessarie, ma anche sufficienti, e caratterizzano così analiticamente tutti e soli gli operatori funzionali lineari, che possono rappresentare grandezze aventi senso fisico.

Ma il fatto più interessante è che, come vedremo in una prossima Nota, una volta fissato il gruppo fondamentale che definisce l'uguaglianza nel sistema fisico (o universo) considerato, queste due condizioni sono talmente restrittive, da permetterci di assegnare immediatamente, in modo concreto, l'elenco di tutti gli operatori che le soddisfano, e cioè l'elenco di *tutte le grandezze*, che possono avere un effettivo senso fisico nell'universo o sistema fisico preso in esame.

Se poi, come sembra naturale, consideriamo come effettivo *stato fisico possibile* (di un sistema) *avente senso «obiettivo»* soltanto uno stato, in cui almeno una, delle grandezze che hanno senso fisico, vi assuma un *valore esatto* (per esempio l'energia, nello studio dei sistemi costituiti dai singoli atomi), arriviamo alla conclusione, ancora più interessante, che una volta che ci risultano noti tutti gli operatori, che possono rappresentare queste grandezze, anche *tutti gli stati possibili*, e cioè, in fondo, *tutte le cose (obiettive)*, che possono esistere in quell'assegnato universo o sistema fisico, restano già *perfettamente descritte e determinate dalle autofunzioni* di quegli operatori noti, restando di più conosciuti anche *tutti i valori* che, in tale configurazione possibile, assumono le grandezze stesse (mediante gli autovalori).

Risulterà allora da questa ricerca che il gruppo che definisce l'uguaglianza, è veramente *fondamentale* per l'universo o sistema fisico considerato, dato che è già sufficiente a determinarne tutte le grandezze fisiche e tutte le «cose» in esso possibili. E sarà naturale chiamare in generale *universo fisico* ogni sistema fisico avente un proprio gruppo dell'uguaglianza, dato che, con questo

gruppo, l'ordine di tutto il sistema, e quindi anche le sue leggi, restano completamente determinate, *senza necessità di far ricorso a postulati estranei*; un tale sistema, capace di leggi proprie (autarchico) può dirsi quindi, a buon diritto, un vero « universo » (fisico).

Da quanto precede, infine, segue allora che, come già per la classificazione delle geometrie data da Klein nel suo programma di Erlangen, anche per le « fisiche » possibili, o meglio per gli « universi fisici » possibili, sopra specificati, la classificazione più naturale che si può fare è proprio quella che si ottiene *in base al gruppo fondamentale, che serve a definire l'uguaglianza*.

Geodesia. — *Sulla eliminazione di taluni errori nelle misure angolari.* Nota di EMANUELE TERRANA, presentata^(*) dal Corrisp. G. BOAGA.

La regola dettata da Bessel per la eliminazione di taluni errori nella misura degli angoli con gli universali geodetici trovò facilmente giustificazioni teoriche, tuttavia la prima dimostrazione indipendente dalla « entità delle inesattezze strumentali » si deve al prof. Felice Casorati. Questi, infatti, in una Nota presentata all'Accademia dei Lincei, nel 1875, dimostra geometricamente che il metodo delle letture coniugate, secondo la regola di Bessel, ripara, qualunque ne siano le grandezze ed anche se coesistono, alle tre imperfezioni: di una non esatta orizzontalità dell'asse di rotazione del cannocchiale, di non esatta ortogonalità fra quest'asse e la linea di mira ed ancora della eccentricità della linea di mira.

Sebbene successivamente lo stesso problema sia stato preso in esame da altri studiosi, una sua trattazione analitica che consentisse anche la valutazione rigorosa degli errori, laddove la memoria del Casorati non arriva che alla determinazione dei termini di primo grado, si deve al prof. Gino Cassinis. In una Nota del 1946, anche questa presentata all'Accademia Nazionale dei Lincei, il prof. Cassinis, utilizzando il metodo delle « rotazioni finite della sfera », non solo perviene ad una conferma della dimostrazione del Casorati, ma anche determina le espressioni analitiche degli errori che competono agli angoli azimutali e zenitali misurati con una sola posizione del cerchio verticale.

Poichè però questa determinazione, per lo stesso metodo di studio adottato, risulta valida solo per la ipotesi di strumento privo dell'errore di eccentricità della linea di mira, si è inteso con la presente Nota di riprendere in esame il problema e di cercare nella ipotesi più generale del Casorati l'espressione degli errori e una conferma analitica dell'enunciato di Bessel.

Per far ciò si è dovuto rinunciare al suggestivo metodo delle rotazioni finite della sfera, sicchè si è affrontato il problema con i metodi classici della

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

Geometria Analitica, riferendosi ad un sistema cartesiano trirettangolo destrogiro, avente come asse z l'asse generale dello strumento, orientato verso l'alto, come origine O il punto di incontro fra quest'asse e l'asse di rotazione del cannocchiale e come assi x e y due rette ortogonali fra loro, sul piano per O normale a z .

Consideriamo come posizione iniziale dell'alidada quella per cui l'asse di rotazione del cannocchiale (HK) appartiene al piano coordinato $x = 0$ ed ha verso positivo (dal centro dello strumento al cerchio verticale) concordante con l'asse y . Ne deriva che in questa posizione le equazioni dell'asse (HK), detto ε l'angolo di inclinazione, risultano

$$(1) \quad x = 0 \quad z = y \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Indichiamo con $90^\circ - \eta$ l'angolo fra l'asse (HK) e la linea di mira (LM), per la quale possiamo considerare come positivo il senso dall'oculare all'obiettivo, e con d l'eccentricità.

Se fissiamo come posizione iniziale del cannocchiale quella per cui la linea di mira appartiene al piano $x = 0$, le equazioni di questa si ottengono immediatamente.

$$x = 0 \quad z \sin(\eta - \varepsilon) - y \cos(\eta - \varepsilon) + d \cos \eta = 0.$$

Se adesso diamo all'alidada una rotazione α in senso orario intorno all'asse $z \equiv VV'$ e al cannocchiale una β intorno a (HK) le equazioni della linea di mira si modificano. Per ottenerne la nuova espressione analitica in modo semplice, possiamo supporre di eseguire questo movimento in due tempi, effettuando prima la rotazione β intorno alla retta (HK) di equazione (1).

Utilizziamo a questo scopo un nuovo riferimento cartesiano (x', y', z') avente come asse y la retta (HK), come origine lo stesso punto O ed asse x' coincidente con x .

Le formule di passaggio fra i due sistemi sono allora

$$(2) \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \cos \varepsilon - z' \sin \varepsilon \\ z = z' \cos \varepsilon + y' \sin \varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon \\ z' = z \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon \end{cases}$$

sicchè la (LM) diviene nel nuovo riferimento

$$x' = 0 \quad z' \operatorname{tg} \eta - y' + d = 0$$

mentre per ottenerne l'espressione dopo una rotazione β intorno all'asse y' basterà sostituire nella precedente a x' il valore $(x' \cos \beta - z' \sin \beta)$ e a z' il valore $(z' \cos \beta + x' \sin \beta)$ per cui si ha

$$\begin{cases} x' \cos \beta - z' \sin \beta = 0 \\ x' \sin \beta \operatorname{tg} \eta - y' + z' \cos \beta \operatorname{tg} \eta + d = 0 \end{cases}$$

ed infine nel riferimento originario, per mezzo delle (2)

$$\begin{cases} x \cos \beta + y \sin \beta \sin \varepsilon - z \sin \beta \cos \varepsilon = 0 \\ \operatorname{tg} \eta (x \sin \beta - y \sin \varepsilon \cos \beta + z \cos \varepsilon \cos \beta) - y \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon + d = 0. \end{cases}$$

Effettuiamo adesso la rotazione α in senso orario attorno all'asse z : per ottenere le equazioni della linea di mira dovremo compiere nella precedente un'ultima sostituzione, ponendo in luogo di y l'espressione $(y \cos \alpha - x \sin \alpha)$ ed in luogo di x l'espressione $(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ per cui si ha

$$(3) \begin{cases} x(\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha \sin \varepsilon) + y(\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha \sin \varepsilon) - \\ \quad - z \sin \beta \cos \varepsilon = 0 \\ \operatorname{tg} \eta \{x(\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha \sin \varepsilon) + y(\sin \beta \sin \alpha - \cos \beta \cos \alpha \sin \varepsilon) + \\ \quad + z \cos \beta \cos \varepsilon\} + x \sin \alpha \cos \varepsilon - y \cos \alpha \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon + d = 0. \end{cases}$$

Il problema è così ricondotto a calcolare i valori degli angoli α e β di cui occorre ruotare rispettivamente l'alidada in azimut e il cannocchiale sul piano verticale a partire dallo zenit, per collimare un qualsiasi punto P di coordinate x, y, z note e quindi di noti azimut e distanza zenitale.

Le (3), imponendo la condizione che la retta rappresentata passi per P, cioè facendovi x, y, z uguali alle coordinate di P, rappresentano quindi le due equazioni in due incognite (α e β) da risolvere. Conviene però sostituire alle coordinate cartesiane quelle polari: raggio vettore ρ , longitudine (azimut) ϑ e collatitudine (distanza zenitale) ζ e ricercare in luogo di α e β i loro scarti ai valori (α_0, β_0 e α'_0, β'_0) che si otterrebbero nel caso di condizioni perfette di esattezza.

Questi ultimi, se ϑ e ζ sono l'azimut e la distanza zenitale (intrinseci, ossia riferiti all'asse generale dello strumento) di P, sono dati dalle due possibilità

$$\begin{cases} \alpha_0 = \vartheta \\ \beta_0 = \zeta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \alpha'_0 = \vartheta + \pi \\ \beta'_0 = -\zeta \end{cases}$$

corrispondenti alle due posizioni dello strumento (cerchio verticale a destra, cerchio verticale a sinistra).

In teoria, risolvendo le (3) nella ipotesi che ε, η e d siano nulli, si otterrebbero in corrispondenza di α_0 come di α'_0 due valori di β (rispettivamente $\beta_0, \beta_0 - \pi$ e $\beta'_0, \beta'_0 + \pi$); in realtà le seconde soluzioni non hanno senso nel nostro caso, perchè la collimazione può avvenire solo in un senso: dall'oculare all'obiettivo.

Effettuata la sostituzione

$$x = \rho \sin \zeta \cos \vartheta \quad y = \rho \sin \zeta \sin \vartheta \quad z = \rho \cos \zeta$$

e posto

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha = \vartheta + \mu \\ \beta = \zeta + \nu \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \alpha' = \vartheta + \pi + \mu' \\ \beta' = -\zeta + \nu' \end{cases}$$

si ottengono quattro equazioni, le quali ci permettono di ricavare i valori μ e μ' dell'errore nella determinazione di un azimut per effetto delle inesattezze strumentali ε, η e d , nelle due posizioni dello strumento, e i corrispondenti valori ν e ν' dell'errore zenitale.

Si hanno le

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & \text{sen } \zeta \cos \zeta \cos \mu \cos v - \text{sen}^2 \zeta \cos \mu \text{sen } v - \text{sen } \varepsilon \text{sen}^2 \zeta \text{sen } \mu \cos v - \\ & \quad - \text{sen } \varepsilon \text{sen } \zeta \cos \zeta \text{sen } \mu \text{sen } v - \cos \varepsilon \text{sen } \zeta \cos \zeta \cos v - \\ & \quad - \cos \varepsilon \cos^2 \zeta \text{sen } v = 0 \\ & \text{tg } \eta (\text{sen}^2 \zeta \cos \mu \cos v + \text{sen } \zeta \cos \zeta \cos \mu \text{sen } v + \text{sen } \varepsilon \text{sen } \zeta \cos \zeta \text{sen } \mu \cos v - \\ & \quad - \text{sen } \varepsilon \text{sen}^2 \zeta \text{sen } \mu \text{sen } v + \cos \varepsilon \cos^2 \zeta \cos v - \cos \varepsilon \text{sen } \zeta \cos \zeta \text{sen } v) + \\ & \quad + \cos \varepsilon \text{sen } \zeta \text{sen } \mu - \text{sen } \varepsilon \cos \zeta + \frac{d}{\rho} = 0 \end{aligned} \right.$$

e le

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & -\text{sen } \zeta \cos \zeta \cos \mu' \cos v' - \text{sen}^2 \zeta \cos \mu' \text{sen } v' - \\ & \quad - \text{sen } \varepsilon \text{sen}^2 \zeta \text{sen } \mu' \cos v' + \text{sen } \varepsilon \text{sen } \zeta \cos \zeta \text{sen } \mu' \text{sen } v' + \\ & \quad + \cos \varepsilon \text{sen } \zeta \cos \zeta \cos v' - \cos \varepsilon \cos^2 \zeta \text{sen } v' = 0 \\ & \text{tg } \eta (\text{sen}^2 \zeta \cos \mu' \cos v' - \text{sen } \zeta \cos \zeta \cos \mu' \text{sen } v' - \\ & \quad - \text{sen } \varepsilon \text{sen } \zeta \cos \zeta \text{sen } \mu' \cos v' - \text{sen } \varepsilon \text{sen}^2 \zeta \text{sen } \mu' \text{sen } v' + \\ & \quad + \cos \varepsilon \cos^2 \zeta \cos v' + \cos \varepsilon \text{sen } \zeta \cos \zeta \text{sen } v') - \cos \varepsilon \text{sen } \zeta \text{sen } \mu' - \\ & \quad - \text{sen } \varepsilon \cos \zeta + \frac{d}{\rho} = 0. \end{aligned} \right.$$

Le equazioni precedenti mostrano intanto, come è ovvio, che gli errori sono indipendenti dal valore dell'azimut ϑ .

I sistemi (5) e (6) sono facilmente risolvibili con un opportuno metodo di sostituzione, ed in particolare permettono di calcolare i valori dei seni degli errori μ e μ' .

Si ottiene infatti

$$(7) \quad \text{sen } \mu = \text{tg } \varepsilon \cot \zeta - \frac{d \cos^2 \eta}{\rho \cos \varepsilon \text{sen } \zeta} + \frac{\text{sen } \eta}{\cos \varepsilon \text{sen } \zeta} \sqrt{1 - \frac{d^2}{\rho^2} \cos^2 \eta}$$

mentre il valore di $\text{sen } \mu'$ risulta uguale in modulo e di segno contrario a $\text{sen } \mu$. Se indichiamo quindi con t il valore del secondo membro della (7) possiamo porre senz'altro

$$(8) \quad \mu = \arcsen t \quad \mu' = \arcsen (-t) = -\arcsen t.$$

Mentre, in definitiva, queste ultime formule (8) risolvono il problema della determinazione, in funzione della distanza zenitale, degli errori sopra definiti; le stesse insieme alle (4) permettono una immediata e rigorosa dimostrazione della regola di Bessel.

Detta infatti α_m la media delle due osservazioni si ha

$$\alpha_m = \frac{\alpha + \alpha' - \pi}{2} = \frac{\vartheta + \arcsen t + \vartheta - \arcsen t + \pi - \pi}{2} = \vartheta$$

con il che resta chiaramente confermato che il valor medio delle due osservazioni destra e sinistra dà il valore esatto di un angolo azimutale, senza alcuna influenza delle inesattezze ε , η e d , anche se coesistenti e qualunque siano le loro grandezze.

Fisica. — *Diffrazione di raggi X nella naftalina allo stato solido ed allo stato liquido* (*). Nota di FRANCESCO CENNAMO, presentata (**) dal Socio A. CARRELLI.

In questa Nota si espongono i risultati ottenuti nello studio della diffrazione dei raggi X prodotta dalla naftalina allo stato solido (in polvere) ed allo stato liquido allo scopo di confrontare l'andamento dei raggi diffratti da una stessa sostanza nei due stati di aggregazione. Le ragioni che ci hanno spinto ad investigare su questa sostanza sono le seguenti: innanzi tutto la naftalina, solida a temperatura ambiente, fonde alla temperatura di 82°; inoltre la struttura cristallina di questa sostanza è stata esaurientemente studiata da Sir W. H. Bragg⁽¹⁾ e più tardi da Robertson⁽²⁾ ed infine per la naftalina allo stato liquido intorno alla riga eccitatrice dello spettro Raman è stato osservato da E. Gross ed H. Vuks⁽³⁾ un alone dovuto, secondo gli Autori, a delle frequenze basse, per cui sembra accertato nella naftalina allo stato liquido, l'esistenza di forze intermolecolari, più deboli, però della stessa natura di quelle esistenti allo stato solido.

Il dispositivo sperimentale è lo stesso di quello descritto in una precedente Nota⁽⁴⁾. La polvere di naftalina era macinata in modo da ottenere granuli aventi, per una buona percentuale (80% circa) dimensioni dell'ordine dei 4 μ e per il resto dimensioni più piccole.

Una volta ottenuto lo spettro di diffrazione prodotto dalla polvere, si passava con lo stesso dispositivo a quello prodotto dal liquido, facendo circolare nella doppia parete praticata nella stessa vaschetta dell'acqua alla temperatura di 90°, proveniente da un termostato.

Dalle microfotometrie, eseguite nella direzione di un diametro degli aloni, si risaliva alla misura, col solito metodo, degli annerimenti prodotti sulla lastra fotografica dai raggi diffratti, e da questi alla misura della intensità in corrispondenza dei diversi angoli di diffrazione. Nella fig. 1 è riportato l'andamento di tali intensità per i raggi diffratti dalla naftalina in polvere, mentre nella fig. 2 viene riportata la distribuzione delle intensità dei raggi diffratti dal liquido; in quest'ultima distribuzione è stato detratto un continuo che compare nel caso del liquido e che è dovuto a varie cause.

Le due distribuzioni d'intensità sono state ridotte in modo da ottenere lo stesso valore per l'intensità del massimo.

Con una esposizione di 45' compaiono cinque anelli di diffrazione prodotti dalla polvere di naftalina (i tre anelli più esterni risultano in parte

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 12 gennaio 1952.

(1) W. L. BRAGG, *The crystalline State*, vol. I, p. 161 (1949).

(2) ROBERTSON, « Proc. Roy. Soc. », A 125, p. 542.

(3) E. GROSS ed H. VUKS, « Journal de Physique et le Radium », vol. VII, p. 113 (1936).

(4) F. CENNAMO, « Rend. Accademia dei Lincei », vol. X, pp. 475-478 (1951).

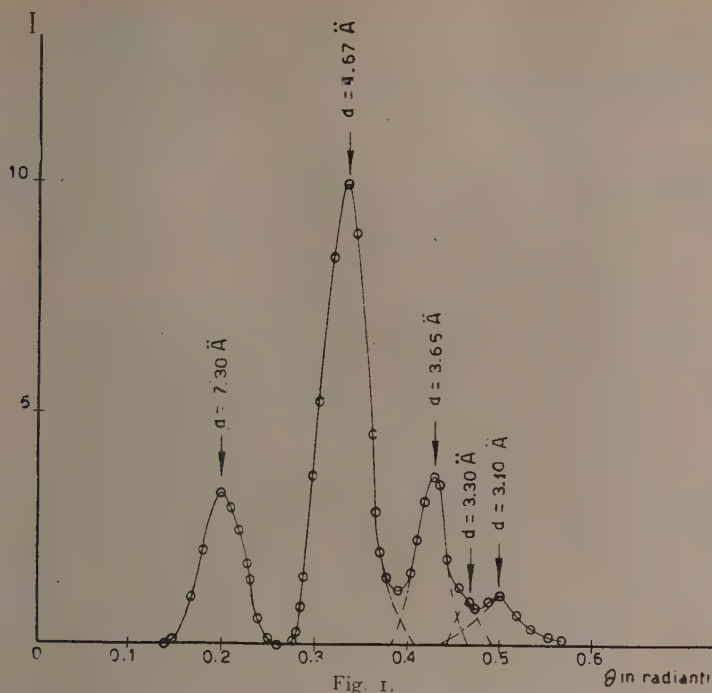


Fig. 1.

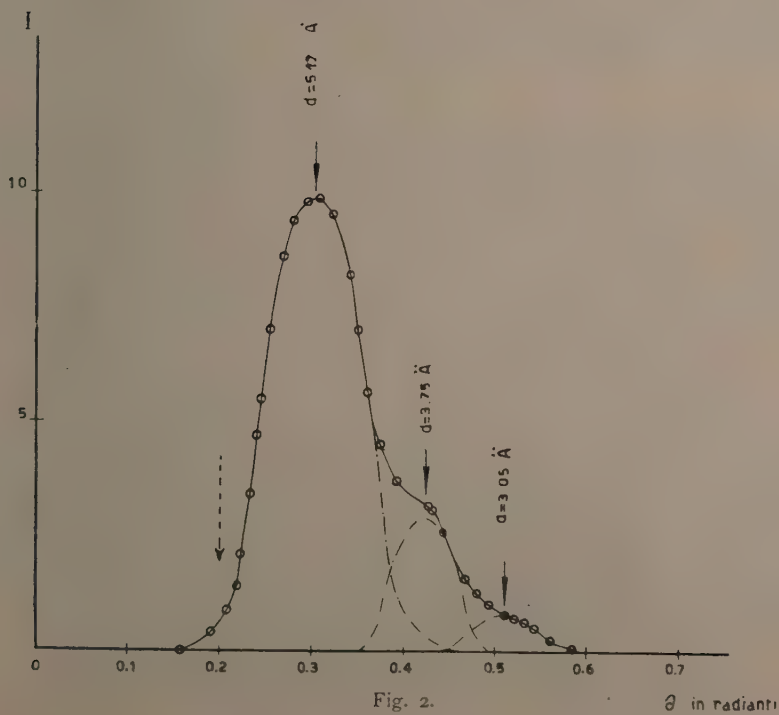


Fig. 2.

sovrapposti) ed i massimi di diffrazione capitano in corrispondenza ad angoli di diffrazione a cui competono le seguenti distanze reticolari:

$$d_1 = 7,30 \text{ \AA} ; d_2 = 4,67 ; d_3 = 3,65 \text{ \AA} , d_4 = 3,30 \text{ \AA} ; d_5 = 3,10 \text{ \AA} .$$

Per la interpretazione dei massimi, dato che la naftalina cristallizza nel sistema monoclinico: ($a : b : c = 8,34 : 6,05 : 8,69$; $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 122^\circ 49'$) ⁽⁵⁾, dalla relazione:

$$(I) \quad \frac{I}{d_{hkl}} = \frac{I}{\sin^2 \beta} \left[\frac{h^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2} - \frac{2kl}{ac} \cos \beta \right] + \frac{k^2}{b^2} ,$$

siamo risaliti alla determinazione dei piani reticolari ai quali si possono riferire le distanze reticolari trovate; nell'individuazione dei piani anzidetti, per alcuni di essi, vi è l'incertezza derivante dal fatto che essendo la naftalina una sostanza che cristallizza in un sistema a basso grado di simmetria, col metodo delle polveri si ottengono radiogrammi di difficile interpretazione ed in tutto od in parte sovrapposti.

Nella Tabella I sono raccolti i risultati sperimentali ottenuti: nella prima colonna sono segnati i numeri d'ordine del raggio diffratto preso in esame; nella seconda colonna il valore dell'angolo di diffrazione espresso in radianti; nella terza colonna il valore di d calcolato dalla formula di Bragg; nella quarta gli indici (hkl) dei piani che hanno dato luogo alla riflessione; nella quinta il valore massimo dell'intensità I_m e nella sesta il valore della larghezza della riga osservata, misurata in radianti dall'espressione: $\Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1$ dove Θ_2 e Θ_1 sono rispettivamente i valori degli angoli di diffrazione per i quali è: $I = 1/2 I_m$.

TABELLA I.

N.	Θ_m in rad.	$d = \frac{\lambda}{2 \sin (\Theta/2)}$ in \AA	(hkl)	I_m	$\Delta\Theta$ in rad.
1	0,200	7,30	(001)	3,3	$6,0 \cdot 10^{-2}$
2	0,334	4,67	(110)	10,0	$6,0 \cdot 10^{-2}$
3	0,428	3,65	(002)	3,7	$3,7 \cdot 10^{-2}$
4	0,470	3,30 (?)	(11 $\bar{1}$)	1,0	—
5	0,500	3,10	(210)	1,0	$5,0 \cdot 10^{-2}$

Nella fig. 2 è, come abbiamo già detto, riportata la distribuzione d'intensità dei raggi diffratti dal liquido alla temperatura di 90° ; in tale distribuzione d'intensità appaiono evidenti tre massimi non risolti, ai quali corrispondono i seguenti valori delle distanze reticolari:

$$d' = 5,17 \text{ \AA} ; d'' = 3,75 \text{ \AA} ; d''' = 3,05 \text{ \AA} .$$

(5) ROBERTSON, loc cit.

I risultati relativi alla distribuzione d'intensità dei raggi diffratti dal liquido, procedendo all'analisi della curva ottenuta, sono riassunti nella seguente Tabella II nella quale le colonne sono disposte nello stesso ordine della tabella precedente.

TABELLA II.

N.	Θ_m in rad.	$d = \frac{\lambda}{2 \sin(\Theta/2)}$ in Å	(hkl)	I_m	$\Delta\Theta$ in rad.
1	—	—	(001)	manca	—
2	0,305	5,17	(110)	10,0	$12,5 \cdot 10^{-2}$
3	0,422	3,75	(002)	3,2	$7,0 \cdot 10^{-2}$
4	—	—	(11 $\bar{1}$)	manca	—
5	0,510	3,05	(210)	0,8	$6,0 \cdot 10^{-2}$

Interpretando i tre massimi notati nella distribuzione d'intensità dei raggi diffratti dal liquido come indicato nella fig. 2, e cioè come dovuti alla sovrapposizione parziale di tre bande di diffrazione non risolte, appare nella distribuzione d'intensità del liquido una evidente analogia con la distribuzione d'intensità del solido; si hanno dunque tre distanze reticolari che si potrebbero interpretare come dovute agli stessi piani reticolari che nel solido danno luogo ai massimi indicati con i numeri 2, 3, 5 rispettivamente (cfr. Tab. I); i tre massimi così attribuiti sono nel liquido nello stesso rapporto d'intensità dei corrispondenti del solido.

Non compare invece nel liquido, almeno nel tempo di posa da noi impiegato, alcun massimo di diffrazione che sia da porre in relazione con la distanza reticolare relativa al piano (001). È molto importante porre in evidenza che il piano (001) è appunto il piano secondo il quale avviene la sfaldatura della naftalina; l'assenza di un massimo di diffrazione nel liquido in corrispondenza di esso potrebbe giustificarsi pienamente supponendo che i legami in corrispondenza del piano di sfaldatura siano i primi a scomparire quando si passa dallo stato solido allo stato liquido.

Apparirebbe quindi dai risultati su esposti che allo stato liquido, tra le molecole di naftalina, continuano ad agire, per lo meno in alcune direzioni, dei legami intermolecolari, probabilmente più lenti, ma della stessa natura di quelli esistenti allo stato solido, legami che costringono le molecole a disporsi lungo queste direzioni quasi nello stesso ordine col quale trovansi allo stato solido.

Confrontando i risultati esposti nella terza colonna della I e della II tabella si osserva, nel liquido, oltre all'assenza del massimo relativo alla distanza reticolare del piano (001) una variazione delle altre distanze reticolari, variazioni che lasciano prevedere per il liquido una modifica nelle dimensioni della cella fondamentale.

Non abbiamo alcun elemento per stabilire se oltre ad una variazione eventuale nella lunghezza degli spigoli della cella fondamentale, vi sia anche una variazione dell'angolo e cioè una deformazione della cella stessa. Supponendo che ciò non avvenga si può procedere alla determinazione, con l'aiuto della formula (1) e dei risultati sperimentali esposti nella colonna 3 della II tabella, dei parametri fondamentali per il liquido.

Per i solidi i valori di tali parametri sono stati determinati da Bragg prima e da Robertson poi e risultano:

$$a : b : c = 8,34 : 6,05 : 8,69 \quad ; \quad \alpha = \gamma = 90^\circ, \quad \beta = 122^\circ 49' \quad (\text{solido})$$

per il liquido invece noi troviamo i valori:

$$a' : b' : c' = 7,78 : 8,44 : 8,92 \quad (\text{liquido})$$

e cioè allo stato liquido nella cella fondamentale si avrebbe una diminuzione del parametro a ed un aumento dei parametri b e c .

Ora ad una variazione dei parametri fondamentali corrisponde una variazione del volume della cella fondamentale; tale volume, per la sostanza allo stato solido è dato da $V_s = 368,7 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$ mentre in base ai risultati ottenuti per lo stato liquido la cella fondamentale avrebbe un volume dato da: $V_l = 492,7 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$; il rapporto tra il volume della cella relativa allo stato liquido e di quella relativa allo stato solido risulta dunque:

$$\frac{V_l}{V_s} = 1,34.$$

Ora il rapporto tra le densità del solido e del liquido è:

$$\frac{\mu_s}{\mu_l} = \frac{1,152}{0,962} = 1,20,$$

ciò che, per lo meno in prima approssimazione, rende accettabile l'ipotesi di una conservazione, nel liquido, di una cella fondamentale lievemente modificata.

Si ringrazia il prof. A. Carrelli, direttore dell'Istituto, per i mezzi messi a disposizione.

Fisica. — *Sull'equivalenza di due definizioni della matrice S.*
Nota di SERGIO FUBINI, presentata (*) dal Socio E. PERUCCA.

1. La matrice S è stata definita da Heisenberg ⁽¹⁾ mediante l'uso di soluzioni dell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo.

Diversi altri autori ⁽²⁾ hanno invece definito la matrice S come l'operatore unitario che, nella « rappresentazione dell'interazione », descrive lo stato del sistema a $t = \infty$ in funzione dello stato a $t = -\infty$.

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) W. HEISENBERG, « Z. Physik », 120, 513, 673 (1943); C. MOLLER, « Dan Mat. Fys. Medd. », 23, 1 (1945); STUECKELBERGER, « H. P. A. », 14, 51 (1941), 17, 3 (1944), 18, 195 (1945), 19, 242 (1946).

(2) FEYNMANN, « Phys. Rev. », 76, 744, 769 (1949); DYSON, « Phys. Rev. », 75, 486, 1737 (1949).

La prima definizione della matrice S è particolarmente utile nello studio dei fenomeni di diffusione, cioè di quei fenomeni in cui il numero delle particelle si mantiene costante; nel caso invece in cui siano create o distrutte delle particelle è opportuno ricorrere alla seconda definizione, infatti in questo caso negli stati stazionari il numero delle particelle presenti non è definito.

Benchè si sia osservato che le due diverse definizioni della matrice S conducono nei casi concreti agli stessi risultati, una dimostrazione matematica della loro equivalenza che non si basi sul metodo delle perturbazioni, per quanto ci consta, non è ancora stata data. In questa Nota ci proponiamo di fornire tale dimostrazione.

2. Sia $H = E + V$ la Hamiltoniana di un sistema di particelle e siano Φ_a le autofunzioni di E corrispondenti agli autovalori E_a . Cerchiamo una autofunzione Ψ_a della Hamiltoniana H tale che la differenza $\Psi_a - \Phi_a$ (a) si annulli all'annullarsi di V , (b) contenga solo onde uscenti.

$$(1) \quad (E_a - E_b) (\Phi_b \Psi_a) = (\Phi_b V \Psi_a)$$

poniamo:

$$(2) \quad V \Psi_a = W \Phi_a$$

otteniamo allora:

$$(3) \quad (E_a - E_b) (\Phi_b \Psi_a) = (\Phi_b W \Phi_a).$$

Dirac ha dimostrato ⁽³⁾ che l'unica soluzione della (3) che soddisfi alle condizioni a) e b) è la seguente:

$$(4) \quad (\Phi_b \Psi_a) = (\Phi_b \Phi_a) + (\Phi_b W \Phi_a) \delta^+(E_a - E_b).$$

Heisenberg ha definito la matrice $S = 1 + R$ mediante la:

$$(5) \quad (\Phi_a R \Phi_b) = (\Phi_a W \Phi_b) \delta(E_a - E_b)$$

3. Sia $U(t)$ l'operatore unitario che fa passare dalla « rappresentazione dell'interazione » alla « rappresentazione di Heisenberg ». Esso soddisfa l'equazione ⁽⁴⁾:

$$(6) \quad \frac{dU(t)}{dt} = -iV(t)U(t)$$

dove:

$$(7) \quad V(t) = e^{iEt} V e^{-iEt}$$

$$(8) \quad \frac{dV(t)}{dt} = i[EV(t)].$$

Imponiamo inoltre alla $U(t)$ la seguente condizione iniziale:

$$(9) \quad U(-\infty) = 1.$$

Mostriamo che la matrice $U(\infty)$ coincide con la matrice S .

(3) DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford 1947), p. 193.

(4) In questo lavoro useremo, per semplicità, un sistema di misura in cui $\hbar/2\pi$ sia uguale ad 1.

La funzione:

$$(10) \quad \Psi_a = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{+\eta} e^{i(E_a - E)t} U(t) \Phi_a dt$$

è una autofunzione di H corrispondente all'autovalore E_a ; infatti:

$$\begin{aligned} H \Psi_a &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{+\eta} (E + V) e^{i(E_a - E)t} U(t) \Phi_a dt = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{-i}{2\eta} \int_{-\eta}^{+\eta} e^{iE_a t} \frac{d}{dt} [e^{-iEt} U(t) \Phi_a] dt \end{aligned}$$

e integrando per parti:

$$H \Psi_a = E_a \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{-\eta}^{+\eta} e^{i(E_a - E)t} U(t) \Phi_a dt = E_a \Psi_a.$$

Moltiplicando scalarmente per Φ_b otteniamo:

$$(11) \quad (\Phi_b \Psi_a) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{+\eta} e^{i(E_a - E_b)t} (\Phi_b U(t) \Phi_a) dt.$$

L'elemento di matrice $(\Phi_b \frac{dU}{dt} \Phi_a)$ come funzione di t può essere sviluppato in integrale di Fourier;

$$(12) \quad \left(\Phi_b \frac{dU}{dt} \Phi_a \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-int} (\Phi_b F(n) \Phi_a) dn$$

tenendo conto della (9) otteniamo:

$$(13) \quad (\Phi_b U(t) \Phi_a) = (\Phi_b \Phi_a) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-int} \delta^+(n) (\Phi_b F(n) \Phi_a) dn$$

$$(14) \quad (\Phi_b U(\infty) \Phi_a) = (\Phi_b \Phi_a) + (\Phi_b F(0) \Phi_a).$$

Sostituendo la (13) nella (11) e tenendo conto del fatto che:

$$(15) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{+\eta} e^{ikt} dt = u(k)$$

dove:

$$(16) \quad \begin{cases} u(k) = 0 & \text{per } k \neq 0 \\ u(k) = 1 & \text{per } k = 0 \end{cases}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} (17) \quad (\Phi_b \Psi_a) &= (\Phi_b \Phi_a) + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^+(n) u(E_a - E_b - n) (\Phi_b F(n) \Phi_a) dn = \\ &= (\Phi_b \Phi_a) + \delta^+(E_a - E_b) \int_{-\infty}^{+\infty} u(E_a - E_b - n) (\Phi_b F(n) \Phi_a) dn. \end{aligned}$$

L'autofunzione Ψ_a di H definita nella (10) soddisfa alle condizioni *a)* e *b)*: essa si identifica perciò con l'autofunzione definita nella (4). Di qui segue:

$$(18) \quad (\Phi_b W \Phi_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(E_a - E_b - n) (\Phi_b F(n) \Phi_a) dn$$

e, ricordando la (5):

$$(19) \quad \begin{aligned} (\Phi_b R \Phi_a) &= \delta(E_a - E_b) \int_{-\infty}^{+\infty} u(E_a - E_b - n) (\Phi_b F(n) \Phi_a) dn = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(E_a - E_b - n) (\Phi_b F(n) \Phi_a) \delta(n) dn = \\ &= (\Phi_b F(0) \Phi_a) u(E_a - E_b) = (\Phi_b U(\infty) \Phi_a) u(E_a - E_b) - (\Phi_b \Phi_a). \end{aligned}$$

La formula (19) mostra che gli elementi della matrice $U(\infty)$ fra stati di uguale energia sono identici ai corrispondenti elementi della matrice S .

4. Per dimostrare la completa equivalenza fra le due definizioni della matrice S , è sufficiente dimostrare la validità della formula ⁽⁵⁾:

$$(20) \quad [EU(\infty)] = 0.$$

Infatti dalla (20) segue che gli elementi della matrice $U(\infty)$ fra stati di energie diverse sono tutti nulli.

Per dimostrare la (20) è necessario introdurre l'ipotesi adiabatica ⁽⁶⁾, cioè si deve moltiplicare l'interazione $V(t)$ per un fattore $\lambda(t) = e^{-\alpha|t|}$; alla fine dei calcoli α sarà fatto tendere a zero.

Poniamo perciò:

$$(21) \quad \mathbf{V}(t) = \lambda(t) V(t)$$

$$(22) \quad \frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = -i\mathbf{V}(t)\mathbf{U}(t).$$

Dalla (6) segue:

$$(23) \quad \frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = [E\mathbf{V}(t)] - \alpha\varepsilon(t)\mathbf{V}(t)$$

dove:

$$(24) \quad \begin{cases} \varepsilon(t) = +1 & \text{per } t > 0 \\ \varepsilon(t) = -1 & \text{per } t < 0. \end{cases}$$

Poniamo ora:

$$(25) \quad \mathbf{C}(t) = \frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} - i[EU(t)].$$

(5) Questo risultato è menzionato in SCHWINGER, « Phys. Rev. », 74, 1439 (1948). La dimostrazione che noi diamo permette di fissare le condizioni di validità della (20) (ipotesi adiabatica) che, per quanto mi consta, non sono state ancora messe in evidenza.

(6) FERRETTI, « N. Cimento », 7, 79, 375, 783 (1950); 8, 108 (1951); SNYDER, « Phys. Rev. », 83, 1154 (1951); LIPPMAN e SCHWINGER, « Phys. Rev. », 79, 469 (1950).

Ricordano la (9) e tenendo conto del fatto che $\mathbf{V}(-\infty) = 0$ otteniamo:

$$(26) \quad C(-\infty) = 0.$$

Dalla (21) e dalla (22) segue inoltre:

$$(27) \quad \frac{dC(t)}{dt} - i\mathbf{V}(t)C(t) = -\alpha\varepsilon(t)\mathbf{V}(t)U(t).$$

L'unica soluzione della (26) che soddisfi alla (25) è:

$$(28) \quad C(t) = -\alpha U(t)\gamma(t)$$

dove:

$$(29) \quad \gamma(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t') \bar{U}(t') \mathbf{V}(t') U(t') dt'.$$

Segue perciò dalle (21), (22), (28):

$$(30) \quad [EU(\infty)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [E\mathbf{V}(t)U(t)] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} [\mathbf{V}(t)U(t)] dt \\ - \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{V}(t)U(t) [\varepsilon(t) + \gamma(t)] dt.$$

Il primo degli integrali a secondo membro è nullo poiché $\mathbf{V}(\infty) = \mathbf{V}(-\infty) = 0$; il secondo degli integrali si annulla quando facciamo tendere α a zero. Di qui segue la validità della (20).

Ringrazio il prof. E. Perucca per il Suo cordiale interessamento ed il prof. G. Wataghin ed il dott. A. Gamba per le utili discussioni con Essi avute.

Fisica matematica. — *Sulle equazioni del campo elettromagnetico nell'ultima teoria di Einstein.* Nota di MARIA PASTORI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

Nell'ultima teoria unitaria di Einstein⁽¹⁾ il tensore fondamentale è un tensore doppio, non simmetrico, la cui parte emisimmetrica individua il campo elettromagnetico.

Precisamente, il tensore coniugato di questa parte emisimmetrica viene identificato col tensore elettromagnetico; per esso infatti si annulla identicamente il rotore completo (prima legge del campo elettromagnetico), e la sua divergenza può essere posta eguale al vettore distribuzione elettrica

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity* (Princeton 1950), oppure la traduzione italiana: *Il significato della relatività* (Torino 1950, appendice II); Ved. pure, a proposito del tensore fondamentale, M. PASTORI, *Sull'ufficio del tensore fondamentale nell'ultima teoria di Einstein* (« Rend. Istit. Lombardo », vol. LXXXIV, 1951, fasc. 2°).

(seconda legge del campo elettromagnetico), perchè viene così verificata la legge di conservazione dell'elettricità, annullandosi identicamente la divergenza di questo vettore.

In questa Nota mostro come le leggi sopra enunciate possano facilmente dedursi (e nella forma consueta) da due delle condizioni poste da Einstein, condizioni che assicurano, l'una la costanza del tensore fondamentale, l'altra la costanza del tensore di Ricci.

Debbo per questo richiamare alcune proprietà dei tensori emisimmetrici coniugati e stabilire con quali limitazioni esse siano valide nel nuovo spazio di Einstein. Penso che queste precisazioni possano essere utili, sia a chiarire le basi analitiche della nuova teoria, sia a facilitarne gli ulteriori sviluppi.

I. LE EQUAZIONI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO NELLO SPAZIO-TEMPO —.

Le equazioni del campo elettromagnetico acquistano, come è noto, semplicità ed eleganza, veramente singolari, quando si dia loro veste tensoriale, conglobando il campo elettrico e quello magnetico in un unico tensore doppio emisimmetrico dello spazio-tempo, il tensore elettromagnetico F_{ik} ($i, k, \dots = 0, 1, 2, 3$). Esse esprimono infatti le due leggi seguenti ⁽²⁾:

a) il rotore (completo) del tensore elettromagnetico è nullo;

b) la divergenza del tensore elettromagnetico eguaglia il vettore distribuzione elettrica. Esse si scrivono:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon^{rkih} F_{ik,h} = 0 \\ F_{ik}{}^{,k} = j_i, \end{array} \right.$$

dove ϵ^{rkih} è il tensore emisimmetrico di Ricci ⁽³⁾; j_i è il vettore che individua la distribuzione elettrica nello spazio-tempo e il tratto indica derivazione tensoriale.

Esse sono valide, sia nello spazio pseudo-euclideo della relatività ristretta, sia nello spazio riemanniano della relatività generale, purchè naturalmente la derivazione tensoriale sia quella relativa allo spazio che si considera. Anzi, nella prima delle (1) può, in entrambi i casi, sostituirsi alla derivazione tensoriale la derivazione ordinaria perchè, a causa dell'emisimmetria del tensore di Ricci, si elidono tutti i termini coi simboli di Christoffel (coefficienti di connessione degli spazi di Riemann) che sono invece simmetrici

(2) Cfr. B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni* (Bologna 1949, p. 353). Ved. anche B. FINZI, *Il campo elettromagnetico nello spazio tempo* (« Rend. Semin. Torino », vol. VIII, 1947-48 e 1948-49, pp. 127-144).

(3) Le sue componenti, come è noto, sono nulle tutte le volte che almeno due indici sono eguali, sono eguali a $\pm \sqrt{|a_{ik}|}$ (a_{ik} tensore fondamentale) in forma covariante e a $\pm \frac{1}{\sqrt{|a_{ik}|}}$ in forma controvariante quando tutti gli indici sono diversi, valendo il segno + quando la permutazione degli indici è di classe pari rispetto alla fondamentale 0, 1, 2, 3, il segno — in caso contrario.

rispetto ai due indici inferiori. Si può dunque porre la prima delle (1) nella forma:

$$(2) \quad \epsilon^{rkih} F_{ih,k} = 0 \quad (4)$$

Dalla considerazione precedente si deduce subito che, se invece di considerare uno spazio riemanniano, si dovesse considerare uno spazio più generale, purchè a connessione affine simmetrica (come ad esempio lo spazio di Weyl), il rotore completo di un tensore doppio si ridurrebbe sempre allà forma (2) (primo membro).

Giova per il seguito tener presente questa osservazione:

Il rotore completo di un tensore doppio emisimmetrico, in uno spazio a connessione affine simmetrica, si riduce sempre al rotore completo con derivate ordinarie.

2° TENSORI EMISIMMETRICI CONIUGATI E LORO PROPRIETÀ. — In alcune teorie unitarie⁽⁵⁾, si è presentata l'opportunità di considerare, accanto ai tensori doppi emisimmetrici dello spazio-tempo, i loro coniugati (o supplementari o duali). Il legame tra un tensore doppio emisimmetrico E_{jh} e il suo coniugato $*E^{ik}$ è il seguente:

$$(3) \quad *E^{ik} = \frac{1}{2} \epsilon^{ikjh} E_{jh}.$$

Dalla (3) segue subito che la relazione di coniugio è reciproca, e cioè che il coniugato del coniugato di un tensore doppio coincide col tensore primitivo.

Fra le proprietà dei tensori emisimmetrici coniugati, ricordiamo le seguenti⁽⁶⁾:

1° la divergenza di un tensore emisimmetrico eguaglia (a meno di un fattore numerico) il rotore completo del coniugato;

2° la divergenza seconda di un tensore emisimmetrico è nulla.

La prima è immediata conseguenza della (3):

$$(4) \quad *E^{ik}{}_{|k} = \frac{1}{2} \epsilon^{ikjh} E_{jh|k}$$

e della proprietà che il tensore di Ricci (in uno spazio riemanniano) ha derivato nullo.

La seconda, in virtù della prima, equivale alla proprietà che la divergenza del rotore di un tensore emisimmetrico si annulla, e discende

(4) È usata qui la notazione di Einstein di indicare con una virgola la derivazione ordinaria.

(5) La prima è stata quella di K. HATTORI, *Ueber eine formale Erweiterung der Relativitätstheorie*, ecc. (« Phys. Zeitschrift », Bd. 29, pp. 538-549).

(6) M. PASTORI, *Tensori emisimmetrici coniugati* (questi « Rend. », ser. 6ª, vol. XVI, pp. 216-220) (1932), e *Proprietà dei tensori emisimmetrici coniugati* (Ibidem, pp. 311-316); ved. anche A. M. PRATELLI, *Sui tensori emisimmetrici coniugati* (« Rend. Istit. Lombardo », vol. LXXXII, pp. 473-487) dove si trovano numerosi richiami bibliografici sull'argomento.

anch'essa dalla costanza del tensore di Ricci e dalla simmetria dei simboli di Christoffel ⁽⁷⁾.

È evidente che le proprietà precedenti sono valide anche per spazi più generali dei riemanniani, purchè a *connessione simmetrica e con tensore di Ricci costante*.

3. ESTENSIONE ALLO SPAZIO DI EINSTEIN. — Lo spazio di Einstein dell'ultima teoria unitaria ⁽⁸⁾ è uno spazio a connessione affine non simmetrica ed è dotato di tensore fondamentale g_{ik} non simmetrico. I coefficienti di connessione Γ_{ik}^j sono implicitamente definiti dalla condizione:

$$(5) \quad g_{ik}{}_{;r} = 0,$$

che, sviluppata, si scrive:

$$(5') \quad g_{ik,r} - g_{jk} \Gamma_{ir}^j - g_{ij} \Gamma_{rk}^j = 0.$$

Un'ulteriore condizione imposta da Einstein riguarda il tensore di torsione. È noto che se si scompongono i coefficienti di connessione in due parti, l'una simmetrica e l'altra emisimmetrica rispetto agli indici inferiori,

$$(6) \quad \Gamma_{ir}^j = \Gamma_{ir}^j + \Gamma_{ir}^j \quad (9)$$

la prima parte Γ_{ir}^j individua ancora una connessione affine (simmetrica), la seconda Γ_{ir}^j rappresenta un tensore triplo, il tensore di torsione. Ebbene la seconda condizione imposta da Einstein è l'annullarsi del vettore ottenuto per contrazione dal tensore di torsione, e si scrive:

$$(7) \quad \Gamma_i = \Gamma_{ij}^j = 0 \quad (10).$$

(7) Ved. FINZI e PASTORI, loc. cit., p. 187; riferita a tensori delle varietà riemanniane, questa proprietà è contenuta in una Nota di B. CALDONAZZO del 1927, dal titolo, *Sulla divergenza dei tensori* (« Boll. dell'Acc. delle Scienze di Catania », fasc. 58) e in una di A. PALATINI, dal titolo: *Sulla divergenza dei tensori emisimmetrici e dei vettori* (« Rend. Ist. Lombardo », ser. II, vol. LXII, 1929, pp. 281-286). Con linguaggio diverso essa denota un proprietà delle forme differenziali esterne (E. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs etc.* 1946) o delle forme differenziali alternanti (E. BOMPIANI, *Geometria differenziale*, litogr. Roma, in corso di pubblicazione).

(8) A. EINSTEIN, loc. cit.

(9) Per la natura di questa Nota, sono state usate le notazioni di Einstein, per quanto non siano quelle comunemente adottate. Spesso Γ_{ir}^j rappresenta la sola parte simmetrica di una connessione affine e quest'ultima viene indicata con Γ_{ir}^j (ved. ad esempio L. P. EISENHART, *Non riemannian Geometry*. New-York 1927, p. 8; oppure E. BOMPIANI, loc. cit.; di quest'ultimo Autore, ved. la recente Nota in cui viene messo in luce il significato geometrico del tensore di torsione, *Significato del tensore di torsione di una connessione affine*. « Boll. U. M. I. », ser. III, anno VI, pp. 273-276 (1951). Per mettere in evidenza la natura non tensoriale dei coefficienti di connessione essi sono anche stati indicati con $\left[\begin{smallmatrix} j \\ ir \end{smallmatrix} \right]$, notazione questa ormai poco usata per i simboli di Christoffel di I specie (ved. B. FINZI e M. PASTORI, loc. cit., p. 199).

(10) Per il significato geometrico di questa condizione, ved. E. BOMPIANI, loc. secondo cit., p. 276.

Conseguenza della (7) è l'annullarsi del derivato del tensore di Ricci, derivato però con indici affetti tutti dallo stesso segno:

$$(8) \quad \varepsilon_{i k j h ; r}^{\substack{i k j h \\ + + + +}} = \varepsilon_{i k j h ; r}^{\substack{i k j h \\ - - - -}} = \varepsilon_{i k j h ; r}^{\substack{i k j h \\ - + + +}} = \varepsilon_{i k j h ; r}^{\substack{i k j h \\ + - - -}} = 0.$$

Basta infatti, per avere le (8), applicare le formole di derivazione tensoriale e tener conto, oltre che della (7), delle seguenti identità, conseguenza della (5)

$$(9) \quad w_{,r} = \Gamma_{ij}^j,$$

dove w rappresenta la radice del determinante delle g_{ik} , cambiato di segno ⁽¹¹⁾.

Si può dunque dire che, come la (5) assicura la costanza del tensore fondamentale, la (7) assicura la costanza del tensore di Ricci (con le precisazioni indicate riguardo il segno degli indici).

Naturalmente hanno carattere tensoriale anche i derivati che si ottengono con la sola parte simmetrica Γ_{ij}^j dei coefficienti di connessione; li chiamerò derivati neutri, per distinguerli dai derivati precedentemente considerati, che chiamerò polarizzati.

Dalla (9) discende immediatamente che si annulla anche il derivato neutro del tensore di Ricci:

$$(10) \quad \varepsilon_{i k j h ; r}^{\substack{i k j h \\ 0 0 0 0}} = \varepsilon_{i k j h ; r}^{\substack{i k j h \\ 0 0 0 0}} = 0.$$

Dalle osservazioni del § 2 discendono allora, per lo spazio di Einstein le seguenti proprietà:

1^a la divergenza neutra di un tensore emisimmetrico eguaglia il rotore completo neutro del coniugato;

2^a la divergenza seconda neutra di un tensore emisimmetrico si annulla ⁽¹²⁾.

Si può infine osservare che, per il rotore polarizzato di un tensore emisimmetrico si hanno le seguenti proprietà:

$$(11) \quad \varepsilon^{r k i h} E_{i h ; k}^{\substack{+ - \\ + -}} = \varepsilon^{r k i h} E_{i h ; k}^{\substack{+ - \\ 0 0}} = \varepsilon^{r k i h} E_{i h , k}.$$

Cioè il rotore polarizzato di un tensore doppio emisimmetrico dello spazio di Einstein è uguale al suo rotore neutro (come facilmente si verifica), esso è anche eguale al rotore completo con derivate ordinarie (conformemente alla osservazione alla fine del § 1).

4. L'IDENTITÀ EQUIVALENTE ALLA PRIMA EQUAZIONE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO. - Si può ora dimostrare che dalle condizioni (5) e (7) poste da Einstein a base della sua teoria scende un'identità equivalente alla prima

(11) A. EINSTEIN, loc. secondo cit., p. 147.

(12) Mentre per un tensore doppio sono distinte la divergenza neutra da quelle polarizzate, per un vettore si ha, in virtù della (7): $A^{\substack{i \\ +}}_{;i} = A^{\substack{i \\ -}}_{;i} = A^{\substack{i \\ 0}}_{;i}$.

delle (1) o, ciò che fa lo stesso, alla (2), nelle quali si sia eguagliato il tensore elettromagnetico al coniugato di g_{ik} .

Dalla (5) si deduce infatti ⁽¹³⁾ che si annulla anche $g^{+ \frac{i}{\sqrt{}} \frac{k}{\sqrt{}}}$ e conseguentemente

$$(12) \quad \begin{cases} g^{+ \frac{i}{\sqrt{}} \frac{k}{\sqrt{}}}_{;k} = 0 \\ g^{+ \frac{k}{\sqrt{}} \frac{i}{\sqrt{}}}_{;k} = 0. \end{cases}$$

Sviluppando le (12), sottraendo membro a membro e tenendo conto della (7), si ha:

$$(13) \quad g^{+ \frac{i}{\sqrt{}} \frac{k}{\sqrt{}}}_{;\frac{k}{\sqrt{}}} + g^{ij} \Gamma_{kj}^{\frac{k}{\sqrt{}}} = g^{+ \frac{i}{\sqrt{}} \frac{k}{\sqrt{}}}_{;\frac{k}{\sqrt{}}} = 0.$$

Dunque: è nulla la divergenza neutra del tensore emisimmetrico $g^{+ \frac{i}{\sqrt{}} \frac{k}{\sqrt{}}}$.

Per la proprietà 1^a del paragrafo precedente e per quella alla fine del paragrafo stesso, si avrà quindi:

È nullo il rotore completo neutro, il rotore completo polarizzato, il rotore completo con derivate ordinarie del tensore coniugato di $g^{+ \frac{i}{\sqrt{}} \frac{k}{\sqrt{}}}$.

Si ha cioè:

$$(2') \quad e^{ikrs} * g^{+ \frac{i}{\sqrt{}} \frac{k}{\sqrt{}}}_{;\frac{k}{\sqrt{}}} = e^{ikrs} * g^{+ \frac{i}{\sqrt{}} \frac{k}{\sqrt{}}}_{;\frac{k}{\sqrt{}}} = e^{ikrs} * g^{+ \frac{i}{\sqrt{}} \frac{k}{\sqrt{}}}_{;\frac{k}{\sqrt{}}} = 0.$$

La (2'), equivalente alla (2) quando si identifichi F_{ik} con $*g^{+ \frac{i}{\sqrt{}} \frac{k}{\sqrt{}}}$, rappresenta la prima equazione del campo elettromagnetico ⁽¹⁴⁾.

5. LA SECONDA EQUAZIONE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO. — La seconda equazione del campo elettromagnetico definisce, nella teoria di Einstein, il vettore distribuzione elettrica.

Ponendo la divergenza neutra del tensore $*g^{+ \frac{i}{\sqrt{}} \frac{k}{\sqrt{}}}$ eguale al vettore distribuzione elettrica, viene automaticamente verificata la legge di conservazione, perchè la divergenza di questo vettore, per la proprietà 2^a del § 3 è identicamente nulla.

Per le proprietà dei tensori emisimmetrici coniugati, si può quindi dire che il vettore distribuzione elettrica eguaglia (a meno di un fattore numerico) il rotore completo (neutro, polarizzato o con derivate ordinarie) del tensore emisimmetrico $g^{+ \frac{i}{\sqrt{}} \frac{k}{\sqrt{}}}$ ⁽¹⁵⁾.

(13) A. EINSTEIN, loc. secondo cit., p. 149 e p. 150.

(14) Nella trattazione di Einstein, essa corrisponde alla (28) di p. 155 (loc. secondo cit.).

(15) Nella trattazione di Einstein tutto ciò è rappresentato dalle ultime tre formole di p. 156 (loc. secondo cit.). Ved. anche P. UDESCHINI, *Le equazioni di prima approssimazione ecc.* (questi « Rend. », ser. VIII, vol. IX, pp. 256-261 (1950)).

Chimica inorganica. — *Cromoesacarbilammine*^(*). Nota preliminare di LAMBERTO MALATESTA e ADRIANO SACCO, presentata ^(**) dal Socio L. CAMBI.

La possibilità da noi dimostrata di ottenere direttamente da sali nichel bivalente e carbilammine alifatiche ed aromatiche complessi tetracarbilamminici del nichel a valente (elettrozerovalente)⁽¹⁾, lasciava prevedere che analoghi composti si potessero preparare con altri elementi atti a dare metallo-carbonili.

La ricerca venne iniziata col cromo, il cui esacarbonile, pur non potendosi ottenere per sintesi diretta, è tra i più stabili della serie. Si poté così constatare che, in opportune condizioni, i sali cromosi (Cr^{2+}) in presenza di carbilammine aromatiche, danno luogo, attraverso ad un probabile complesso cromoso carbilamminico, ad uno sproporzionamento



che reca a sali cromici carbilamminici sinora non isolati e alle cromo (0) esarilcarbilammine $[\text{Cr}^0(\text{CNR})_6]$.

Questi complessi sono assai stabili all'aria allo stato solido, meno in soluzione, ma non tanto che non si possano cristallizzare senza particolari cautele. Sono intensissimamente colorati in rosso, dal rosso ceralacca a quello ciliegia, a seconda dei sostituenti del radicale aromatico. Essi dimostrano una notevole attitudine a cristallizzare e sono diamagnetici come il cromoesacarbonile a cui possono paragonarsi in quanto a distribuzione elettronica.

Furono sinora ottenuti i derivati delle seguenti arilcarbilammine: fenil-, paraclorofenil-, paratolil-, paranisil-carbilammina, che verranno descritti dettagliatamente in una prossima pubblicazione.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) Questi « Rendiconti », VIII, II, 379 (1951).

Chimica organica. — *Sullo spettro Raman della 2-tiofenaldeide* (*). Nota di PAOLO CHIORBOLI e ANNA MARIA DRUSIANI, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

Dopo aver ampiamente esaminato in precedenti lavori gli spettri Raman dell'aldeide furilica ⁽¹⁾ e pirrolica ⁽²⁾, appariva di notevole interesse uno studio parallelo dello spettro Raman dell'aldeide tiofenica, ancora sconosciuto. Su questo spettro appunto vogliamo qui brevemente riferire. È stato studiato sia lo spettro della tiofenaldeide pura, sia lo spettro della stessa in soluzione benzenica e in miscela con fenolo a varie concentrazioni. I risultati sperimentali sono riassunti nella tabella I, dove con punto interrogativo sono contrassegnate quelle righe che, registrate nei nostri spettri, potrebbero derivare da eccitazioni secondarie di altre oscillazioni molecolari da parte delle componenti «f» e «g» a 22995 e 23040 cm^{-1} del tripletto del mercurio a 4358 Å: in tali casi è comunque specificata l'attribuzione probabile.

La tiofenaldeide utilizzata è stata preparata nel laboratorio di chimica organica di questo Istituto, con la collaborazione della Prof. E. Ghigi, secondo il metodo di Biedermann ⁽³⁾, per decarbossilazione dell'acido tienilgliossilico. Questo a sua volta è stato ottenuto per ossidazione con KMnO_4 in ambiente alcalino dell'acetotienone. Il prodotto, appena preparato, si presenta come un olio debolmente giallino, avente odore di mandorle amare: esso, alla pressione normale, bolle a 198° C. Il prodotto (facilmente alterabile all'aria), prima di ogni esperienza, è stato accuratamente purificato e reso del tutto incolore per ripetute distillazioni a pressione molto ridotta (fra i 5 e i 10 mmHg) in atmosfera di azoto puro, e sempre in atmosfera di azoto puro e a pressione molto ridotta i tubicini Raman sono stati saldati alla fiamma. Solo con queste precauzioni si riesce a mantenere assolutamente limpido ed incolore il contenuto dei tubicini stessi anche dopo le più lunghe pose. La purificazione degli altri prodotti usati è stata curata come si è già avuto occasione di ricordare in parecchi precedenti lavori.

(*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica-fisica ed idrologica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto chimico «G. Ciamician» dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 9 febbraio 1952.

(1) ROLLA, CHIORBOLI, «Gazz. Chim. Ital.», 79, 513 (1949).

(2) BONINO, MANZONI, PRATESI, «Z. f. Physik. Chem.», 25, 348 (1934); MANZONI, «Ricerca sci.», 1935, vol. II, pag. 111, 180; GHIGI, CHIORBOLI, «Boll. sci. fac. chim. ind.», Bologna, 9, 89 (1951); CHIORBOLI, MORELLI-EMILIANI, «Gazz. Chim. Ital.», 81, 906 (1951); BONINO, CHIORBOLI, «Questi Rendiconti» [VIII], 11, 247 (1951).

(3) BIEDERMANN, «Ber.», 19, 637 (1886).

TABELLA I.

Spettro Raman della 2-tiofenaldeide.

Tiofenaldeide pura	Tiofenaldeide in benzolo ($\gamma = 0,49$)	Tiofenaldeide in benzolo ($\gamma = 0,09$)	Tiofenaldeide in fenolo ($\gamma = 0,59$)	Tiofenaldeide in fenolo ($\gamma = 0,28$)
164 ($2^{1/2}$)	162 ($1^{1/2}$)	—	165 (2)	162 ($1^{1/2}$)
238 ($^{1/2}$)	—	—	236 ($^{1/2}$)	—
294 ($^{1/2}$)	—	—	295 ($^{1/2}$)	—
427 ($^{1/2}$)	—	—	—	—
461 ($1^{1/2}$)	463 (1)	—	463 (1)	464 ($^{1/2}$)
618? (0); f-675	—	—	620? (0); f-677	—
672 (9)	673 (6)	670 (2)	670 (6)	670 (4)
738 ($1^{1/2}$)	—	—	—	—
768 (3)	770 (2)	770 ($^{1/2}$)	768 (2)	769 (1)
872 (2)	872 ($1^{1/2}$)	874 ($^{1/2}$)	872 ($1^{1/2}$)	870 (1)
930 (1)	—	—	927 (1)	930 ($^{1/2}$)
1000? ($^{1/2}$); f-1057	—	—	—	—
1054 (3)	1052 (2)	—	1055 ($2^{1/2}$)	1055 ($1^{1/2}$)
1087 ($4^{1/2}$)	1085 (3)	1088 (1)	1087 (3)	1086 (2)
1125 ($^{1/2}$)	—	—	1122 (0)	—
1166 ($^{1/2}$)	—	—	1164 (0)	—
1217 (2)	1218 ($1^{1/2}$)	1219 (1)	1218 ($1^{1/2}$)	1215 ($^{1/2}$)
1238? (1); g-1340	—	—	1240? (0); g-1342	1240? (0); g-1342
1294? ($^{1/2}$); f-1351 g-1396	—	—	1290? ($^{1/2}$); f-1347 g-1392	—
1344 (12)	1346 (7)	1347 ($3^{1/2}$)	1348 (8)	1347 (5)
1366? (1); f-1423	—	—	1370? (0); f-1427	1368? (0); f-1425
1396 (13)	1396 (8)	1395 (4)	1393 (9)	1395 (7)
1427 (22)	1429 (13)	1425 (9)	1426 (16)	1429 (10)
1522 ($3^{1/2}$)	1520 ($2^{1/2}$)	1524 ($1^{1/2}$)	1521 (3)	1520 (1)
1573? (1); g-1675	—	—	—	—
1613? ($1^{1/2}$); f-1660	—	—	1610? ($^{1/2}$); f-1657	—
1658 (18)	1656 (6)	—	1655 (15)	1656 (10)
1676 ($17^{1/2}$)	1677 (9)	1678 (6)	1676 (9)	1676 (2)
2859 ($^{1/2}$)	—	—	2860 (0)	—
2921 ($^{1/2}$)	—	—	2923 (0)	—
3015 ($^{1/2}$)	—	—	3010 (0)	—
3084 ($2^{1/2}$)	3085 (2)	—	3088 (2)	3085 ($1^{1/2}$)
3107 ($3^{1/2}$)	3112 (3)	3110 (1)	3109 (3)	3110 (2)

 γ = frazione molecolare dell'aldeide nella soluzione.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. — Nello spettro Raman della tiofenaldeide si rilevano facilmente le principali righe nucleari tiofeniche, quale più, quale meno spostata rispetto alla posizione occupata nello spettro dell'eterociclo fondamentale, come del resto accade nello spettro dell'acetotienone ⁽⁴⁾. Anche le intensità relative di queste righe nucleari sono spesse volte variate passando dal' tiofene alla tiofenaldeide o all'acetotienone.

Ma di particolare interesse (almeno per il momento) ci sembra ancora una volta la manifestazione spettroscopica dell'oscillazione carbonilica. Invero, come già è stato messo in evidenza per l'aldeide furilica da vari autori, e come per detta aldeide fu ampiamente discusso in un precedente già citato lavoro ⁽¹⁾ eseguito presso questo Centro, anche per l'aldeide tiofenica la riga Raman attribuibile all'oscillazione del gruppo C=O appare nettamente sdoppiata in due componenti, fra loro separate di 18–20 cm^{-1} , l'una a 1658, l'altra a 1676 cm^{-1} .

Sembra molto naturale e logico attribuire questo raddoppio della riga carbonilica nello spettro Raman della tiofenaldeide alle stesse cause che producono l'analogo raddoppio della riga corrispondente nello spettro del furfurolo (Tabella II).

TABELLA II.

Righe Raman del gruppo C=O delle aldeidi furilica e tiofenica.

COMPOSTO	Righe carboniliche (cm^{-1})		I_1/I_2
	1	2	
Aldeide furilica	1669 (28)	1690 (19 $\frac{1}{2}$)	1,44
Aldeide tiofenica	1658 (18)	1676 (17 $\frac{1}{2}$)	1,03

Nota. — Le intensità qui riportate per le righe dell'aldeide furilica sono state valutate con lo stesso criterio adottato per le righe dell'aldeide tiofenica (per un diretto confronto), ossia assumendo eguale a 10 l'intensità della riga del mercurio a 4916 Å, come essa compare negli spettri.

Discutendo di quest'ultimo spettro, Rolla e Chiorboli ⁽⁴⁾ hanno rilevato che la spiegazione di tale caratteristica, più plausibile e coerente con tutto l'insieme dei risultati sperimentali emersi dall'indagine Ramanspettroscopica, sembra che si debba ricercare in fenomeni di associazione intermolecolari, i quali, impegnando direttamente il gruppo carbonilico, ne perturberebbero in modo essenziale l'oscillazione di valenza. In tal caso, mentre nelle molecole libere da interazioni associative reciproche il gruppo carbonilico

(4) In corso di pubblicazione.

oscillerebbe con frequenza corrispondente alla più alta componente del doppietto (1690 cm^{-1} per il furfurolo), nelle molecole direttamente associate il gruppo stesso oscillerebbe con frequenza minore, corrispondente alla componente più bassa del doppietto (1669 cm^{-1}). Se pure da un punto di vista prettamente formale il raddoppiamento della riga carbonilica per il furfurolo si potrebbe spiegare in altro modo, questa interpretazione sembra la più attendibile specialmente se si considerano i risultati che si traggono dall'esame degli spettri relativi alle soluzioni dell'aldeide furilica in solventi di varia natura, inerti come il benzolo o nettamente associativi come il fenolo. La notevole variazione relativa delle intensità delle due componenti del doppietto che si registra negli spettri di tali soluzioni, come si è messo in evidenza nel lavoro citato, porta un favorevole appoggio all'ipotesi di dirette associazioni fra le molecole del furfurolo.

Ora vogliamo qui osservare che dallo studio degli spettri Raman delle soluzioni di tiofenaldeide in benzolo e in fenolo a varie concentrazioni si deducono risultati perfettamente paralleli a quelli già discussi per il furfurolo. Per comodità e maggiore evidenza, nella tabella III sono riportate le caratteristiche della riga carbonilica della tiofenaldeide nelle varie soluzioni studiate, con le intensità relative, valutate dalle microfotometrie, assumendo ogni volta eguale a dieci l'intensità con cui nello spettro compare la riga del mercurio a 4916 Å . In sostanza si osserva che nello spettro dell'aldeide pura le due componenti del doppietto hanno quasi la stessa intensità, e che diluendo progressivamente l'aldeide in benzolo si attenua sempre più la componente del doppietto a più bassa frequenza (1658 cm^{-1}), mentre diluendo via via l'aldeide stessa in fenolo tende a scomparire la componente del doppietto a più alta frequenza (1676 cm^{-1}).

TABELLA III.

Caratteristiche del doppietto del $\text{C}=\text{O}$ negli spettri Raman della tiofenaldeide in benzolo e in fenolo a varie concentrazioni.

Sostanza esaminata	Frazione molecolare dell'aldeide	Componenti del doppietto (cm^{-1})		Intensità		I_1/I_2
		I	II	I	II	
Tiofenaldeide pura	I	1658	1676	18	$17\frac{1}{2}$	~ 1
Tiofenaldeide in benzolo . . .	0,49	1656	1677	6	9	0,67
Tiofenaldeide in benzolo . . .	0,09	—	1678	—	6	0
Tiofenaldeide in fenolo	0,59	1655	1676	15	9	1,67
Tiofenaldeide in fenolo	0,28	1656	1676	10	2	5

Ciò fa ancora una volta pensare che nella tiofenaldeide siano presenti molecole in cui il gruppo $C=O$ si trovi in stati diversi di perturbazione, direttamente influenzati dalla natura del solvente e dalle condizioni di diluizione della soluzione. Più in particolare sembra di dover ammettere anche per la tiofenaldeide l'ipotesi dianzi riportata per l'aldeide furilica, cioè che accanto a molecole libere, in cui il gruppo $C=O$ oscilla con frequenza corrispondente alla componente più alta del doppietto (1676 cm^{-1}), sian presenti molecole fra loro associate, per le quali l'oscillazione del gruppo $C=O$ si compirebbe con frequenza minore, come quella della componente più bassa del doppietto (1658 cm^{-1}). Ciò è in accordo col fatto che negli spettri delle soluzioni in benzolo via via più diluite tende a scomparire la più bassa delle due righe carboniliche, essendo le molecole dell'aldeide progressivamente liberate dalle reciproche interazioni perturbatrici, mentre nelle miscele con fenolo, con l'aumentare della percentuale di quest'ultimo, va a mano a mano attenuandosi la riga carbonilica più alta, interagendo il fenolo stesso direttamente, mediante ponti di idrogeno, col gruppo carbonilico, sì da ridurre via via il numero delle molecole di aldeide libere.

Riguardo alle righe proprie del gruppo carbonilico nello spettro Raman della tiofenaldeide, confrontate con le analoghe nello spettro della aldeide furilica, ci sembra interessante anche un'altra considerazione. Già abbiamo avuto occasione di rilevare che nello spettro della tiofenaldeide pura le due righe caratteristiche del gruppo $C=O$ hanno, pressapoco, la stessa intensità. Nello spettro dell'aldeide furilica invece le due righe, sebbene entrambe assai forti, hanno intensità sensibilmente diversa l'una dall'altra, e precisamente la riga a più alta frequenza è nettamente meno intensa di quella a frequenza più bassa. Nel quadro dell'interpretazione che abbiamo dato del doppietto carbonilico nello spettro di questa aldeide, dovremmo pensare, in via semiquantitativa, che nel furfurolo puro sia presente un gran numero di molecole associate e un numero minore di molecole libere, essendo assai intensa la riga carbonilica corrispondente alle prime e meno intensa quella corrispondente alle seconde. Seguendo lo stesso filo logico, nel caso della tiofenaldeide, essendo pressochè di eguale intensità entrambe le componenti del doppietto in questione, si dovrebbe ritenere pressochè equivalente il numero delle molecole libere e di quelle associate. In breve, il confronto delle intensità delle componenti del doppietto corrispondente al gruppo $C=O$ per l'aldeide furilica e quella tiofenica fa pensare ad interazioni associative più energiche e diffuse per la prima che non per la seconda. Percentualmente, insomma, sembrerebbero essere in maggior numero le molecole associate di furfurolo che non quelle di aldeide tiofenica, ossia, in altre parole ancora, nell'aldeide tiofenica dovrebbero essere presenti molte più molecole libere che non nel furfurolo. Questo può ritenersi coerente con la più elevata « aromaticità » del nucleo tiofenico rispetto a quello furanico, per cui l'aldeide tiofenica dovrebbe rivelare più profonde somiglianze elettroniche

e strutturali con l'aldeide benzoica che non il furfurolo. Ora nel caso dell'aldeide benzoica non si manifestano fenomeni di associazione intermolecolare: la riga carbonilica, unica, cade intorno a $1698-1700\text{ cm}^{-1}$ sia per l'aldeide allo stato puro sia per l'aldeide diluita in solventi inerti. Nel caso dell'aldeide tiofenica le interazioni, come si è detto, sembrerebbero più attenuate rispetto a quelle che impegnano le molecole del furfurolo, ossia si manifesterebbe la tendenza ad una situazione meno lontana da quella della benzaldeide. Non è forse fuor di luogo osservare che se pure passando all'aldeide pirrolica, che deriva da un eterociclo meno « aromatico » degli altri due, i fenomeni associativi sono notevolmente esaltati, sì che non si rendono manifeste spettroscopicamente molecole « libere », che comparirebbero solo ad alta diluizione (e ciò risulterebbe indubbiamente coerente con la più profonda differenza fra l'aldeide pirrolica e la benzoica), non sarebbe tuttavia esente da critiche il voler estendere queste nostre considerazioni comparative anche all'aldeide pirrolica, giacchè per essa, come già si è messo in evidenza in precedenti discussioni, si han da considerare questioni particolarmente delicate, e, fra l'altro, è molto probabile che il meccanismo di associazione intermolecolare si espliciti in modo profondamente diverso dal caso delle aldeidi furilica e tiofenica, potendo interessare direttamente il gruppo N-H.

Ci sembra infine interessante rilevare che nelle tre aldeidi eterocicliche α -sostituite del pirrolo, del tiofene e del furano, la coniugazione fra il gruppo carbonilico e il nucleo eteroatomico va decrescendo dalla prima all'ultima, per quanto può dire l'indagine spettroscopica molecolare. Infatti la riga Raman corrispondente all'oscillazione del gruppo $\text{C}=\text{O}$ libero da interazioni intermolecolari (come si può rilevare dallo studio degli spettri di soluzioni diluite in benzolo) cade per l'aldeide furilica a 1690 cm^{-1} , per quella tiofenica a 1676 cm^{-1} e infine per la pirrolica a 1667 cm^{-1} . Ora è noto che la frequenza propria dell'oscillazione carbonilica decresce tanto più fortemente quanto più intensa è la coniugazione fra il gruppo carbonilico ed un sistema di elettroni p_z delocalizzabili che possano partecipare direttamente alla perturbazione degli elettroni p_z del carbonile. Risulterebbe perciò, nel caso in questione, più intensa la coniugazione fra $\text{C}=\text{O}$ e nucleo pirrolico, meno intensa quella fra $\text{C}=\text{O}$ e nucleo tiofenico, meno ancora quella fra $\text{C}=\text{O}$ e nucleo furanico. Se si pensa che, nel quadro della teoria della risonanza, alla coniugazione fra carbonile e nucleo eterociclico, per le tre aldeidi fondamentali, contribuiscono gli schemi di strutture seguenti:

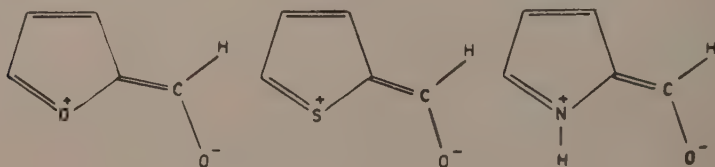


Fig. 1.

dovremo concludere che forme di risonanza di questo tipo hanno un «peso» crescente passando dall'aldeide furilica a quella tiofenica ed infine a quella pirrolica. Ora sembra logico ammettere che ciò debba essenzialmente ascrivarsi alla natura dell'eteroatomo presente nel nucleo ed in particolare alla sua elettronegatività. Che la coniugazione del nucleo tiofenico al carbonile aldeidico, conforme ad uno schema come quello scritto più sopra, sia più intensa della coniugazione del gruppo furanico al carbonile stesso è senz'altro molto attendibile, giacchè, per la minore elettronegatività dello zolfo rispetto all'ossigeno⁽⁵⁾, il contributo di una forma del tipo:

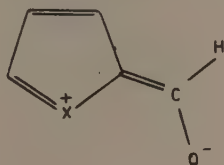


Fig. 2.

in cui l'eteroatomo è positivo, deve ritenersi più probabile per l'aldeide tiofenica che non per quella furanica. Non risulta invece di immediata evidenza l'ancor più forte coniugazione del nucleo pirrolico al carbonile dell'aldeide pirrolica, essendo l'elettronegatività dell'azoto compresa fra quella dello zolfo e quella dell'ossigeno. Ma forse in questo caso la natura particolare dell'intero gruppo iminico, in cui l'atomo di idrogeno può tendere a cedere con una certa facilità il suo elettrone, può portare ad una complessità maggiore, e non sembra affatto da escludere, in seguito a ciò, una più forte stabilizzazione di una forma del tipo:

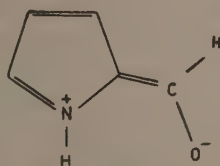


Fig. 3.

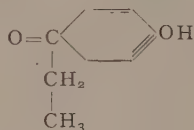
che riassume, se pure in modo troppo semplice e formale, la coniugazione fra carbonile e nucleo eteroatomico.

Ringraziamo il prof. G. B. Bonino che ci ha consigliato questo lavoro e la prof. E. Ghigi per il suo valido contributo nella preparazione dell'aldeide tiofenica.

(5) Ved. per esempio PAULING, *The Nature of the Chemical Bond*, New York, 1945, p. 60 e 227.

Chimica biologica. — *Dati sulle proprietà biologiche del paraossipropiofenone* (H 365) ^(*). Nota di LODOVICO ARRIGO e GIANCARLO MORANDO, presentata ^(**) dal Socio UGO LOMBRoso.

Perrault [1] comunicava, nel 1949, di avere sperimentato in un caso di corionepitelioma maligno l'uso di un composto nuovo in terapia, il paraossipropiofenone (detto anche H 365), con risultati clinici del tutto soddisfacenti. Il paraossipropiofenone, la cui formula è la seguente:



agirebbe come frenatore ipofisario, bloccando soprattutto la secrezione dell'ormone follicolotropo (FSH, inducendo quadri di notevole alterazione ipofisaria, tali da ricordare quelli pseudo-gravidici, ottenibili nella cavia, impiegando alte dosi di estrogeni); l'ormone tireotropo (TSH, Perrault-Vignalou [2]; Gastaldi-Fedeli [3], Pagani [4]) e l'ormone somatotropo (GH, Lacassagne e collaboratori [5], De Bastiani-Sperti [6]). L'azione del paraossipropiofenone risparmierebbe invece completamente la secrezione dell'ormone adrenocorticotropo (ACTH, per quanto questa affermazione non sia confermata dalle ricerche di Montorsi-Salvaneschi-Frignani ⁽¹⁾).

Ancora incerto sarebbe l'effetto sulla secrezione di altri ormoni ipofisari e trascurabile la sua tossicità che ne permette, in campo terapeutico, la somministrazione, anche per lunghi periodi di tempo, persino alla dose di alcuni grammi al giorno, per via orale. Recentemente, esso è stato preparato, anche in forma idrosolubile (Gastaldi, [7]), iniettabile per via parenterale, risultando altrettanto attivo e ben tollerato.

In campo sperimentale, i ricercatori si sono innanzi tutto rivolti ad indagare le modificazioni ponderali e strutturali, che si verificano a livello sia dell'ipofisi che degli altri organi a secrezione interna ad essa collegati (tiroide, gonadi, surreni, ecc.). Le conclusioni però, cui sinora gli Autori sono pervenuti, non appaiono nè definitive, nè concordi: unica nozione sufficientemente sicura è che il paraossipropiofenone induca una vacuolizzazione delle cellule basofile dell'antero ipofisi ed inoltre ricerche istologiche hanno dimostrato, in seguito all'iniezione di forti dosi di tale composto, una spiccata diminuzione numerica anche delle cellule eosinofile (Soulaireac [8]). Esistono infine

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Fisiologia Umana e di Chimica Biologica della Università di Genova.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) «Atti Soc. Lombarda di Scienze Mediche e Biologiche», Vol. VI 179 (1950-51).

osservazioni di Costa [9], che hanno evidenziato lesioni dell'ipotalamo, in parallelo a quelle dell'antero-ipofisi.

A carico di altri organi, i rilievi variano alquanto e ciò è spiegabile, soprattutto in rapporto al fatto che sinora non è stata precisata nè la dose ottimale di impiego del composto, nè l'epoca della sua maggiore attività, in rapporto all'età degli animali ed al loro stadio di sviluppo somatico e sessuale, i quali devono certamente essere tenuti nella massima considerazione, trattandosi di un farmaco, che pare agire sull'ipofisi. A questo proposito, segnaliamo le ricerche di Hirts-Cartron [10], che hanno dimostrato una notevole differenza nei risultati sperimentali, in rapporto alle dosi di H 365 impiegate ed all'età degli animali (ratti), differenze che arrivano sino all'inversione dell'azione, ritenuta propria del preparato, tanto da osservare una attività stimolante, con l'impiego di piccole dosi ed una inibente per quelle elevate.

L'applicazione clinica del paraossipropiofenone è tuttora limitata al trattamento del corion-epitelioma (Zilli [11]; Erede-Odello [12]) e, come vedremo, alla cura di alcuni sintomi di ipertiroidismo. Non mancano naturalmente i risultati negativi di Autori, che lo trovarono inefficace, sia in campo clinico che sperimentale (Schoffenburg-Masson-Mc Cullag [13]).

Parallelamente allo studio del meccanismo di azione del paraossipropiofenone a livello ipofisario, si è fissata all'attenzione sulla sua proprietà di agire sulla tiroide, bloccando la sintesi della tiroxina nella vescicola tiroidea (Ghiretti-Boeri [14]) e determinando la comparsa di un gozzo iperplastico diffuso (De Bastiani-Sperti [6]).

Inoltre il comportamento della glicemia e del glicogeno, soprattutto nel fegato, che tendono entrambi a diminuire, esaltando così la tolleranza verso i carboidrati sia nell'animale integro che diabetico, potrebbe rappresentare un indice di uno stimolo inibitore diretto, esercitato dal composto, sui componenti tissurali, sensibili all'azione della tiroxina (Gastaldi-Fedeli [15]).

Come applicazione clinica, oltre che sul corion-epitelioma, l'azione più importante del H 365 si osserverebbe nei casi di ipertiroidismo, specialmente quando esso si accompagna ad uno stato di iperfollicolismo.

Poichè questa condizione (iperfollicolinemia-ipertireosi) sarebbe molto frequente (Olmer e collaboratori [16]), ne deriverebbe l'importanza terapeutica di un frenatore specifico della secrezione follicolotropa e tireotropica dell'ipofisi. Il sintomo, che maggiormente risentirebbe dell'azione del paraossipropiofenone è l'esoftalmo, che di solito è molto difficile a dominare con altri mezzi, quando sia durevolmente instaurato. È noto infatti che anche in soggetti, operati di tiroidectomia, perchè affetti dal morbo di Flaiani-Basedow, l'esoftalmo può permanere indefinitamente.

I casi di ipertiroidismo, trattati con H 365, appaiono ormai numerosi in Francia, pressochè univoci per i costanti risultati soddisfacenti ottenuti. Meno numerosa è la casistica in Italia: in particolare, uno di noi ha osservato la rapida regressione dell'esoftalmo ed una cospicua attenuazione della sintomatologia clinica, in un caso trattato con ctgr. 75 al giorno per os.

TABELLA I.
Metabolismo gassoso di ratti (valori medi).

Peso corporeo gr.	N O R M A L I						T R A T T A T I							
	Consumo O ₂			Sviluppo CO ₂			Q. R.	Consumo O ₂			Sviluppo CO ₂			Q. R.
	Kg/h litri	cm ³ /h	gr/h	Kg/h litri	cm ³ /h	gr/h		Kg/h litri	cm ³ /h	gr/h	Kg/h litri	cm ³ /h	gr/h	
110	1,72	190	0,132	1,42	79,7	0,157	0,82	1,58	174	0,121	1,20	67,0	0,132	0,75
130	1,60	202	0,142	1,38	91,4	0,180	0,85	1,45	189	0,132	1,06	70,6	0,139	0,73
150	1,47	220	0,153	1,261	96,0	0,189	0,81	1,30	198	0,138	1,04	80,2	0,158	0,80
170	1,41	240	0,167	1,21	104,6	0,206	0,86	1,22(*)	208	0,145	0,91	78,7	0,155	0,74

(*) I dati di questo ultimo gruppo sono stati controllati su animali normali di uguale peso, trattati per 14 giorni con il preparato, poichè di solito i ratti in accrescimento, nati nei due mesi e mezzo non raggiungevano un peso medio di gr. 170 (vedi tabella III).

Infine un altro campo, in cui il farmaco agirebbe, in modo specifico, è quello delle melanosi. Nei cinque casi trattati, sinora noti, sarebbero stati raggiunti ottimi risultati (Grupper-Plass-Baudin [17]). Questa osservazione sarebbe spiegabile, con i risultati sperimentali delle ricerche in « vitro » di Ghiretti-Boeri [14], i quali hanno dimostrato, come il H 365 inibisca l'ossidazione della tirosina, cioè « il passo per la formazione sia dell'ormone tiroideo che delle melanine ».

Data la frammentarietà e la provvisorietà delle conclusioni della letteratura, ci è parso utile controllare, in un primo gruppo di ricerche, l'azione globale del paraossipropiofenone sull'accrescimento corporeo e sul ricambio gassoso, per accertarne, in via preliminare, l'effettivo livello di azione, diretta oppure indiretta (attraverso l'ipofisi) sulla tiroide, appunto perchè dati della letteratura valorizzano, come abbiamo esposto, più l'una o l'altra di queste possibilità.

CONDIZIONI SPERIMENTALI. — Abbiamo iniettato a ratti albin, maschi, delle stesse nidiate, nati da circa 25 giorni, mgr. 15 pro capite e pro die di paraossipropiofenone, in soluzione acquosa ⁽²⁾, per un lungo periodo di tempo (due mesi e mezzo circa), sottoponendo gli animali, dal momento in cui superavano i gr. 100 di peso, a determinazione del ricambio gassoso, in condizioni di digiuno da 6-8 ore, per la durata media di tre ore, in apparecchio di Haldane-Lombroso. I ratti erano tenuti a dieta mista normale, prevalentemente glucidica e somministrata a volontà. La temperatura ambientale, in cui abitualmente soggiornavano, era mantenuta su 16-22° C.

Un analogo controllo di ricambio gassoso abbiamo pure eseguito su cavie maschi, già adulti (vedi tabelle I-II) ⁽³⁾.

TABELLA II.

Metabolismo gassoso di cavie (valori medi).

	Peso corporeo gr.	Sviluppo O ₂ (*)			Consumo CO ₂			Q. R.
		Kg/h litri	cm ³ /h	gr/h	Kg/h litri	cm ³ /h	gr/h	
Cavie normali	400	0,820	368	0,257	0,680	157	0,310	0,84
Cavie trattate	400	0,687	275	0,192	0,500	101	0,200	0,73

(*) Il valore Kg/h - litri è stato calcolato sul peso dell'animale.

Il valore gr/h del consumo di O₂ è stato ottenuto, dividendo i dati volumetrici per la densità del gas (gr/l. 1,429), riportata convenzionalmente a 0°C.

Il valore cm³/h dello sviluppo del CO₂ è stato calcolato, con gli stessi criteri, in base al valore gr/l. 1,977 di questo gas.

(2) Il paraossipropiofenone idrosolubile ci è stato gentilmente fornito dall'Istituto « Ligus » di Genova.

(3) Abbiamo anche controllato l'effetto sul ricambio gassoso del Possipione Recor-dati, in soluzione oleosa, ottenendo analoghi risultati.

Riuniamo nella tabella III i dati iniziali e terminali del peso corporeo di alcuni ratti trattati e non.

TABELLA III.

Accrescimento ponderale di ratti durante due mesi e mezzo.

Ratti normali	Peso corporeo		Ratti trattati	Peso corporeo	
	iniziale	finale		iniziale	finale
1	36	168	1	35	165
2	34	170	2	35	148
3	34	178	3	40	139
4	30	162	4	40	153
5	30	160	5	38	142
6	35	185	6	40	148
7	38	180	7	35	145
8	40	182	8	38	150
9	40	175	9	35	155
10	34	193	10	35	141
Medie	35	175		37	148

In un altro gruppo di ricerche, abbiamo determinato su cavie, secondo il procedimento descritto da Pacchioli-Cardini [18], un esoftalmo sperimentale. Iniettavamo a questi animali per 14 giorni, 5 unità di Ambinon (estratto di ipofisi, contenente ormone tireotropo; prodotto della N. V. Organon) e gr. 0,1 di tiourea. Il grado di sporgenza dei globi oculari era apprezzato con un tipo di esoftalmometro, riportato da Pacchioli-Cardini (vedi tabella IV).

I nostri rilievi sperimentali ci hanno dimostrato che:

1° Il paraossipropiofenone ha realizzato un modesto effetto inibitorio sull'accrescimento ponderale del ratto albino, con uno scarto finale del 15 % circa di variazione in meno negli animali trattati, rispetto i controlli.

2° Esso ha esercitato una discreta azione ipometabolizzante, soprattutto diminuendo la eliminazione oraria di CO_2 ed i valori del quoziente respiratorio (Q. R.). Esso può perciò essere riunito tra le sostanze (tiouracilici, Raab [19]; follicolina, Geriola [20]; testosterone, Galli [21]; progesterone, Meneghini [22] ecc.), le quali esercitano un effetto di risparmio sul dispendio calorico.

TABELLA IV.

	Cavia N°	Sporgenza del globo oculare mm.	Sporgenza finale del globo oculare mm.	Variazioni in mm.
Trattati con H 365 .	1	3,5	4,2	+ 0,7
	2	5,5	5,1	- 0,4
	3	4,5	5,0	+ 0,5
	4	4,5	4,3	- 0,2
	5	4,5	5,1	+ 0,6
	6	3,5	4,1	+ 0,6
	Media			+ 0,4
Controlli	1	4,1	6,0	+ 1,9
	2	3,5	4,5	+ 1,0
	3	3,0	4,0	+ 1,0
	4	2,7	4,5	+ 1,8
	5	3,5	4,5	+ 1,0
	6	3,5	3,8	+ 1,3
	Media			+ 1,4

3° Una prova generica del probabile meccanismo antitireotropo del H 365 risulta dalla inibizione della comparsa dell'csoftalmo, in seguito a trattamento, nella cavia adulta, con ormone tireotropo e metiltiouracile.

CONCLUSIONI. — Da questi dati, risulterebbe perciò confermata, in armonia ad una e l'altra segnalazione della letteratura, soprattutto un'azione diretta sulla tiroide del paraossipropiofenone, rispetto ad un minore interessamento della secrezione dell'ormone somatotropo dell'antero-ipofisi.

La questione centrale, nella discussione delle nozioni attuali sulle proprietà di questo composto, cioè la possibilità di un suo duplice livello di azione (antitiroxinica e antitireotropa, sinora singolarmente segnalate), troverebbe, in questi risultati, un appoggio probativo per tale bivalenza.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] PERRAULT M., VIGNALOU J., «Thérapie», 4, 120 (1949); «La Presse Med.», 57, 998, (1949).
- [2] PERRAULT M., «C. B. S. B.», 144, 1010 (1950); «La Presse Med.», 58, 1010, (1950).
- [3] GASTALDI A., FEDELI S., «La riforma medica», 44, 901 (1950).
- [4] PAGANI C., «Annali di Ost. e Ginecol.», LXXIII, 660 (1951).
- [5] LACASSAGNE A., A. CHAMORRO, N. P. BUN-HOI, «C. R. S. B.», 144, 95 (1950).
- [6] DE BASTIANI G., L. SPERTI, «B. S. I. B. S.», 27, 1517 (1951).
- [7] GASTALDI A., Ibidem, 26, 1638, (1950).
- [8] SOULAIRAC M. A., P. DESCLAUX, H. CHANEAC, J. TEYSSEYRE, «Annales d'Endocr.», 12, 93 (1951).
- [9] COSTA E., «B. S. I. B. S.», 27, 673 (1951).
- [10] HIRTZ G., J. CARTRON, «Annales d'Endocr.», 12, 501 (1951).
- [11] ZILLI A., «La settimana Medica», n. 5 (1951).
- [12] EREDE U., V. ODELO, «Riv. di Ostetricia e Gin. Prat.», XXXIII, n. 8 (1951).
- [13] SCHOFFENBURG A., J. MASSON, L. MC CULLAGH, «The Journ. of Clin. Endocr.», 11, 1215 (1951).
- [14] GHIRETTI F., E. BOERI, «B. S. I. B. S.», 27, 236 (1951).
- [15] GASTALDI A., S. FEDELI, «Progresso Medico», 6, 713 (1950).
- [16] OLMER J., G. ERLANDE, E. ABIGNOLI, «La Presse Med.», 58, 1342 (1950).
- [17] GRUPPER CH., G. PLAS, P. BAUDIN, «Soc. fr. de Dermat. Siphil.», Séance 8 Juin (1950).
- [18] PACHIOLO R., G. CARDINI, «La Clinica Pediatrica», XXXII, 439 (1950).
- [19] RAAB W., «Jama», 128, 249 (1945).
- [20] GERIOLA A., «Rivista Accademia Medica», Genova 1940.
- [21] GALLI T., «Archivio Fisiopat. e Clin. del Ricambio», n. 6 (1938).
- [22] MENEGHINI P., «Archivio Maragliano», 3, 387 (1948).

Geologia. — *Ulteriori dati stratigrafici e paleontologici sul Mesozoico di Castiglione (Rieti)* (*). Nota di CARMELO MAXIA, presentata (**) dal Socio R. FABIANI.

In una precedente pubblicazione ⁽¹⁾ avevo portato una rettifica sostanziale alla cronologia della serie mesozoica affiorante presso l'abitato di Castiglione, sul versante meridionale del M. Lacerone, rientrante nella tav. III, NE, del foglio geologico al 100.000 n. 138, Terni ⁽²⁾.

Tale rettifica consisteva nell'attribuzione al Malm di un complesso di calcari colorati, specialmente sul rosso e sul verde, del tipo «marmo cottanello», che è invece indistinto, per detta località, sul foglio geologico

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia e Paleontologia nell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 9 febbraio 1952.

(1) C. MAXIA, *Sulla posizione stratigrafica del cosiddetto «marmo Cottanello» dei dintorni di Castiglione (Sabina)*. Pubblicazione dell'Istituto di Geologia e Paleontologia della Università di Roma, 1948.

(2) Rilevato da B. Lotti e P. Moderni e pubblicato nel 1911.

n. 138, essendo stato dal Lotti compreso nella formazione della « Scaglia rossa » senoniana ⁽³⁾.

L'interpretazione dell'insigne geologo toscano trovava del resto giustificazione nella notevole somiglianza che esiste tra alcune varietà di calcari appartenenti alla serie del Malm e a quella della Scaglia rossa, per modo che solo uno studio assai minuto consente una discriminazione.

Restavano tuttavia alcuni dati da chiarire, non tanto su questa nuova attribuzione cronologica, basata sulla presenza di grossi *Perisphinctes* trovati presso le cave di « cottanello » sotto Castiglione, nel 1948 ⁽⁴⁾, ma specialmente sui rapporti di giacitura dei vari membri stratigrafici nella stessa località.

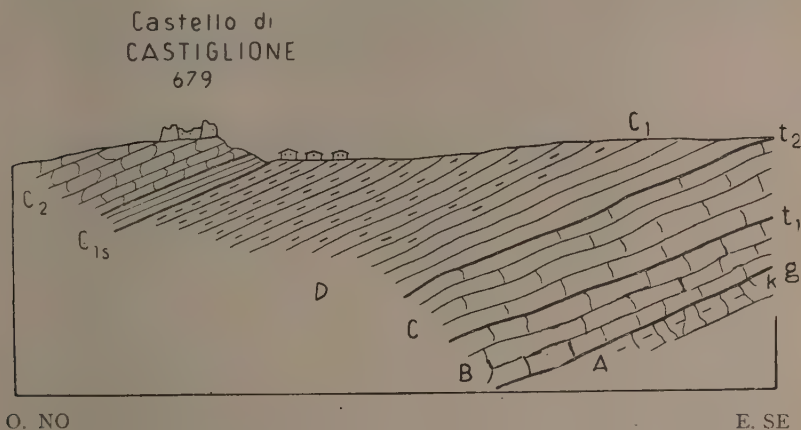


Fig. 1. — Sezione geologica Castiglione-Cappella. Scala 1 : 5000

C_2 — Cretaceo sup. « Scaglia rossa e calcari rosati »; C_{1s} — Albiano. « Scisti a fucoidi »; C_1 — Neocomiano. « Calcare maiolica »; t_2 — Malm superiore (« Titonico-Kimeridgiano »); « Maiolica inferiore »; t_1 — Giurese superiore. Calcare ad ammoniti; — g Giurese medio? Calcare talora selciosi ad aptici.

Nuove ricerche di campagna mi hanno infatti permesso, grazie anche al rinvenimento di altre ammoniti del Giurese superiore, di portare ulteriori elementi, basati sulla stratigrafia dettagliata della zona, a conferma dell'età risultante inizialmente soltanto dai dati paleontologici.

I fossili recentemente rinvenuti, che saranno presto illustrati, provengono dai calcari rossi e verdi, compatti, sottostanti ad altre varietà dello stesso tipo litologico, più o meno colorate e listate, soprattutto nelle tonalità gialla, rossa e verdiccia. Questi, a loro volta, passano verso l'alto ai calcari « maiolica » con selce del Neocomiano, ai quali concordantemente si sovrappongono straterelli di calcari marnosi, variamente colorati e con impronte di alghe, e pertanto facilmente identificabili con gli « Scisti a fucoidi » (Albiano, Bonarelli, 1940) ⁽⁴⁾. Sopra questi, infine, presso i ruderi

(3) Ved. anche B. LOTTI, *Descrizione geologica dell'Umbria*. « Mem. descr. della Carta geol. d'Italia », XXI, Roma, 1926.

(4) G. BONARELLI, *Relazione sull'escursione Gubbio-Scheggia*. « Boll. Soc. Geol. It. », LIX, 1938.

del Castello di Castiglione, si passa alla parte inferiore della « Scaglia rossa », con *Globotruncana* cfr. *apenninica* Renz, del Cretaceo superiore (fig. allegata).

Tutto il complesso giurese-cretaceo è immerso ad O-NO di 25°-30°.

Sulla sezione si distinguono inoltre i segni indicanti i punti di ritrovamento delle ammoniti del Giurese superiore (*k*).

Cosicchè risulta che, oltre al calcare rosso del Malm, erano compresi nella formazione della Scaglia rossa anche i calcari neocomiani ed albiani (« Scisti a fucoidi »), i cui strati affiorano con le loro testate tra la cappella di Castiglione ed il castello omonimo.

La conclusione alla quale avevo potuto pervenire in linea di massima fin dal 1948, è quindi ora pienamente confermata, sia dal rinvenimento di specie di ammoniti caratteristiche del Malm, sia dall'esame particolareggiato della serie stratigrafica.

L'adunamento dei fossili più importanti e meglio conservati si trova su una lastra appartenente alla faccia superiore (tetto) di uno strato di calcare rossiccio, compatto, a chiazze gialliccie o verdastre, che è letteralmente tappezzata di piccole ammoniti, tra le quali ho finora riconosciute:

Phylloceras ptychoicum Quenst.

Lytoceras quadrisulcatum d'Orb.

Vi si nota, inoltre, un piccolo gasteropoda del gen. *Spinigera*. Tra gli altri esemplari isolati, si ha un frammento di grosse dimensioni di *perisphinctes*, rinvenuto in uno strato che giace pochi decimetri più in alto dei fossili prima ricordati, identificabile col *P. ernesti* De Loriol, illustrato anche dal Ramaccioni per il M. Cucco (« Paleont. Italica », XXXIX, 1939, tav. XIV, fig. 3).

Ai molluschi si devono finalmente aggiungere alcune valve isolate di aptici, tra le quali una col margine sinfisico rettilineo, angolo terminale acuto, angolo umbonale poco minore del retto, angolo apicale leggermente ottuso; con strie di ornamentazione parallele all'orlo laterale, per dirigersi quindi, normalmente, al margine interno. Per la forma generale e per i suddetti caratteri parmi poter senz'altro identificare questo fossile con l'*Aptichus lamellosus* Park., trovato per la prima volta nei calcari di Solenhofen.

Se ora, fra le tipiche successioni stratigrafiche del Mesozoico medio di facies umbro-marchigiana si considera quella data dal Fossa-Mancini per il Giurese della Montagna della Rossa (« Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. », Mem., XXX, 1915), si potrebbero forse attribuire le ammoniti di Castiglione al secondo dei livelli di « ammoniti pigmee » (spesso associate ad esemplari giganteschi - come avviene a Castiglione! -) fra quelli che lo stesso A. indica, rispettivamente, per l'Oxfordiano inferiore, il Kimeridgiano-Titonico inferiore ed il « piano della Maiolica ».

Per una più precisa età dei nostri fossili aggiungerò che i livelli con ammoniti di Castiglione sono almeno due, sempre del Malm. Di essi, quello

più basso, al quale questa Nota si riferisce, contiene forme la cui associazione ritengo trovi corrispondenza negli «strati ad *Aspidoceras acanthicum*», e cioè nel piano Kimeridgiano.

D'altra parte, tra la Maiolica p.d. di Castiglione e la formazione con ammoniti ora indicata, si ha, come avviene nei dintorni di Gubbio⁽⁵⁾, una balza di calcari rupestri⁽⁶⁾, la quale potrebbe corrispondere alla «Maiolica inferiore» (Kimeridgiano-Titonico di Bonarelli, 1940).

Stratigrafia. — *Scoperta di una fauna pigmea nella dolomia norica della Val Solda* (Nota preliminare)^(*). Nota di SERGIO CONTI, presentata^(**) dal Socio G. ROVERETO.

Premesso che spero presto ultimato uno studio più generale sulla geologia della Val Solda e regioni contermini che io ho in corso per la parte paleontologica e stratigrafica ed il prof. Boni per la parte tettonica, mi limito qui a dar sommaria notizia sul ritrovamento di una particolare fauna che ritengo di notevole interesse paleontologico e stratigrafico.

Durante una delle escursioni effettuate in compagnia del prof. Boni furono raccolti alcuni campioni di una lumachella in cui sono a mala pena riconoscibili frammenti e modellini di piccoli lamellibranchi. La lumachella suddetta forma un livello che si può scorgere affiorante in direzione solo per alcuni metri e per una potenza di alcuni decimetri soltanto o forse di un metro circa, intercalato nella dolomia bianca cristallina a superficie farinosa; detta intercalazione è essa stessa costituita da dolomia biancastra presentante piccole chiazze e plaghette rugginose.

La località del ritrovamento si trova a q. m. 1050 circa lungo un sentiero secondario che sale al valico della Costa Ciappei e che si stacca sul lato destro ed a q. m. 800 circa dalla mulattiera che sale a C. Roverè dal ponte di S. Rocco sopra a Puria. La posizione stratigrafica di tale livello poté subito essere riferita, anche prima delle determinazioni paleontologiche, ad un termine medio-superiore del Norico perchè circa 50 m. sopra al livello fossilifero la dolomia cristallina diventa grigio scura, e ancora poco oltre sorregge gli scisti marnosi grigio-neri che costituiscono la base del Retico e che subito alternano con calcari grigi a facies e fossili di lumachella retica. La separazione del Norico dal Retico è comunque assai netta poichè alla concordanza ed alla successione tranquilla della stratificazione (in senso strettamente locale, fanno riscontro le variazioni caratteristiche della litofacies ed i livelli fossiliferi basali del Retico che forniscono un buon carattere da terreno.

(5) G. BONARELLI, op. cit.

(6) C. MAXIA, op. cit., fig. 2.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia della Università di Genova.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

I precedenti rilevamenti di Repossi ⁽¹⁾, di Bistram ⁽²⁾, di Catalisano ⁽³⁾, sebbene più o meno dissimili tra di loro nei riferimenti stratigrafici e nelle interpretazioni tettoniche del complesso Mesozoico che costituisce il versante settentrionale del L. Ceresio, assegnano però concordemente al Norico la località in cui è stato effettuato il recente ritrovamento del livello fossilifero.

I primi tentativi di isolare sul posto qualche fossilino dalla lumachella in parola hanno dato risultato negativo per la frammentarietà degli esemplari che si potevano ricavare; ma dopo appropriata calcinazione in laboratorio potei isolare con lungo e paziente lavoro un buon numero di modellini assai ben conservati. Tutti i lavori per isolare, ripulire e preparare gli esemplari, come pure per l'osservazione dei caratteri per la loro identificazione, sono stati eseguiti al binoculare con ingrandimenti di 20/40 diametri.

Le dimensioni delle varie specie sono molto uniformi e in ogni caso molto piccole oscillando da mm. 1,5 a mm. 5; rari sono i casi di individui con diametri maggiori di 6 mm.

La composizione della fauna è la seguente:

Gasteropodi:

- Naticopsis (Marmolatella) plana* Kok.
- Neritaria candida* Kittl.
- Platychilina Cainallai* Stopp.
- Angularia (Purpurina) pleurotomaria* Mstr.
- Purpurina Hoffmanni* Cap.
- Euchrysalis sphinx* Stopp.
- Loxonema acutispinata* Cap.
- Cerithium rotundatum* Terq.
- Tuba (Protuba) intermittens* Kittl.
- Actaeonina tritica* Terq.

Larnellibranchi:

- Avicula Ceresii* n. sp.
- Avicula ornato-plicata* Scal.
- Lima angulata* Mstr.
- Placunopsis alpina* Wincl.
- Placunopsis Mortilleti* Stopp.
- Placunopsis Schafhäutli* Wincl.
- Modiola dimidiata* Mstr.
- Nucula Goldfussi* v. Alb. var. *ticinensis* n. var.
- Nucula Matanii* Stopp.
- Nucula Puriae* n. sp.

(1) E. REPOSSI, *Osservazioni stratigrafiche sulla Val d'Intelvi, la Val Solda e la Val Menaggio*. «Atti Soc. Italiana di Sc. Nat.», vol. XLI, 1902.

(2) A. F. (v.) BISTRAM, *Das Dolomitgebiet der Luganer Alpen*. «Geol. - Palaeont. Studien in den Comasker Alpen», Freiburg, 1903.

(3) S. CATALISANO, *Foglio Chiavenna della carta al 100.000 del Servizio geologico d'Italia*.

- Nucula subcuneata* d'Orb. var. *parvula* n. var.
Nucula subnuda d'Orb.
Nucula subrotunda n. sp.
Nucula strigillata Gold.
Leda clavellata Ditt.
Leda Valsoldae n. sp.
Leda (*Nuculana*) *tirolensis* Woehr.
Heminajas Woehrmanni Waag. var. *nana* n. var.
Myophoria orbicularis Bronn. var. *nana* n. var.
Myophoria ovata Gold. var. *minuta* n. var.
Schizodus Stenonis Stopp.
Myophoriopsis (*Pseudocorbula*) *Catalisanii* n. sp.
Myophoriopsis (*Pseudocorbula*) *gregaria* Mstr.
Myophoriopsis (*Pseudocorbula*) *incrassata* Mstr.
Myophoriopsis (*Pseudocorbula*) *Sancti Mameti* n. sp.
Myophoriopsis (*Pseudocorbula*) *perlonga* Grupe.
Myophoriopsis (*Pseudocorbula*) *subpyramidata* n. sp.
Myophoriopsis (*Pseudocorbula*) *Repossii* n. sp.
Astarte Cocchii Cap.
Astarte Willebadessensis Roem. var. *gracillima* n. var.
Lucina alpina Wincl.
Lucina Stoppaniana Ditt.
Unicardium Bistrami n. sp.
Myophoricardium Bonii n. sp.
Rhaetidia praenutia Stopp.
Anodontophora lettica Quenst. var. *parvula* n. var.
Pleuromya ? *Bekei* De Stef.
Corbula depressa Cap.
Corbula imperfecta Cap.
Taeniodon praecursor Schloen.

Delle 50 forme distinte nel Norico della Val Solda, 18 sono nuove, e di queste, 10 sono indicate come specie nuove e 8 come nuove varietà.

Accenno qui brevemente che l'alto numero di forme nuove è giustificato sia dalla posizione e dall'età del livello qui segnalato e così poco noto, sia dal carattere nano della fauna. Preciso ancora che il criterio a cui ho ritenuto di attenermi nella distinzione delle 8 varietà è stato quello di abbinare nella valutazione dei caratteri distintivi in confronto di forme già note, il requisito di un nanismo spinto (spesso presentante taglia di 5-10 volte inferiore a quello di forme affini) con quelle differenziazioni morfologiche che da sole avrebbero forse potuto in qualche caso essere considerate come variabilità individuale nell'ambito della specie; pertanto non abbiamo fatto questione di dimensioni nei riferimenti ove si riscontrano perfette corrispondenze morfologiche, anche se la taglia delle forme già note era considerevolmente superiore.

Ritengo ancora opportuno notare che a seguito delle minuscole dimensioni, dello stato fossile di modellini, ed in alcuni casi, della deficienza di caratteri nettamente differenzianti, è necessaria qualche cautela nella interpretazione delle determinazioni per cui il concetto di specie e di varietà può essere valutato in rapporto a quanto potrebbe essere attribuibile a variabilità individuale.

Da un primo esame, in ogni caso non definitivo, della fauna pigmea di questo livello, ho potuto sino ad ora rilevare che delle 32 forme presenti già precedentemente note sulle 50 elencate (10 gasteropodi e 40 lamellibranchi), 17 sono già note nel Retico, 11 nel Carnico con altre 3 nel Keuper inf., e talune ancora nel Ladinico o nel Muschelkalk.

La constatazione più curiosa nell'esame comparativo di questa fauna della Val Solda consiste nel fatto che delle 50 specie riportate, nessuna risulta già nota nel Norico; ciò è senza dubbio in relazione alle scarse conoscenze paleontologiche che si hanno di questo periodo in confronto a quelle del Carnico e del Retico, i cui livelli calcarei scistosi e marnosi presentano ben diverse condizioni e possibilità di fossilizzazione e di conservazione rispetto alla dolomia.

Anche in assenza di specie noriche già note, la fauna in parola, statisticamente considerata concorda molto bene con quegli elementi stratigrafici che già in precedenza si potevano dedurre solo in base alla posizione del livello sulla scorta della facies litologica; si ha infatti:

il 34 % di specie retiche;

il 36 % di nuove forme (che, almeno per quanto sino ad ora è noto possono essere considerate in rappresentanza di specie noriche esclusive);

il 28 % di specie carniche (22 % propriamente carniche e il 6 % di Keuperiane inf.);

per cui il livello a lumachella della Val Solda è da riferirsi ad un termine medio-superiore del Norico con caratteri evidentissimi di transizione tra il Carnico e il Retico.

Un esame più approfondito che ho in corso sui singoli componenti di questa fauna contribuirà non poco a colmare una lacuna nelle nostre cognizioni stratigrafiche posta tra due suddivisioni del Trias tanto bene rappresentate paleontologicamente; sono infatti estremamente rare le forme sino ad ora note che passano dal Carnico al Retico, e per tutte esiste la lacuna del ritrovamento Norico; si potrà riconoscere che un certo numero di forme passano dal Carnico al Norico come ultima tappa, talune perdurando sino dall'Anisico (*Lima angulata*, *Nucula strigillata*) e persino dal Buntsandstein (*Myophoriopsis* (P.) *gregaria*) e numerose altre dal Ladinico e dal Muschelkalk; si potrà conoscere che la comparsa di numerose forme, sino ad ora note solo nel Retico, risale al Norico, taluna di esse perdurando anche nel Lias inf. (*Cerithium rotundatum*, *Actaeonina tritica*).

Oltre a ciò, l'importanza e l'interesse del rinvenimento di questa fauna sono di molteplice ordine, perchè :

in primo luogo rivela in un unico livello del Norico una ricchezza di forme sinora ignota a questo periodo, e ciò non solo nelle Alpi ed in Italia, ma in tutta Europa, poichè la presente, per ciò che sino ad ora ho potuto appurare, è la più ricca fauna Norica segnalata;

documenta su base paleontologica la presenza del Norico in Val Solda e conseguentemente in tutta la vasta fascia che da tale zona giunge sino al Lago di Como nei dintorni di Menaggio;

arrec, con il suo carattere di nanismo spinto e uniforme, al massimo grado « pura e selezionata » secondo la classificazione del Boni ⁽⁴⁾, un nuovo contributo alla conoscenza delle faune pigmee ancor oggi così poco note; a questo proposito saranno date in sede più adatta di quanto esiga la presente Nota preliminare, più ampie notizie e correlazioni paleobiologiche, ma sin d'ora accenno ch  a tale fauna pigmea non   associata alcuna forma di dimensioni superiori ad 1 cm., che le forme presenti appartengono in grande prevalenza a specie note soltanto allo stato nano e frequentemente a generi nani e comunque di dimensioni relativamente piccole, mentre alcuni elementi della nostra fauna trovano invece corrispondenti in specie che altrove si presentano di taglia normale;

riv la che anche qualche genere (*Tuba*, *Euchrysalis*, *Heminajas*, *Unicardium*, *Rhaetidia*) perdurano nel Norico oltre il Carnico in cui erano segnalati come termine pi  alto, e inversamente accerta che 1 genere (*Taeniodon*) noto sinora solo nel Retico compare gi  nel Norico.

Infine la sua particolare composizione non trova corrispondenza alcuna con le altre faune noriche note, e ci  oltre che per il fatto gi  accennato delle conoscenze molto incomplete delle faune alpine e germaniche di questo periodo (si consideri al contrario la ricchezza di forma riportate nella opere classiche sulle faune ladiniche e carniche alpine e sul Muschelkalk e sul Keuper germanici), anche e soprattutto per il carattere pigmeo di tutte le forme qui elencate. La sola fauna norica pigmea a me nota   quella di Moma und Bihar-Gebirge studiata dal Kutassy ⁽⁵⁾, la quale pur presentando condizioni biologiche ed ambientali indubbiamente corrispondenti alla mia, costituisce un livello probabilmente alquanto pi  basso, e differisce completamente per le forme presenti non essendovene alcuna comune.

(4) A. BONI, *Faune pigmee triassiche. Contributo alla paleobiologia del nanismo di faune marine*. « Boll. Soc. Geol. Italiana », vol. LXI, fasc. 1-2, p. 228, 1942.

(5) A. KUTASSY, *Die Triassschichten des B ler und Bihargebirges (Siebenb rgen, Ungarn mit besonderer Rücksicht auf die stratigraphische Lage ihres Rh tikums*. « Verhandl. der Geolog. », Bundesanstalt in Wien, Bd. 1928, n. 11.

Botanica. — *Influenza delle foglie sulla sessualità dei fiori di olivo* (*). Nota di ELEONORA FRANCINI, presentata (**) dal Socio A. CHIARUGI.

In materiale raccolto da un albero di olivo della var. Frantoio, sono rimasta colpita dal forte grado di sterilità delle antere, in fiori fissati per lo studio microscopico alla fine di maggio del 1950 (fig. 1). La sterilità morfologica parziale delle antere dell'olivo non risulta che fosse stata segnalata (cfr. Baldini 1951), mentre da tempo è conosciuto l'aborto parziale dell'ovario, che è stato da taluni interpretato come dovuto a cause ambientali, da altri invece è ritenuto insito nel genotipo degli individui, mostrando percentuali che sono caratteristiche delle diverse varietà, ciò che molto spesso negli alberi coltivati equivale a dire cloni (cfr. Moretini 1951 a).

Nel maggior numero dei casi, le sacche polliniche si presentano come nella fig. 1, cioè completamente degenerate. In qualche altro caso la degenerazione della sacca è parziale, procedendo dalla metà inferiore verso la metà superiore, che è rimasta in parte buona; ci si può rendere conto allora che nella zona necrotizzata sono state colpite le cellule madri, mentre nella zona di transizione si arriva ad avere granuli pollinici, di dimensioni abnormalmente piccole. Nel caso della fig. 10 solo un angolo della sacca porta granuli pollinici, ma questi sono impastati in un materiale glutinoso, che ingombra in grosse sfere anche le cellule del tappeto, come se non fossero avvenuti regolarmente la deposizione ed il rafforzamento della membrana esterna dei granelli pollinici.

Se nella var. Frantoio dell'olivo lo sviluppo delle antere fosse sempre così difettoso, si potrebbe praticamente ritenerla sterile per il polline, cosa che invece non è; è quindi più che probabile che il fenomeno della sterilità pollinica sia stato molto esaltato, nel 1950, da qualche causa insita nelle condizioni stagionali. Io stessa, in materiale raccolto nel 1951, ho potuto vedere che le antere si trovavano quivi in condizioni molto migliori. Ora il materiale 1951 ha mostrato un ritardo di almeno 15 giorni nelle varie fasi dello sviluppo del fiore in confronto a quello del 1950, in quanto ho trovato i fiori raccolti il 26 maggio 1951 su per giù nelle stesse condizioni di quelli raccolti l'11 maggio 1950; le forti piogge del maggio 1951 hanno infatti assai prolungato l'intervallo fra l'emissione delle mignole e la schiusura dei fiori.

Il fatto più interessante riguardo alla sterilità pollinica riscontrata nel maggio 1950 è che i fiori relativi appartenevano ad un ramo dell'albero

(*) Dall'Istituto Botanico della Università di Bari.

(**) Nella seduta del 9 febbraio 1952.

tenuto a controllo per rispetto ad altri defolciati artificialmente. Questa esperienza di defoliazione fa parte di un complesso di esperienze eseguite da Morettini in diverse varietà di olivo coltivate all'Antella, nell'Azienda della Facoltà di Agraria della Università di Firenze, comprendenti la defoliazione di grosse branche (corrispondenti ad interi settori di un albero) o di piccole branche (rami secondari) in epoche successive, a partirsi dal 10 dicembre 1949 fino al 29 marzo 1950. I risultati relativi sono già stati pubblicati (Morettini 1951 *b*), ed io ne riporto qui per sommi capi solo ciò che serve a maggior comprensione di quanto dirò. La determinazione delle gemme a fiore viene fatta a marzo, prima o poi a seconda delle varietà, ad opera delle foglie vecchie di un anno, avanti la nuova foliazione. Il confronto fra le esperienze di defoliazione di grosse branche e le esperienze di defoliazione di piccole branche, ha messo in evidenza che si può avere una certa «migrazione» della determinazione dai rami fogliati a quelli defolciati vicini. Io ho avuto i fiorellini proprio da uno degli alberi (indicato nella nota del Morettini come olivo n. 8) con defoliazione di piccole branche, e li ho avuti sia dei rami defolciati, in cui cioè i fiori erano stati indotti dai rami vicini, sia dei rami fogliati controllo. Mi è grato compiere qui il dovere di ringraziare il prof. Morettini, che mi ha fornito il materiale, ed il dott. Scaramuzzi, che si è sobbarcato la non lieve fatica di fissarlo.

Come ho già detto dappprincipio, il materiale controllo, cioè i fiori nati su rami che a maggio portavano tanto le foglie vecchie quanto le nuovissime, mostra una fortissima percentuale di antere degenerate. Non così però avviene nei rami defolciati. Nei fiori dei rami defolciati il 29 marzo (figg. 2 e 11) le sacche polliniche fertili, almeno in parte, sono più frequenti; in quelli defolciati il 9 marzo (fig. 3) le sacche polliniche sono del tutto buone e particolarmente bene sviluppate; pure buone sono quelle dei fiori dei rami defolciati il 3 marzo (fig. 4), il 25 gennaio (fig. 5) ed il 10 gennaio (fig. 6), sebbene queste ultime fossero di dimensioni un po' minori del solito. Sui rami defolciati il 23 dicembre (fig. 7) ed il 12 dicembre non si sono sviluppati fiorellini.

Per la parte femminile, le cose vanno del tutto all'inverso. I fiori che si sono sviluppati sui rami controllo (fig. 1) hanno avuto un regolare andamento della megasporogenesi nei quattro ovuli, che al 27 maggio, data dell'ultimo prelievo, mostravano stadi del gametofito da uninucleato a tetranucleato. La superficie stigmatica era tappezzata da regolari, abbondanti papille. Nei fiori dei rami defolciati dal 10 gennaio al 3 marzo ho riscontrato aborto dell'ovario ⁽¹⁾, con necrotizzazione del tessuto della area stigmatica (figg. 5, 6 e 8) o dell'epidermide stigmatica (figg. 4 e 9),

(1) I risultati miei si riferiscono, naturalmente, al numero relativamente esiguo di fiori sezionati in serie e preparati per l'esame microscopico. I risultati percentuali dell'aborto dell'ovario in questa esperienza si trovano al prospetto II a p. 473 della già citata nota del Morettini.

avanti la formazione delle papillè, con parenchimatizzazione degli ovuli avanti che venisse a delinearli l'archisporio femminile, e si abbozzasse la formazione dei tegumenti. Nei fiori dei rami defolati il 9 marzo ho riscontrato una forte percentuale di aborto dell'ovario; però i fiori in cui l'ovario si era sviluppato si mostravano particolarmente belli, per la perfetta apparenza sia del pistillo, che degli stami (fig. 3): ciò che mi sembra stia ad escludere un'azione antagonistica nell'ambito del fiore fra la parte maschile e quella femminile, come potrebbe venire in mente considerando che nelle defoliazioni precedenti è bene sviluppato il polline e abortito l'ovario, e nei controlli è bene sviluppato l'ovario ed abortito il polline. Anche nei fiori dei rami defolati il 29 marzo può aversi l'aborto; ho notato inoltre uno sviluppo dell'ovario, anche quando è buono, assai più arretrato che non nei fiori dei rami controllo.

In definitiva si potrebbe così schematizzare il fenomeno. L'olivo è una pianta sempreverde e c'è un lungo periodo dell'anno, corrispondente alla primavera ed all'estate, almeno parzialmente, in cui sono presenti sull'albero le foglie di due annate successive, in quanto le nuove si sono già formate e le vecchie non sono ancora cadute. La determinazione delle gemme a fiore viene fatta ad opera delle vecchie foglie, a marzo, quando ancora le foglie nuove non si sono formate; lo sviluppo dei singoli fiorellini, in particolare la microsporogenesi e lo sviluppo del polline prima, la megasporogenesi e lo sviluppo del gametofito femminile poi, avvengono a maggio, quando sono presenti sull'albero i due tipi di foglie. Sembra risultare, da quanto sopra ho riportato, che deve esistere sul ramo un certo equilibrio fra i due tipi di foglie per il normale sviluppo del fiore ermafrodita, e che mentre le vecchie foglie sono necessarie allo sviluppo dell'ovario, se si sposta l'equilibrio a favore delle foglie nuove, togliendo le vecchie, si favorisce lo sviluppo delle antere ⁽²⁾. Ciò equivale a dire che la espressione della sessualità è regolata dal fogliame. La var. Frantoio è una delle varietà di olivo coltivate a più bassa percentuale di aborto dell'ovario (Morettini 1951 a); ciononostante è bastato privare delle vecchie foglie i rametti portatori dei fiori per indurre la quasi totale sterilità della parte femminile del fiore, mentre questa stessa operazione ha riportato alla normalità le antere, colpite da un forte grado di degenerazione.

Mentre le diverse qualità di olivo hanno diverse percentuali di aborto, talvolta molto elevate, sono stati descritti anche olivi quasi comple-

(2) A questo proposito mi sembra opportuno riferire una informazione del dott. Franco Scaramuzzi circa la pratica della cimatura in maggio dell'olivo, pratica che sta diffondendosi nell'Ascolano, dietro le prove eseguite nei campi sperimentali dell'Ispettorato Agrario di Ascoli Piceno. La cimatura viene eseguita asportando completamente tutto il germoglio apicale dell'anno in corso. Ciò determina non solo lo sviluppo successivo dei germogli posti più indietro, ma anche un maggior sviluppo delle mignole, una percentuale di allegagione maggiore ed una minore cascola dei frutti fino alla raccolta. Quindi la produzione viene ad essere sensibilmente aumentata; inoltre viene eliminata anche la caratteristica alternanza della produzione (un anno di carica ed un anno di scarica).



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

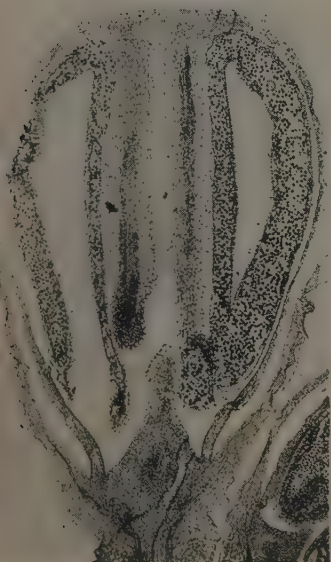


Fig. 4.



Fig. 5.



Fig. 6.



Fig. 7.

SPIEGAZIONE DELLE FIGG. 1-7.

Fig. 1. - Sezione longitudinale di un fiore di ramo controllo. - Fig. 2. - Sezione di un fiore di ramo defogliato il 29 marzo 1950. - Fig. 3. - Sezione di un fiore di ramo defogliato il 9 marzo 1950. - Fig. 4. - Sezione di un fiore di ramo defogliato il 3 marzo 1950. - Fig. 5. - Sezione di un fiore di ramo defogliato il 25 gennaio 1950. - Fig. 6. - Sezione di un fiore di ramo defogliato il 10 gennaio 1950. Fig. 7. Sezione di una gemma rimasta a riposo di ramo defogliato il 23 dicembre 1949, molte altre gemme del quale hanno dato rametti fogliiferi. - Tutto il materiale è stato raccolto il 27 maggio 1950 ($\times 28$).

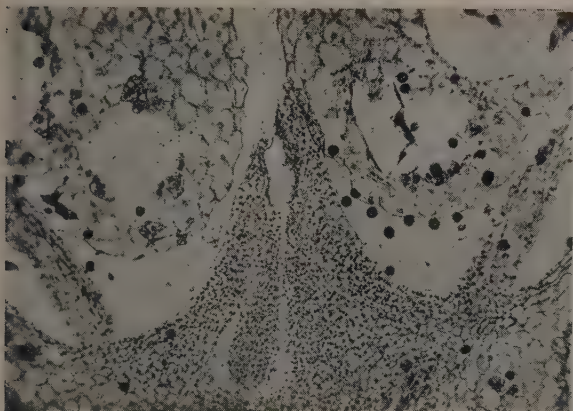


Fig. 8.

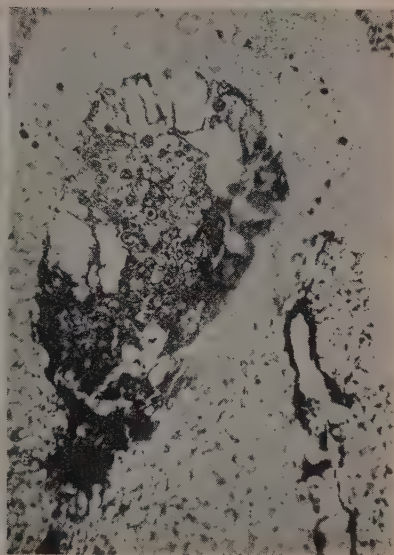


Fig. 10.

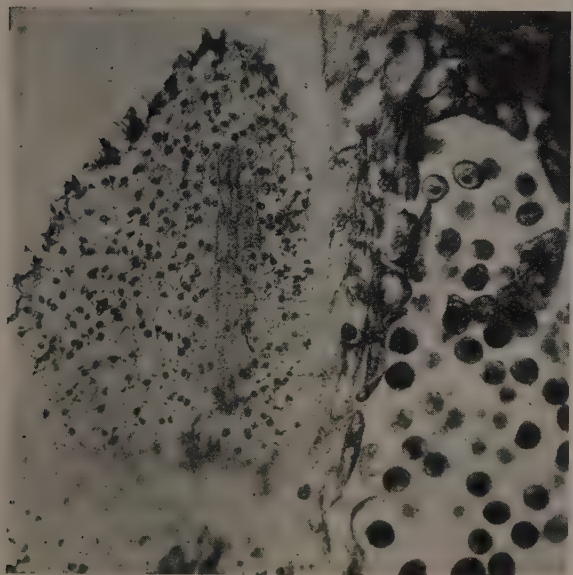


Fig. 9.

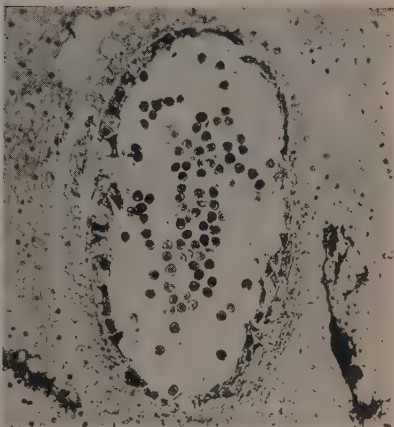


Fig. 11.

SPIEGAZIONE DELLE FIGG. 8-11.

Fig. 8. - Aborto dell'ovario per degenerazione dell'area stigmatica e parenchimatizzazione degli ovuli in fiore di ramo defogliato il 25 gennaio 1950 ($\times 100$). - Fig. 9. - Particolare a più forte ingrandimento della fig. 4 ($\times 250$). - Fig. 10. - Fiore di ramo controllo: porzione di antera buona, ma con polline agglutinato in una massa vischiosa ($\times 100$). - Fig. 11. - Porzione fertile di antera in fiore di ramo defogliato il 29 marzo 1950 ($\times 100$).

tamente mascolini (Campbell 1910, 1912): è dunque evidente l'affermazione di fattori M, fino alla sessualità maschile. Esistono, per contrapposto, olivi femminili? Sulla degenerazione parziale delle antere non si hanno dati, ma c'è un bell'esempio di sterilità totale delle antere in una varietà siciliana, recentemente illustrato da Baldini (in corso di stampa), in cui le tetradi di microspore, appena formatesi ed ancora racchiuse nella membrana della cellula madre, vanno completamente in degenerazione. Se si avessero soltanto gli olivi maschili descritti dal Campbell e quello femminile, descritto da Baldini, si parlerebbe di specie dioica, e si porrebbe in rilievo nel maschio il meccanismo di soppressione del pistillo e nella femmina il meccanismo di soppressione degli stami, alla maniera che si adopera per le specie dioiche. Che poi l'olivo maschio portasse ogni tanto qualche frutto, non meraviglierebbe, perchè questo è un fenomeno comune agli individui maschili, anche nelle specie più decisamente dioiche.

Non mi pare ci possa esser dubbio che i fenomeni connessi alla evoluzione della sessualità nell'olivo abbiano una base genetica. L'affermazione di Morettini (1951 a) che la percentuale di aborto è un carattere varietale, non soltanto ha a suo favore l'indispensabile base dell'osservazione dei fatti, ma rientra anche bene nel quadro generale della tendenza al dioicismo della specie. E se ammettiamo che questi fenomeni di sessualità vengano controllati dal genotipo attraverso all'attività delle foglie, al loro ciclo vitale, complicato nelle sempreverdi dalla coesistenza di più cicli di foglie, potremo meglio comprendere perchè il sesso possa essere nelle piante influenzato in maniera relativamente facile da condizioni ambientali naturali, come l'andamento stagionale, la stagione, ecc., oppure da condizioni sperimentali, in quanto le foglie sono per la loro natura più strettamente legate all'ambiente e quindi più influenzabili di quanto non lo possano essere logicamente i fiori.

BIBLIOGRAFIA.

- BALDINI, E. 1951. *Aspetti genetici della sterilità nell'olivo*. («Olivicoltura», n. 1, gennaio 1951).
- CAMPBELL, C. 1910. *Osservazioni e ricerche sull'olivo chiamato «Maschio»*. («Bull. della Soc. Bot. It.», 1910, pp. 5-12).
- 1912. *Sull'olivo «Dekkar» del sud tunisino, e sulla impollinazione artificiale degli olivi praticata dagli Arabi di certe oasi africane*. («Nuovo Giorn. Bot. It.», n. s., vol. XIX, pp. 73-85).
- MORETTINI A., 1951 a) *Ulteriore contributo allo studio dell'aborto dell'ovario nel fiore dell'olivo*. («Annali della Sperimentazione Agraria», n. s., vol. V, n. 2).
- 1951 b) *Influenza della defoliazione anticipata su la fioritura e la fruttificazione dell'olivo*. («Annali della Sperimentazione Agraria», n. s., vol. V, n. 3).

Zoologia. — *Ricerche sistematiche su alcune specie del genere Ancylostoma* (Dubini, 1843): *Ancylostoma duodenale* (Dubini, 1843) e *Ancylostoma paraduodenale* Biocca, 1951. Nota II di ETTORE BIOCCA, presentata (*) dal Socio D. DE BLASI.

Esistono numerose segnalazioni della presenza dell'*Ancylostoma duodenale* nell'intestino di animali diversi. Tale reperto, qualora rispondesse a verità, rivestirebbe particolare valore epidemiologico poichè ci indicherebbe gli eventuali animali pericolosi per la diffusione della anchilostomiasi umana. Sebbene Looss ⁽¹⁾ avesse seriamente messo in dubbio il valore di queste segnalazioni; tuttavia le osservazioni in animali, di anchilostomi considerati *A. duodenale* si sono ripetute anche dopo il lavoro di Looss. Rimandiamo a questo proposito alla pubblicazione di Van der Berghe ⁽²⁾. Riteniamo perciò utile ricordare schematicamente i caratteri differenziati tra l'*Ancylostoma duodenale* e una nuova specie di anchilostoma, da noi ritrovata in alcuni felini africani (*Felis caffra*, *Felis leo*, *Felis serval*, ecc.), con morfologia simile all'*A. duodenale* e alla quale abbiamo dato il nome di *A. paraduodenale* Biocca, 1951. ⁽³⁾

I caratteri fondamentali dell'*A. paraduodenale* sono i seguenti: vermi piuttosto sottili con l'estremità cefalica rivolta dorsalmente; due paia di voluminosi denti ventrali e un terzo paio interno rudimentale (non sempre evidente); la incisione dorsale della capsula boccale è di forma irregolarmente rotondeggiante con «denti dorsali» simili a piccoli tubercoli. *Maschio*: lunghezza mm 5-8,5; larghezza massima mm 0,210-0,240; esofago lungo mm 0,620-0,730; spicoli lunghi mm 1,100-1,500; borsa caudale: la disposizione dei raggi è simile a quella dell'*A. duodenale* ma i raggi mediolaterali e posterolaterali sono meno divergenti, mentre l'esternolaterale è più lungo e più divergente. *Femmina*: lunghezza mm 6,5-10,0; larghezza massima mm 0,260-0,360; esofago lungo mm 0,520-0,850; apertura vaginale nella parte posteriore del terzo medio del corpo; ano a mm 0,150-0,180 dall'estremità del corpo; coda irregolarmente conica perchè appiattita nel senso dorso-ventrale ⁽⁴⁾.

Questa nuova specie si differenzia dall'*A. duodenale* nelle dimensioni del corpo, nell'estremità anteriore e nell'estremità posteriore.

(*) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) A. LOOSS, *The anatomy and life history of Agchylostoma duodenale* Dub. «Rec. Sch. Med. Cairo», 4, 212 (1911).

(2) L. VAN DER BERGHE, *On the occurrence of a species of Ancylostoma closely related to A. duodenale in an African Lemur*. «J. Parasit.», 22, 224-226 (1936).

(3) E. BIOCCA, *On Ancylostoma paraduodenale, a new species from felines, closely related to A. duodenale*. «J. of Helminth.», 25, 11-18 (1951).

(4) In un *Felis serval* abbiamo trovato recentemente esemplari di *A. paraduodenale* di dimensioni maggiori, le cui femmine raggiungevano la lunghezza di mm 14-15.

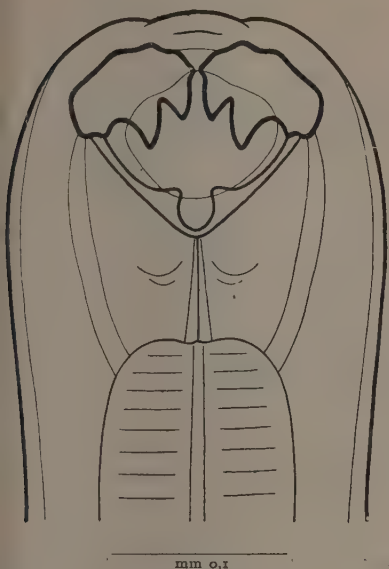


Fig. 1. - *Ancylosotma duodenale* (Dubini, 1843).
Estremità anteriore vista dorsalmente.

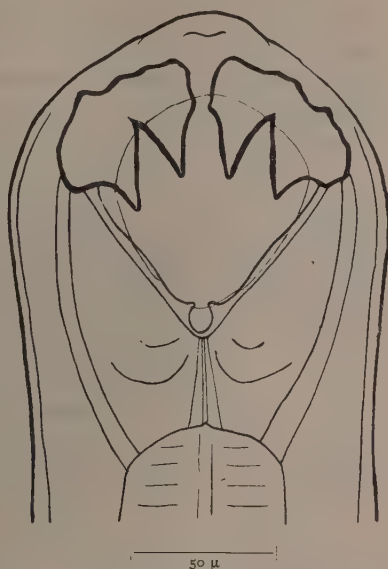


Fig. 2. - *Ancylostoma paraduodenale* Biocca, 1951.
Estremità anteriore vista dorsalmente.

1° *Dimensioni*: l'*A. paraduodenale* ha dimensioni chiaramente più piccole dell'*A. duodenale*. Sebbene alcuni esemplari possano raggiungere anche la lunghezza di 14-15 mm, essi sono però sempre chiaramente più sottili.

2° *Estremità anteriore*: nell'apertura boccale dell'*A. paraduodenale*, il 3° paio di denti interni presenta, a differenza dell'*A. duodenale*, notevoli

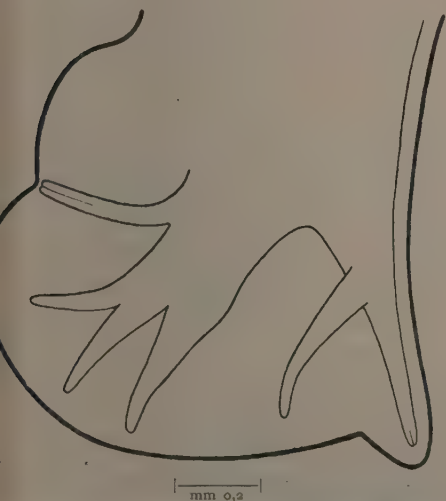


Fig. 3. - *Ancylostoma duodenale* (Dubini, 1843).
Borsa caudale vista lateralmente.

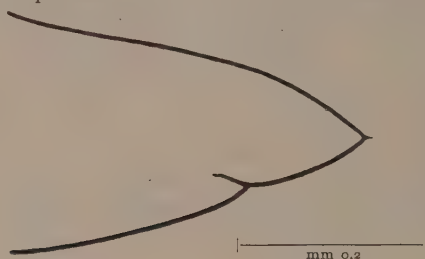


Fig. 4. - *Ancylostoma paraduodenale* Biocca, 1951.
Borsa caudale vista lateralmente.

variazioni nella forma e nelle dimensioni, dando a volta l'impressione che manchi completamente; l'incisione dorsale è molto più piccola e più tondeggiante e i denti dorsali, che nell'*A. duodenale* sono molto evidenti e sporgono chiaramente attraverso la cuticola, sono invece nell'*A. paraduodenale* simili a due tubercoli coperti quasi completamente dalla cuticola (Figg. 1, 2).

3° *Estremità posteriore*: nell'*A. paraduodenale* la borsa caudale del maschio è chiaramente più piccola, presenta una disposizione delle costole laterali diversa da quella dell'*A. duodenale*. L'incisione infatti che separa la costola posterolaterale e mediolaterale è meno profonda; queste due costole sono meno divergenti, mentre la costola esternolaterale è più diver-

Ancylostoma duodenale (Dubini, 1843).
Estremità posteriore della femmina vista lateralmente.



Ancylostoma paraduodenale Biocca, 1951.
Estremità posteriore della femmina vista lateralmente.

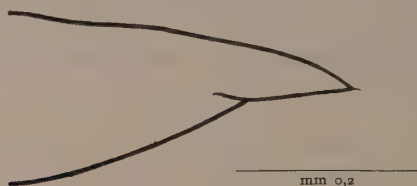


Fig. 5.

gente che nell'*A. duodenale*. Il rapporto della distanza tra le papille terminali mediolaterale posterolaterale e mediolaterale esternolaterale, nella media degli esemplari studiati è stata di 1 : 1,3 nell'*A. duodenale* e 1 : 2 nell'*A. paraduodenale* (Figg. 3, 4). La coda della femmina è conica, corta e non appiattita dorsoventralmente nell'*A. duodenale*, mentre è irregolarmente conica perchè appiattita dorsoventralmente nell'*A. paraduodenale* (Fig. 5).

Anche la distribuzione geografica delle due specie sembra diversa. L'*A. paraduodenale* infatti è stato trovato in regioni africane in cui non è stata segnalata la presenza dell'*A. duodenale* nell'uomo.

Il nome di *Ancylostoma paraduodenale* è stato da noi posto a questo parassita con lo scopo di ricordare che se un anchilostoma, con alcuni caratteri che ricordino l'*A. duodenale* viene ritrovato nell'intestino di un animale, esiste la possibilità che non si tratti di *A. duodenale*, ma di *A. paraduodenale*.

Fisiologia. — *Sul significato della disposizione verso l'epilessia sperimentale riflessa* (*). Nota di ANTONINO ALIBRANDI, presentata (**)
dal Socio C. CIACCIO.

L'epilessia riflessa è riproducibile mediante la classica tecnica di Amantea soltanto in un certo numero di cani che questo Autore denominò predisposti ⁽¹⁾.

In tali animali, salvo rarissime eccezioni, non si notano spontaneamente crisi convulsive ed anzi il loro contegno in ordinarie condizioni non sempre ne lascia prevedere (ed in ogni caso mai con sicurezza) il comportamento nei riguardi del « test » di Amantea.

Questo « test » capace di svelare costantemente la latente reattività epilettogena e di determinarne il grado è costituito dall'applicazione di stricnina (eseguita col metodo di Baglioni e Magnini ⁽²⁾) in corrispondenza di un centro sensitivo-motore della corteccia cerebrale e dalla contemporanea stimolazione della zona cutanea riflessogena corrispondente al centro trattato.

Nel classico schema dell'epilessia riflessa fatto da Amantea la stricnina rappresenta il fattore preparante, gli eccitamenti provocati dalla stimolazione cutanea il fattore scatenante ed un fattore legato alla individualità dell'animale il fattore disponente.

L'analisi elettrocorticografica dell'azione centrale della stricnina rivela come questa essenzialmente consista in una aumentata intensità dell'effetto primario degli eccitamenti afferenti ⁽³⁾. In nessun caso questo aumento primario pare da solo sufficiente a scatenare accessi epilettiformi. Perché questi accessi si manifestino occorre che anche l'effetto postumo raggiunga un'intensità sufficientemente elevata. Io ho infatti dimostrato come l'associazione della stricnina con sostanze tipicamente capaci di aumentare elettivamente tale effetto postumo renda costantemente epilettogena l'azione degli eccitamenti afferenti. La disposizione verso l'epilessia sperimentale riflessa è quindi da considerare dipendente dall'esaltato effetto postumo degli eccitamenti afferenti. Questo prolungato effetto centrale degli stimoli esterni è stato dallo Sherrington paragonato al noto fenomeno della persistenza delle immagini sulla retina ⁽⁴⁾.

L'acustica ci fornisce un paragone anche più semplice. L'effetto acustico dell'urto di un corpo contro un piatto sonoro non si esaurisce mai immediatamente dopo la fine del contatto, il piatto continuando a vibrare per un tempo più o meno lungo.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale della Università di Messina.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) G. AMANTEA, « Il Policlinico » sez. med., 1920; « Pflüger's Arch. f. ges. d. Physiol. », 188, 287 (1921); « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1, 1 (1926).

(2) BAGLIONI e MAGNINI, « Arch. Fisiol. », 6, 240 (1909).

(3) BREMER, « Arch. internat. Physiol. », 58, 53 (1943).

(4) SHERRINGTON, *The integrative action of the nervous system*, London 1911.

L'effetto postumo degli eccitamenti afferenti che attingono i centri nervosi è svelato dall'aumento dell'attività autoritmica di questi. L'entità di tale aumento e la sua durata in parte dipendono dall'intensità dello stimolo esterno e dalle altre caratteristiche di questo ma in parte pure dipendono - ed è questo il fatto sul quale io per primo ho richiamato l'attenzione - dalla individualità dell'animale.

Nel caso del piatto sonoro l'entità dell'effetto postumo e la sua durata analogamente dipendono non soltanto dall'energia che animava il corpo al momento dell'urto ma anche dalla natura del metallo col quale il piatto è costruito. Se il piatto è di rame l'effetto postumo dell'urto sarà bene evidente ma se il piatto è di piombo esso non sarà praticamente apprezzabile (a temperatura ordinaria).

È in nostro potere modificare, accrescendolo, tanto l'effetto postumo sonoro del piatto di piombo quanto l'effetto postumo elettrico di un centro nervoso. Mezzi adeguati si rivelano rispettivamente un congruo abbassamento di temperatura (quale può ad esempio ottenersi immergendo il piatto di piombo in aria liquida) e l'adeguato trattamento con determinate sostanze quali la prostigmina ed i fosfati di sodio ⁽⁵⁾.

Accettata questa mia interpretazione sul significato della disposizione verso l'epilessia riflessa, l'intero problema dell'epilessia (sia riflessa propriamente detta che idiopatica), può a mio avviso trovare una razionale soluzione soltanto attraverso lo studio dei fattori capaci di modificare lo stato di autoritmicità centrale.

Fisiologia. — *L'azione della procaina e del curaro sulla sincronizzazione dell'eccitamento nel muscolo cardiaco. Contributo allo studio delle risposte contrattili di tipo graduato.* Nota di LUIGI SPADOLINI presentata ^(*) dal Corrisp. I. SPADOLINI.

Illustrando il potenziamento post-tetanico osservato nel muscolo cardiaco degli anfibî venne rilevato il fatto assai importante che i potenziali di azione aumentano progressivamente di valore coll'aumentare in altezza delle singole contrazioni. Data la struttura sinciziale del miocardio e quindi la sua corrispondenza ad un elemento unitario (singola fibra) si prospettò la possibilità che nel cuore il potenziamento post-tetanico, nel suo duplice aspetto meccanico ed elettrico, sia legato ad un effetto cumulativo da frequenza per opportuna ripetizione di stimoli, atto a provocare la liberazione di un principio attivo capace di attivare gradualmente (in rapporto alla concentrazione raggiunta) il meccanismo contrattile da un lato e di elevare la sincronizzazione dell'eccitamento dall'altro, onde i singoli potenziali di azione vanno progressivamente aumentando di altezza secondo un andamento

(5) A. ALIBRANDI, « Arch. Fisiol. », 49, 105 (1949).

(*) Nella seduta del 9 febbraio 1952.

graduato⁽¹⁾. Il principio attivo in questione potrebbe identificarsi con l'acetil-colina.

In base infatti, all'azione graduata che anche *in vitro* questo ormone locale esercita a seconda della concentrazione raggiunta, si può soddisfacentemente giustificare il modo graduale col quale si stabilisce o regredisce normalmente ogni manifestazione meccanica od elettrica che esprime la risposta del preparato ventricolare isolato alle condizioni particolari di stimolazione.

Con la presente Nota ho inteso di riprendere in esame la questione dei rapporti che durante dette risposte graduate sembrano sussistere fra fenomeni elettrici e meccanici, onde stabilire l'eventuale esistenza di qualche fattore che entro certi limiti possa ritenersi comune al determinismo di entrambi i fenomeni.

Il ventricolo cardiaco di *Bufo vulgaris* è stato pertanto sottoposto alla azione di sostanze che favoriscono il manifestarsi di reazioni graduate (quali si osservano nel classico fenomeno della scala) ma ad incremento negativo, onde estendere lo studio dei suddetti rapporti a risposte del miocardio che tendono (almeno dal lato meccanico) ad una progressiva diminuzione.

Si è potuto con ciò realizzare un esperimento che avendo un decorso graduato negativo, cioè opposto a quello rilevato nel potenziamento post-tetanico e in genere in tutte le reazioni scalariformi ad andamento positivo, poteva fornirci qualche interessante criterio non solo per riesaminare, riguardo alle manifestazioni elettriche, i dati precedentemente acquisiti, ma per giungere soprattutto a chiarire alcuni aspetti del nuovo problema propostoci.

A tale scopo sono stati utilizzati la procaina e il curaro: sotto l'azione di queste sostanze i singoli battiti cardiaci, guidati o spontanei, sembrano venire gradatamente ostacolati e infine del tutto inibiti, permettendo così un facile evidenziamento del corrispondente comportamento dei potenziali di azione.

Gli effetti più rimarchevoli sono stati osservati dopo qualche tempo che il tessuto ha subito l'azione di tali sostanze, le quali, per lo scopo onde sono state utilizzate, sembrano praticamente equivalersi.

Uno stadio assai significativo delle modificazioni indotte dal curaro⁽²⁾ è ancora caratterizzato dal fatto che mentre verso stimoli isolati o assai distanziati nel tempo non si osservano effetti di particolare rilievo, ripetendo invece gli stimoli in serie con una certa cadenza si constata lo svolgersi di risposte scalariformi in progressivo decremento.

(1) Si ammette che le singole unità funzionali si comportino come dei generatori uguali in parallelo su un unico circuito di utilizzazione (tessuto) di resistenza R .

Chiamando e la forza elettromotrice di un elemento attivo e p la sua resistenza interna, la differenza di potenziale V fra gli elettrodi sarà data dalla formula:

$$V = \frac{e}{p/n + R}$$

ove n è il numero dei generatori.

(2) Venne impiegato curaro brasiliano (Merck) di vecchia data e d-tubocurarina.

A questo tipo di risposta partecipano egualmente tanto le manifestazioni meccaniche che quelle elettriche; man mano, cioè, che i singoli battiti vanno diminuendo di altezza, corrispondentemente diminuisce anche il voltaggio dei relativi potenziali di azione (fig. 1). Il continuo decremento può giungere fino alla estinzione di ambedue le manifestazioni.

La correlazione più evidente fra questi due fenomeni sembra essere sempre rappresentata dalla ripetizione dello stimolo. Nelle condizioni sperimentali in esame l'azione cumulativa da frequenza si rivela come un effetto di desincronizzazione progressiva⁽³⁾, onde i singoli potenziali di azione si abbassano di voltaggio per fenomeni di dispersione temporale (cfr. fig. 1).

Si ricorda che nelle reazioni graduate positive l'effetto da frequenza di stimolazione si rivela, invece, con un aumento progressivo della sincronizzazione dell'eccitamento che raggiunge la sua maggiore espressione nella con-

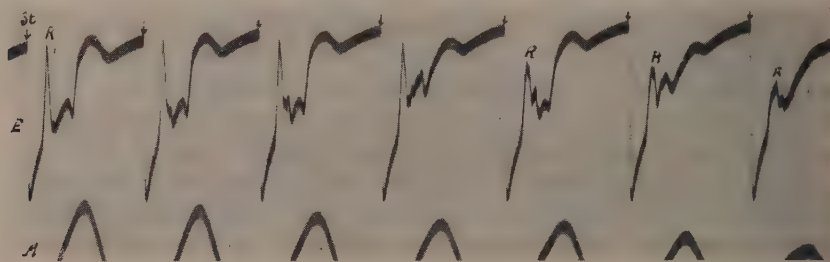


Fig. 1. — Preparato cardio-ventricolare di *Bufo vulgaris* guidato elettricamente (scariche di condensatori) e trattato con curaro Merck (sol. 10^{-5} ; 10^{-6}); registrazione con amplificatore in accoppiamento diretto.

Si osserva una risposta meccanica graduata in progressiva diminuzione e il comportamento analogo dei corrispondenti potenziali di azione. Il decremento presentato dalle singole risposte elettriche appare condizionato da fenomeni di desincronizzazione (dispersione temporale dell'eccitamento) consecutivi a stati di ipoeccitabilità e di refrattarietà variamente distribuiti fra gli elementi contrattili del miocardio.

St. = stimolo; E = elettro-oscillogramma con indicazione del potenziale rapido R; M = meccanogramma; i singoli battiti sono stati registrati soltanto al loro limite superiore.

trazione di tipo tetanico. È questa una contrazione che occorre anche nel miocardio degli anfibì in presenza di un lieve eccesso di calcio nel liquido di perfusione.

Dagli esperimenti finora compiuti sembra però che il processo di desincronizzazione dell'eccitamento solo in parte sia responsabile dello svolgersi delle manifestazioni meccaniche, poichè per quest'ultime sono certamente in causa anche altri fattori. Infatti, il principio attivo (acetilcolina), di cui il curaro ostacola l'effetto sul tessuto muscolare, sembra essere un agente capace di esercitare pure un'azione diretta sul meccanismo contrattile, in-

(3) Si è già prospettata in via di ipotesi la possibilità che a certe concentrazioni l'acetilcolina espliciti su una popolazione di elementi cellulari l'effetto di livellare ad un valore relativamente elevato l'eccitabilità spontaneamente diversa delle singole unità funzionali.

fluendo, secondo la concentrazione raggiunta, sul grado di accorciamento della catena actomiosinica. A riprova di ciò sta il fatto che non si riscontra mai un rapporto molto preciso fra grado di desincronizzazione dell'eccitamento e diminuzione dell'altezza di contrazione, a meno che non si considerino gli stadi pressochè finali dell'azione curarica o procainica. Sovente a potenziali apparentemente assai desincronizzati corrispondono contrazioni ancora efficaci e viceversa.

Comunque da queste osservazioni deriva il concetto che nel miocardio in certe condizioni sono parallelamente possibili risposte graduate meccaniche ed elettriche; esse hanno incremento positivo tutte le volte che si verifica un aumento progressivo della sincronizzazione dell'eccitamento, negativo invece allorchè si instaura un processo graduale di desincronizzazione fra le strutture che costituiscono le unità funzionali fondamentali del miocardio.

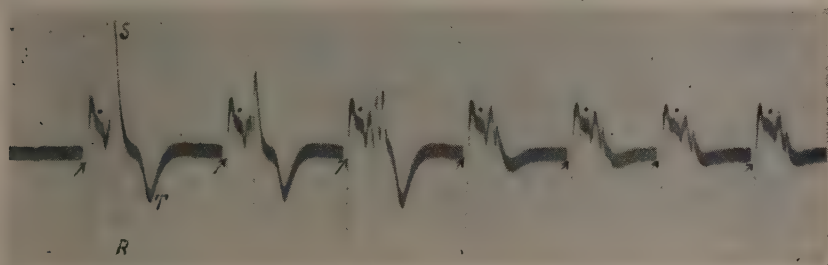


Fig. 2. — Fenomeni progressivi di desincronizzazione del meccanismo eccitatorio quali si osservano nelle risposte graduate negative del preparato ventricolare di rospo sottoposto all'azione del curaro e guidato elettricamente.

Si notino le modificazioni successive presentate dal potenziale rapido *R-S* e da quello lento *T* nel decorso di una serie di battiti. Le piccole frecce indicano il momento dello stimolo. Registrazione con amplificatore Beaudoin ad entrata bilanciata, alimentato in continua; lineare da 5 a 10.000 periodi.

Ambedue i tipi di risposte si manifestano come effetti cumulativi da frequenza. Mentre il primo, però, si presenta come un processo di facilitazione di probabile natura colinergica, il secondo negativo, ci appare nelle sue manifestazioni quale risultato più diretto di un rapido elevarsi dei valori di soglia, come avviene nella fatica. Perciò legato a stati di ipoeccitabilità e di refrattarietà (variamente distribuiti fra gli elementi del tessuto) che vengono peggiorati dalla frequente ripetizione dello stimolo. È molto probabile che tale fenomenologia dipenda dal mancato effetto dello stesso principio attivo per fenomeni di blocco curarico a livello dell'effettore.

Il decremento che sotto l'azione della procaina o del curaro subiscono le manifestazioni elettriche coinvolge tanto il potenziale rapido che quello lento finale (fig. 2).

Il processo di desincronizzazione, cui è stato accennato, è rivelato da incisure più o meno profonde che sostituiscono l'oscillazione a punta del potenziale rapido. Esso si associa ad un aumento del periodo refrattario e a

diminuita velocità di conduzione. Si verifica frequentemente il caso di risposte in serie che dal lato meccanico ed elettrico si alternano per la loro differente intensità.

Quando la desincronizzazione raggiunge gradi elevati, la propagazione dell'eccitamento sembra dapprima effettuarsi in modo efficace soltanto attraverso un numero assai limitato di fascetti miofibrillari, in seguito appare associata a manifestazioni contrattili di scarso rilievo tanto da doversi considerare come risposte di tipo locale ⁽⁴⁾.

I processi di desincronizzazione, come è stato fatto cenno, trovano in gran parte la loro giustificazione in differenti condizioni di refrattarietà e di

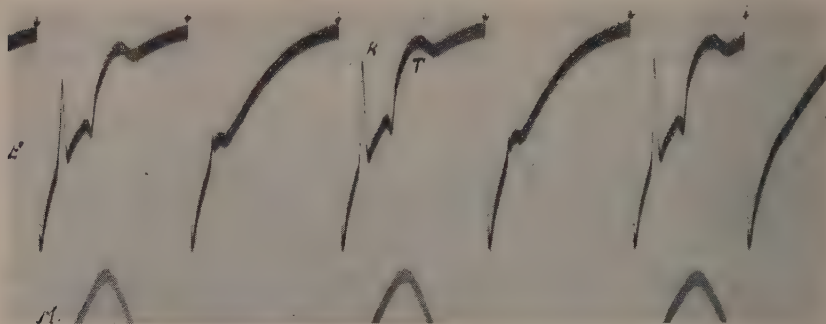


Fig. 3. - Potenziali elettrici del preparato ventricolare di rospo, distinti da due valori diversi, che si alternano nel decorso di una serie di battiti, dei quali solo quelli corrispondenti ai potenziali più elevati manifestandosi come potenziali propagati possono essere registrati graficamente.

I potenziali intercalati, che si presentano come reazioni abortite e non sono accompagnate da manifestazioni meccaniche di possibile rilievo, assumono le caratteristiche di risposte strettamente localizzate. (Le altre indicazioni come nella precedente figura). Un reperto di significato analogo a quello attribuito a detti potenziali intercalati si osserva anche nella fig. 2 ove il potenziale rapido *R-S* appare costantemente preceduto da un gruppetto di piccoli potenziali (indicati da un punto nel tracciato) che con il medesimo aspetto permangono in tutta la serie di oscillogrammi. Essi devono attribuirsi ad un gruppo di miofibrille che sotto l'azione del curaro rivelano caratteristiche funzionali differenti da quelle possedute dalla maggior parte delle altre miofibrille. Tale suddivisione si riferisce naturalmente all'amplificazione dei segnali impiegata.

eccitabilità in cui vengono a trovarsi gli innumerevoli fascetti di miofibrille ⁽⁵⁾ che entrano a costituire l'apparato contrattile del miocardio.

L'alternarsi di risposte elettriche di diverso valore per stimoli della stessa intensità (fig. 3), oppure la comparsa di prepotenziali (indicati da un punto

(4) Viene fatto di chiedersi se molte reazioni considerate come locali non siano che un ultimo stadio di risposte scarsissimamente propagate per concomitanti fenomeni di desincronizzazione da modificazioni del valore di soglia.

(5) Ci si riferisce alle vedute di I. Spadolini, secondo il quale le vere unità funzionali del miocardio, a carico delle quali si determinano fenomeni di sommazione e di dispersione, temporale e spaziale, sarebbero i fascetti di miofibrille che costituiscono l'apparato contrattile del cuore.

nel tracciato della fig. 2) sembra essere l'espressione di una distribuzione dei suddetti elementi contrattili in gruppi diversi, dei quali (nelle nostre condizioni sperimentali) uno almeno e più numeroso appare contrassegnato da una minore eccitabilità e da un periodo refrattario più lungo, un altro assai più scarso costituito da elementi contrattili a periodo refrattario più breve e forse anche maggiormente eccitabili.

Ad una certa frequenza di stimolazione, quando quest'ultimo è in grado di rispondere, non lo è ancora il primo, onde si giungono a registrare soltanto potenziali di limitato voltaggio. Allorchè il primo diventa eccitabile contemporaneamente al secondo, allora si registrano potenziali di voltaggio notevolmente maggiore (fig. 3).

Negli stati più avanzati l'azione del curaro è caratterizzata da una desincronizzazione molto accentuata che è l'espressione di una dispersione temporale notevole dell'eccitamento fra i numerosi gruppi di miofibrille che presentano caratteristiche assai differenti di velocità di conduzione, di refrattarietà, di eccitabilità, ecc. Anche il tracciato meccanico è in tali casi estremamente ridotto di ampiezza e in molti casi non si registra alcun movimento.

Da queste indagini risulta, pertanto, che nel sincizio miocardico possono porsi in evidenza unità funzionali che reagiscono diversamente quando sotto l'azione della procaina o del curaro il muscolo si trova in condizioni di ipoeccitabilità. Tale comportamento permette presumere che anche in condizioni normali reali differenze di eccitabilità sussistano fra i diversi fascetti di miofibrille, tanto da giustificare quella lievissima desincronizzazione che l'oscillografia pone ordinariamente in rilievo nella muscolatura cardio-ventricolare.

Resta così avvalorata l'ipotesi recentemente prospettata da I. Spadolini sul significato che spetta alle miofibrille nella genesi delle risposte graduate.

Rimane poi dimostrato che le risposte contrattili di tipo graduato quali occorrono nel miocardio come fenomeni additivi da frequenza, anche quando siano direttamente facilitate dall'intervento di fattori estranei (farmaci, ioni Ca^{++} , fatica, ecc.) si associano sempre ad un incremento dello stato di sincronizzazione se positive, di desincronizzazione se negative del meccanismo eccitatorio. Tali processi sarebbero alla loro volta legati alla formazione in eccesso o in difetto di ormoni locali.

Il processo di sincronizzazione, però, è soltanto uno dei fattori responsabili dell'andamento delle risposte contrattili graduate. Queste sono pure direttamente influenzate dalla liberazione di detti ormoni locali, che, in seguito alla concentrazione raggiunta per stimolazioni di adeguata frequenza, possono esaltare o deprimere le proprietà contrattili delle catene actomiosiniche.

Fisiologia. — *Modificazioni dell'ecg differenziale di Emys orbicularis sotto l'influenza dell'allungamento passivo del miocardio* (*). Nota di XENIA MACHNE e GIUSEPPE TONINI, presentata (**) dal Corrisp. G. C. PUPILLI.

Abbiamo indagato il comportamento del potenziale d'azione del muscolo cardiaco sottoposto allo stiramento.

Diversi Autori hanno esaminato gli effetti che la distensione del miocardio, ottenuta in condizioni sperimentali diverse dalle nostre, esercita sulla ampiezza e sulla durata del potenziale d'azione monofasico. Secondo Daly ⁽¹⁾ l'aumento della pressione intracavitaria riduce l'ampiezza ed eleva la durata della risposta elettrica del miocardio; Eismayer e Quincke ⁽²⁾ hanno confermato il primo dato, ma non hanno potuto notare alcuna variazione nella durata del potenziale d'azione; e anche secondo Hafkesbring e Ashman ⁽³⁾ l'aumento della pressione intracavitaria non altera la durata della risposta elettrica del muscolo cardiaco. Segers ⁽⁴⁾ ha osservato che l'ampiezza dell'onda d'azione monopolare del miocardio diminuisce per lo stiramento, soltanto quando la distensione è elevata.

Le presenti ricerche sono state eseguite sul ventricolo di *Emys orbicularis*. Lo stiramento del miocardio veniva effettuato col dispositivo già usato e secondo le norme seguite da Machne ⁽⁵⁾ per lo studio delle modificazioni di eccitabilità del miocardio durante l'allungamento passivo. Tutto il dispositivo era tenuto in vaschetta di vetro, contenente liquido di Ringer, in cui si faceva gorgogliare ossigeno. Il potenziale d'azione veniva registrato mediante un oscillografo elettromagnetico, a scrittura diretta. Per la derivazione si usava l'« elettrodo differenziale »: l'uso del modello originale descritto da Clement ⁽⁶⁾, da Garten e Sulze ⁽⁷⁾ e da Garten ⁽⁸⁾, non permette di conservare il tessuto nel liquido durante le registrazioni; perciò abbiamo utilizzato un elettrodo simile a quello descritto da van Harreveld ⁽⁹⁾.

Considerazioni teoriche e dati sperimentali, permettono di ritenere che tale metodo di derivazione sia il più adatto per lo studio dei fenomeni in esame. L'elettrodo differenziale è il solo che permette di escludere nel modo più assoluto la registrazione di potenziali di fibre anche lontane dall'elettrodo

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) I. DALY DE BURGH, « Proc. roy. Soc. B », 95, 279 (1923).

(2) G. EISMAYER u. H. QUINCKE, « Arch. exp. Path. Pharmacol. », 150, 308 (1930).

(3) R. HAFKESBRING a. R. ASHMAN, « Amer. J. Physiol. », 87, 305 (1928).

(4) M. SEGERS, « Arch. int. Physiol. », 52, 291 (1942).

(5) X. MACHNE, « Arch. Sci. Biol. », 34, 1 (1950).

(6) H. CLEMENT, « Z. Biol. », 58, 110 (1912).

(7) E. GARTEN u. O. SULZE, « Skand. Arch. Physiol. », 29, 44 (1913).

(8) E. GARTEN, « Z. Biol. », 66, 433 (1916).

(9) J. J. VAN HARREVELD, « Arch. neerl. Physiol. », 16, 277 (1931).

attivo: questa condizione era indispensabile per poter studiare il potenziale del sottile strato superficiale di fibre che presenta il ventricolo della Testuggine e a cui è possibile imporre un allungamento omogeneo. Per accertarci che la derivazione fosse veramente localizzata, abbiamo eseguito alcuni esperimenti preliminari, i quali ci hanno permesso di rilevare quanto segue. Allontanando i due poli di derivazione, il tracciato che prima aveva caratteristiche sue proprie, diviene simile al comune ecg totale; spostando l'elettrodo lungo l'asse longitudinale delle fibre, si registrano dai singoli punti tracciati perfettamente identici; facendo variare l'angolo formato dal segmento congiungente le estremità degli elettrodi e dall'asse longitudinale delle fibre, si ottengono grafici che presentano caratteristici sdoppiamenti dell'onda d'azione, verosimilmente da attribuirsi alla registrazione dell'attività asincrona di fibre diverse. Un altro vantaggio è costituito dal fatto che sono completamente determinate le relazioni che intercorrono fra ecg differenziale e ecg monofasico. La durata della prima onda d'azione differenziale corrisponde alla durata della fase ascendente del potenziale d'azione monofasico: tale relazione ha permesso di stabilire che l'ecg differenziale è l'unica curva, da cui si possono ottenere dati sicuri circa alla durata locale dell'eccitamento [cfr. Schaefer ^(10, 11)].

In ogni singola esperienza si procedeva come segue: il preparato veniva sottoposto ad allungamenti progressivi (in numero da 5 a 10) fino a quello massimo, procedendosi ogni volta alla registrazione dell'effetto in esame. La registrazione del potenziale d'azione era eseguita dopo aver ottenuto valori di ampiezza e di durata che si mantenevano costanti per tutto il tempo in cui rimaneva invariata la lunghezza del miocardio. In alcune prove, dopo un determinato allungamento si è fatto rilasciare completamente il muscolo e poi si è proceduto nuovamente alla misura.

L'allungamento passivo del miocardio nelle condizioni descritte, provoca i seguenti effetti: a) diminuzione di ampiezza della prima onda del potenziale d'azione; b) aumento di durata della prima onda del potenziale d'azione. Sono state calcolate le variazioni dei valori di ampiezza e di durata della prima onda dell'ecg differenziale, perchè soltanto quest'onda ci dà le principali caratteristiche dell'eccitamento del tessuto: il suo inizio coincide con l'inizio dell'eccitamento, la sua fine col valore massimo dell'eccitamento; inoltre la sua durata, come s'è visto, corrisponde a quella della fase ascendente del potenziale d'azione monofasico. Le variazioni di ampiezza del potenziale sono state calcolate per allungamenti fino al 50 %, quelle della durata sono state calcolate soltanto per allungamenti fino al 30 %, perchè allungamenti superiori provocano la comparsa di extrasistoli e di caratteristici sdoppiamenti della curva differenziale: il calcolo della durata del potenziale di azione importa perciò la conoscenza della forma della curva parziale, che non è possibile desumere dai dati ottenuti con le presenti ricerche.

(10) H. SCHAEFER, « Pflüger's Arch. », 245, 72 (1941).

(11) H. SCHAEFER, *Elektrophysiologie*. Wien, Deuticke (1942).

La variazione di ampiezza della prima onda della curva differenziale è espressa da valori massimali per lunghezze relative assunte dal miocardio fra 1,19 e 1,30; la variazione di durata è espressa da valori massimali per lunghezze relative pari a 1,21-1,34. Si osserva che le zone di efficacia massimali per le variazioni di ampiezza e per quelle di durata della prima onda del potenziale d'azione, pressappoco coincidono; in tale zona sono inoltre massime le variazioni della cronassia del miocardio [cfr. Machne ⁽⁵⁾].

Allorchè il muscolo è fatto rilasciare del tutto, i valori dell'ampiezza e della durata del potenziale d'azione tornano ad essere quelli iniziali, se il muscolo ha subito allungamenti inferiori al 25 %; le modificazioni sono parzialmente reversibili per allungamenti del 24-45 %; i fenomeni sono irreversibili per allungamenti superiori al 45 %. Questi dati non autorizzano a trarre conclusioni precise sulla reversibilità del fenomeno, perchè nelle nostre indagini non abbiamo tenuto conto della durata delle variazioni del potenziale d'azione apportate con gli stiramenti precedenti.

Le modificazioni dei parametri dell'eccitabilità del miocardio, che si osservano sotto l'influenza dell'allungamento passivo, hanno indotto uno di noi [Machne ⁽⁵⁾] a formulare l'ipotesi che nel miocardio si realizzi, con lo stiramento, quella condizione che nel nervo si verifica al catodo nel corso dell'elettrotono. I dati ottenuti in queste ricerche convalidano detta ipotesi. Infatti, alle analogie che già si è detto esistere tra il comportamento del miocardio allungato e quello del nervo per effetto del catelettrotono, possiamo aggiungere la seguente: nel nervo il catelettrotono provoca una diminuzione dell'ampiezza e un aumento della durata della fase ascendente del potenziale d'azione [Bishop e Erlanger ⁽¹²⁾]; nel miocardio lo stiramento è causa di una diminuzione dell'ampiezza e di un aumento della durata della prima onda della curva d'azione differenziale.

La diminuzione dell'ampiezza del potenziale d'azione del nervo, che si riscontra al catodo nel corso dell'elettrotono, sarebbe dovuta secondo Bishop e Erlanger ⁽¹²⁾ a una reale diminuzione dell'attività assonica; i risultati ottenuti in diverse condizioni sperimentali, hanno permesso di escludere che l'effetto sia riferibile a un'azione ineguale dell'elettrotono su fibre diverse e che le modificazioni dell'ampiezza siano quindi il risultato della combinazione dei singoli effetti. Del resto, Schoepfle e Erlanger ⁽¹³⁾ hanno recentemente dimostrato che anche l'ampiezza del potenziale d'azione di una singola fibra nervosa si abbassa per effetto del catelettrotono.

I dati di cui disponiamo, non permettono di esprimere un'opinione sicura sul significato che può avere la diminuzione di ampiezza del potenziale d'azione del miocardio durante l'allungamento passivo. Poichè le condizioni sperimentali ci garantivano uno stiramento uniforme, e di conseguenza una depolarizzazione uniforme delle fibre da cui veniva fatta la registrazione, è

(12) G. H. BISHOP a. J. E. ERLANGER, « Amer. J. Physiol. », 78, 630 (1926).

(13) G. M. SCHOEPFLE a. J. E. ERLANGER, « Amer. J. Physiol. », 155, 468 (1948).

verosimile che la diminuzione di ampiezza del potenziale da noi riscontrata dipenda da una reale diminuzione dell'attività delle fibre miocardiche.

Per quello che concerne la velocità di propagazione dell'eccitamento nel nervo, Lillie⁽¹⁴⁾ ha dimostrato che sussiste una correlazione tra la velocità con cui il potenziale sale al suo massimo valore e la velocità di propagazione dell'eccitamento: esse sono inversamente proporzionali. Werz⁽¹⁵⁾ ha provato che anche tra la durata della fase ascendente dell'ecg monofasico e la velocità di propagazione dell'eccitamento del miocardio intercorre una relazione di proporzionalità inversa. Durante l'allungamento passivo del miocardio, la durata della prima onda dell'ecg differenziale aumenta: possiamo quindi dedurre che nel miocardio sottoposto a stiramento, la velocità di propagazione dell'eccitamento sia diminuita.

Biologia. — *Caratteri secretori e nervosi delle cellule del nucleo magnocellulare preottico nei Teleostei*^(*). Nota di VALDO MAZZI, presentata^(**) dal Socio N. BECCARI.

Le cellule dei nuclei vegetativi dei Vertebrati sono del tutto peculiari, in quanto sembrano svolgere contemporaneamente funzioni ghiandolari e nervose.

La natura ghiandolare di queste cellule appare al giorno d'oggi sufficientemente dimostrata. Dalle prime, e ormai lontane, ricerche di Scharrer nei Pesci, i reperti si sono moltiplicati in quasi tutte le classi di Vertebrati⁽¹⁾. In particolare le nuove e più approfondite ricerche della scuola di Bargmann hanno portato, ricorrendo a tecniche particolarmente idonee, a sostanziali chiarimenti dei fenomeni da un punto di vista morfologico, e ad una interpretazione funzionale soddisfacente, anche se forse non definitiva. Sembrerebbe che il secreto, avente le caratteristiche istochimiche di una lipoproteina (Schiebler⁽²⁾), elaborato nelle cellule alle spese della sostanza di Nissl, venga riversato in parte nella cavità del III ventricolo, in parte convogliato lungo ed entro gli assoni, in prevalenza verso il lobo posteriore dell'ipofisi (Bargmann, Hild, Ortmann e Schiebler⁽³⁾) ma anche verso altre regioni (parafisi nei Rettili, Scharrer⁽⁴⁾). L'ipotesi di un rapporto funzionale fra neuroipofisi e nuclei dell'area preottica, già avanzata

(14) R. S. LILLIE, « Amer. J. Physiol. », **41**, 126 (1916).

(15) A. WERZ, « Schmiedeberg's Arch. », **70**, 169 (1932).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 9 febbraio 1951.

(1) Per la bibliografia fino al 1945, cfr.: E. e B. SCHARRER, « Physiol. Rev. », **25**, 171 (1945).

(2) « Acta Anat. », **13**, 233, 1951.

(3) « Acta Neurovegetativa », **1**, 233, 1950.

(4) « Biol. Bull. », **101**, 106, 1951.

dai coniugi Scharrer ⁽⁵⁾, è stata posta su basi più concrete dalle ricerche sperimentali di Ortmann ⁽⁶⁾, e Hild ⁽⁷⁾; in base alle quali è stata proposta l'ipotesi che il neurosecreto sia la sostanza veicolo degli ormoni postipofisari. Tali ormoni non sarebbero quindi elaborati nella neuroipofisi, bensì nelle cellule dei nuclei vegetativi ipotalamici, e secondariamente immagazzinati nel lobo nervoso dell'ipofisi (Bargmann e Scharrer ⁽⁸⁾), dal quale

verrebbero mobilizzati dall'attivo intervento dei pituitici ^(6,7). Nuove ricerche di Hild e Zetler ⁽⁹⁾, dalle quali risulta che gli estratti dei nuclei sopra-ottico e paraventricolare del cane manifestano attività antidiuretica, oitocica e pressoria, sembrerebbero appoggiare questa ipotesi.

Ricerche compiute in alcuni Teleostei (*Anguilla*, *Crenilabrus pavo*, *Cristiceps argentatus*) con il metodo di Gomori (impiegato e raccomandato da Bargmann e dai suoi allievi), hanno fornito dei reperti in tutto paragonabili a quelli riportati da Hild ⁽¹⁰⁾ nella tinca. Tali reperti riceveranno una adeguata descrizione in altra sede. Vanno sottolineati i dati positivi raccolti nell'*Anguilla* (cfr. fig. 1 e 2), nella quale non ero riuscito a mettere in evidenza per il passato il neurosecreto nell'interno dei pirenofori ⁽¹¹⁾.

La concordanza dei reperti sembra quindi autorizzare senz'altro l'attribuzione di caratteristiche secretorie alle cellule del nucleo magnocellulare preottico dei Pesci e a quelle dei suoi omologhi nelle classi più elevate di Vertebrati. In queste stesse cellule sono inoltre agevolmente dimostrabili alcune delle caratteristiche proprie delle cellule nervose. In particolare: prolungamenti che contraggono connessioni precise con strutture nervose e non nervose (lobo posteriore dell'ipofisi, in tutti i Vertebrati,



Fig. 1. - Nucleo magnocellulare pre-ottico di *Anguilla anguilla*; veduta di insieme. Metodo: cromoematossilina-floxina sec. Gomori. $\times 90$.

(5) « Biol. Bull. », 87, 242 (1944).

(6) « Zeitschr. f. Zellforsch. », 36, 92 (1951).

(7) « Virchows Arch. », 319, 526 (1951).

(8) « Amer. Scientist », 39, 255 (1951).

(9) « Experientia », 7, 189 (1951).

(10) « Z. Zellforsch. », 35, 33 (1950).

(11) « Arch. Ital. Anat. Embriol. », 46, 1 (1941).

anche sacco vascoloso nei Pesci); sostanza di Nissl, in genere addensata alla periferia del pirenoforo.

L'altro attributo caratteristico ed esclusivo delle cellule nervose, l'apparato neurofibrillare, è stato riconosciuto assai di rado in queste stesse cellule. Per quanto mi consta, l'unico reperto positivo è quello di Trossarelli⁽¹²⁾, che individuò l'apparato neurofibrillare nelle cellule dei nuclei tuberiani dell'uomo (ivi compresi i nuclei magnocellulari dell'area preottica), ricorrendo all'impiego dei metodi III e IV di Donaggio.

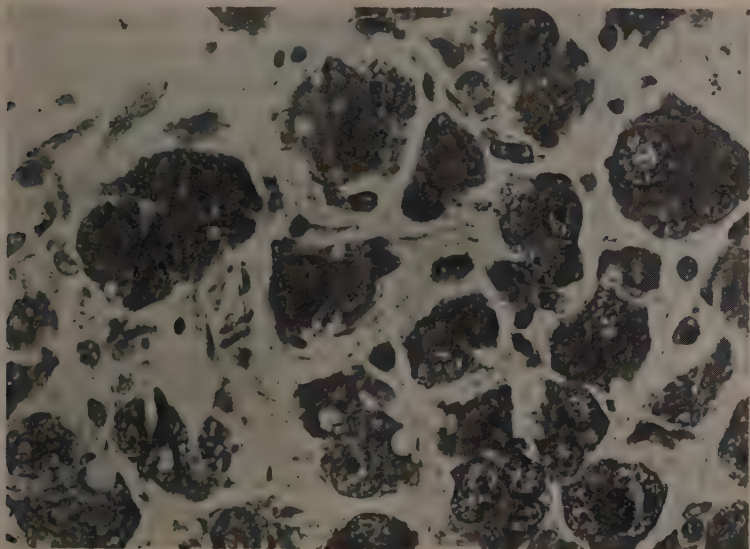


Fig. 2. — Particolare a maggiore ingrandimento da una sezione contigua a quella della figura 1. Si notano alcune cellule della parte dorsale del nucleo magnocellulare preottico in stadi diversi di attività secretoria. In alto a sinistra tratti di neuriti carichi di neurosecreto. $\times 550$.

Nei Pesci in particolare, tanto Scharrer nella tinca e nel luccio, con il metodo Bielschowsky, tanto lo scrivente nell'anguilla con i metodi di Cajal all'argento ridotto, ottennero soltanto dei risultati negativi.

Dopo nuovi e ripetuti tentativi, sono riuscito ad ottenere una buona, anche se non molto intensa, impregnazione dell'apparato neurofibrillare delle cellule del nucleo magnocellulare preottico dell'anguilla. I quadri migliori li ho osservati nelle grosse cellule che compongono il « large celled group » (= nucleo preottico ventrale). Il metodo impiegato è il II di Cajal (fissazione in alcool e idrato di cloraleio; 6 giorni di nitrato di Ag; 36 ore nel riduttore).

(12) « Bull. Histol. Appl. », **IX**, 145 (1934).

Secondo le mie osservazioni l'apparato neurofibrillare consta di neurofibrille disposte parallelamente fra loro nei prolungamenti e nella loro radice; disposte a formare un reticolo, a maglie più strette in prossimità del nucleo, nell'interno del pirenoforo (cfr. fig. 3).

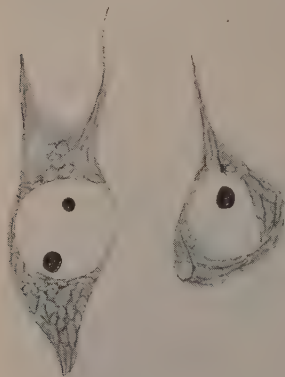


Fig. 3. - Cellule del nucleo preottico ventrale, nelle quali appare impregnato l'apparato neurofibrillare.

Metodo: Cajal II. $\times 940$ circa.

Questo reperto non mi sembra privo di valore, in quanto viene a dare una convincente dimostrazione della natura nervosa di cellule, quali quelle del nucleo magnocellulare preottico dell'anguilla, nelle quali contemporaneamente sono in giuoco attivi processi neurosecretori. Tali processi, secondo un'ipotesi da me avanzata⁽¹³⁾, e che anche Collin⁽¹⁴⁾ recentemente ricorda, potrebbero essere considerati come esaltazione dei normali processi di sintesi proteica, normalmente in atto nelle cellule nervose. D'altra parte il trasporto del neurosecreto entro gli assoni che pervengono alla neuroipofisi, al quale ho in precedenza accennato, può essere inquadrato in quei fenomeni di accrescimento e convenzione centrifuga, determinata da

una pressione dinamica esercitata dal pirenoforo, che Weiss e collaboratori⁽¹⁵⁾ hanno dimostrato avere luogo nelle fibre nervose non soltanto nel periodo durante il quale le fibre stesse si accrescono e ingrossano attivamente, ma anche dopo il conseguimento della maturità.

Biologia (Biochimica). — *Modificazioni nelle proteine contrattili muscolari del coniglio in corso di avitaminosi E.* - IV. *Azione dell'ATP sulle quantità estratte e sulle proprietà ottiche delle soluzioni proteiche*^(*). Nota di E. BONETTI, P. MERUCCI, A. ASCENZI e M. ALOISI, presentata^(**) dal Socio G. VERNONI.

Nella distrofia muscolare da avitaminosi E le proteine contrattili estraibili dai muscoli, miosina, actomiosina, e actina subiscono modificazioni quantitative e qualitative. Negli ultimi stadi della distrofia, la miosina non è più estraibile, l'actomiosina si riduce fortemente, mentre l'actina non presenta

(13) « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, 4, 214 (1948).

(14) « C. R. Ass. Anat. », XXXVIII^e Reun., n. 64, 57 (1951).

(15) Per una bibliografia completa, cfr. P. WEISS, *Differential growth* in « The chemistry and physiology of growth », Princeton Univ. Press (1949).

(*) Dal Centro di Studio per la Fisiopatologia del C. N. R. presso l'Istituto di Patologia Generale, Università di Roma, e dall'Istituto di Anatomia Patologica, Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

variazioni quantitative apprezzabili ⁽¹⁾. Modificazioni qualitative, ricercate con lo studio della birifrangenza di flusso e controllate anche al microscopio elettronico, sono riscontrabili in special modo a carico dell'actina ⁽²⁾: negli stadi più avanzati del processo distrofico, questa proteina non diventa più attivabile dai comuni sali, cioè non è più polimerizzabile dalla forma globulare alla forma filamentosa. Questo fatto è sempre constatabile nella fase del processo distrofico in cui la miosina risulta assente negli estratti. Negli stadi meno avanzati della distrofia, quando cioè la miosina è ancora presente, anche se scarsa, l'actina risulta solo in parte attivabile (polimerizzabile), nel senso che si apprezzano al microscopio elettronico solo pochi filamenti di actina nel campo occupato da questa proteina in forma globulare.

L'osservazione al microscopio polarizzatore ⁽³⁾ delle fibre muscolari di conigli in avitaminosi E dimostra una perdita delle sostanze a birifrangenza positiva, che appaiono essere quelle che si perdono nelle fibre normali trattate con i solventi dell'actomiosina. Questa ulteriore constatazione induce a considerare il reperto della diminuita estraibilità dell'actomiosina, e dell'assenza o riduzione della miosina come dovuta a una vera e propria perdita di queste sostanze contrattili da parte del muscolo distrofico piuttosto che ad una impedita estraibilità di esse, quale si verifica nel così detto effetto Deuticke nei muscoli affaticati, o nell'effetto Erdös nel *rigor mortis* ⁽⁴⁾.

Va tuttavia tenuto presente il fatto che la diminuzione del potere di sintesi dell'ATP riscontrabile nei muscoli distrofici ⁽⁵⁾ anche se non rilevante, e da considerarsi secondaria al processo distrofico, piuttosto che condizione primitiva di questo, potrebbe anch'essa negli ultimi stadi causare una reale diminuzione nel contenuto di ATP capace di spiegare le modificazioni quantitative e qualitative già ricordate a carico delle proteine.

Secondo vari autori alla scomparsa dell'ATP, difatti, si accompagna una diminuita solubilità della miosina e la presenza di ATP costituirebbe un fattore di fondamentale importanza per l'estrazione della miosina (Erdös, loc. cit.). Quest'autore avrebbe ulteriormente dimostrato che l'aggiunta di ATP al liquido di estrazione fa accrescere la quantità di miosina che entra in soluzione ⁽⁶⁾. Altri autori, anche se in altre condizioni sperimentali come la contrattura da congelazione ⁽⁷⁾ o da monobromoacetato ⁽⁸⁾, escludono l'ATP come fattore primo nell'estrazione della miosina.

D'altro canto, secondo Straub e Feuer ⁽⁹⁾ l'ATP costituirebbe il gruppo prostetico dell'actina, e la presenza di ATP legato all'actina sarebbe condi-

(1) E. BONETTI, M. ALOISI e P. MERUCCI, « *Experientia* », 8, 69 (1952).

(2) M. ALOISI, A. ASCENZI e E. BONETTI (in preparazione).

(3) M. ALOISI, A. ASCENZI e E. BONETTI, « *J. Path. & Bact.* » (in corso di stampa).

(4) T. ERDÖS, « *Studies Inst. Med. Chem. Univ. Szeged* », 3, 51 (1943).

(5) E. BONETTI e N. FRONTALI TOSCHI, « *Atti Soc. It. di Pat.* », 2, II, 843 (1951).

(6) T. ERDÖS, citato da F. B. STRAUB, « *Ann. Rev. Biochem.* », 19, 371 (1950).

(7) P. CREPAX et A. HERION, « *Biochim. et Biophys. Acta* », 6, 54 (1950).

(8) P. CREPAX, « *Biochim. et Biophys. Acta* », 7, 87 (1951).

(9) F. B. STRAUB and G. FEUER, « *Biochim. et Biophys. Acta* », 4, 455 (1950).

zione essenziale perchè l'actina possa polimerizzarsi (attivarsi) sotto l'azione dei vari cationi e anioni. Durante il processo di polimerizzazione l'ATP dell'actina verrebbe a trasformarsi in ADP (senza intervento di un'azione enzimatica) con liberazione di P inorganico. Nella depolimerizzazione (che sperimentalmente si ottiene per dialisi della actina filamentosa contro debole soluzione di ATP (0,004 %), l'ADP dell'actina polimerizzata si trasformerebbe di nuovo in ATP, il quale ad una successiva polimerizzazione andrebbe di nuovo incontro alla trasformazione ricordata, in ADP+P.

La presente ricerca è stata rivolta a stabilire una eventuale azione dell'ATP sia sulla estraibilità delle proteine actomiosina e miosina ottenute dai muscoli di conigli distrofici, sia sulle proprietà ottiche dell'actina.

TECNICA. - I conigli venivano tenuti alla dieta di Houchin e Mattill⁽¹⁰⁾, lievemente modificata sostituendo il 20 % di cellophane di questa dieta con il 10 % di carta da filtro, il 9 % di farina e l'1 % di strutto. Gli animali venivano sacrificati tanto nei periodi terminali quanto in periodi intermedi del processo distrofico.

La actomiosina e la miosina venivano estratte secondo il metodo di Szent-Györgyi⁽¹¹⁾; l'actina secondo il metodo di Feuer e coll.⁽¹²⁾.

L'ATP era preparato dal muscolo di coniglio secondo il metodo di Dounce e collaboratori⁽¹³⁾. Al momento dell'uso si preparava il sale potassico. L'ATP usato in ogni esperimento figura nelle tabelle come acido. L'ATP veniva aggiunto al macinato muscolare al momento di procedere all'estrazione nella soluzione tampone 0,18 M di K-fosfati a pH 6,4 e 0,36 M KCl, oppure dopo questa estrazione nella fase di precipitazione dell'actomiosina.

L'actomiosina ottenuta veniva disciolta in 0,6 M KCl, riprecipitata e ridisciolta; la miosina dopo la precipitazione veniva lavata con 0,02 M KCl e disciolta in 0,1 M KCl. Da queste soluzioni si prelevavano campioni per la determinazione dell'N per Kjeldahl.

Le proprietà ottiche dell'actina venivano investigate per mezzo dello studio della birifrangenza di flusso, usando l'apparecchiatura in precedenza descritta⁽²⁾.

RISULTATI E COMMENTO.

1. *Azione dell'ATP sulle quantità di actomiosina e miosina estratte.* - La tabella I mostra le variazioni quantitative dell'actomiosina e miosina in seguito all'aggiunta o meno di ATP. Le quantità di actomiosina estratta da muscoli di animali in distrofia conclamata permangono ridotte rispetto

(10) O. B. HOUCHIN and H. A. MATTILL, « J. Biol. Chem. », 146, 301 (1942).

(11) SZENT-GYÖRGYI A., *Studies on muscles*, « Acta Physiol. Scand. », 9, Suppl. XXV (1945).

(12) G. FEUER, F. MOLNÁR, E. PETTKÓ and F. B. STRAUB, « Hung Acta Physiol. », 1, 150 (1948).

(13) A. L. DOUNCE, A. ROTHSTEIN, THANNAUSER-BEYER G., R. MEIER and R. M. FREER, « J. Biol. Chem. », 174, 361 (1948).

a quelle estratte da muscoli in condizioni di distrofia meno avanzata. La miosina permane sempre assente sia con aggiunta che in assenza di ATP.

TABELLA I.

Quantità di actomiosina e di miosina estratte da muscoli di conigli in vario grado di distrofia da avitaminosi E, con o senza aggiunta di ATP. Quantità espresse in mg di N per 100 g di muscolo fresco.

Conigli in distrofia conclamata	Quantità di muscolo usata per ogni singola estrazione	Tempo di estrazione in 0,36 M KCl, a pH 6,4	Aggiunta di ATP			Non ATP	
			ATP mg	Actomio- sina mg N	Miosina mg N	Actomio- sina mg N	Miosina mg N
28	25	10'	200	31	assente	29,1	assente
34	45	10'	100	70,3	assente	32,5	assente
33	45	10'	100	15,1	assente	16,2	assente
Conigli in distrofia incompleta							
38	40	20'	100	123,8	39,4	86	103,5
36	55	10'	100	167,2	77,3	112,5	128,1
41 e 45	60	20'	200	160	106	67,4	161,5
40 (*)	77	20'	140	280	90,4	118,5	154,5

(*) L'ATP è stato aggiunto dopo la estrazione del muscolo al momento della precipitazione della actomiosina.

Questi risultati dimostrano che l'ATP, almeno nel caso della distrofia muscolare avanzata da avitaminosi E, non ha influenza alcuna sulla estraibilità dell'actomiosina e miosina e che in queste condizioni del muscolo si mantiene inalterato il quadro già descritto della diminuzione dell'actomiosina e dell'assenza della miosina.

Nei conigli in distrofia meno avanzata l'aggiunta di ATP induce all'opposto un aumento delle quantità di actomiosina ed una diminuzione della miosina in confronto ai valori che si hanno nelle prove eseguite in parallelo senza aggiunta di ATP.

Questo effetto viene agevolmente spiegato tenendo presenti le seguenti considerazioni. Secondo Szent Györgyi^{(11), (14)} la presenza di un'adeguata

(14) SZENT-GYÖRGYI A., *Chemistry of muscular contraction*, « Academic Press », New York, 1950.

concentrazione di ATP è condizione perchè nel muscolo a riposo actina e miosina rimangano dissociate e possano pertanto essere estratte in questo stato di dissociazione. Stando così le cose è evidente che operando con liquidi di estrazione poco o affatto idonei ad estrarre le due proteine già associate (cioè in forma di actomiosina) la presenza di ATP in adeguata concentrazione nel muscolo al momento dell'estrazione diviene una condizione per la estraibilità della miosina e della actina separatamente. E infatti Szent-Györgyi avverte più volte che un buon rendimento nella estrazione della miosina è legato allo stato preesistente nel muscolo, alla rapidità con cui si esegue la prima estrazione e alle condizioni di temperatura nelle quali si opera (11, p. 82).

Nel nostro caso non solo tutte queste condizioni erano rispettate, ma nel sospetto che il muscolo distrofico per il processo patologico stesso avesse perduto il normale quantitativo di ATP, si è aggiunta questa sostanza alla poltiglia muscolare prima della estrazione senza tuttavia ottenere la ricomparsa della miosina nell'estratto in quei casi (di distrofia conclamata) in cui essa vi mancava completamente.

Nei casi non molto avanzati in cui ancora una certa quantità di miosina si poteva estrarre dal muscolo distrofico, si ottenne con questo procedimento un risultato inverso e cioè riduzione di miosina dopo aggiunta di ATP ed aumento dell'actomiosina. Tale risultato si ottenne anche aggiungendo ATP non già al momento della estrazione ma *dopo*, cioè nella soluzione proteica già estratta. Evidentemente in questo caso l'azione dell'ATP è da localizzare sul sistema proteico estratto come condizione della precipitabilità a quella determinata forza ionica della actina e della miosina in forma di actomiosina.

Infatti sappiamo che dal liquido di estrazione, portato alla forza ionica di 0,11 e mantenuto per un certo tempo a 20-22°C si separa un precipitato fioccoso di actomiosina in modo abbastanza critico e ad un momento corrispondente, secondo Szent-Györgyi, alla scissione dell'ATP. È legittimo supporre che la quantità di actomiosina che si forma in questo modo sia funzione della massa di ATP che si scinde in quel momento e che pertanto, entro certi limiti, l'aggiunta di ATP prima della precipitazione provochi una maggiore separazione di actina e miosina dall'estratto in forma di actomiosina, diminuendo corrispettivamente la miosina e l'actina che rimangono libere nel supernatante. Ciò si può verificare fino a che esiste actina disponibile. Normalmente, durante l'estrazione della miosina allo stadio in cui dall'estratto precipita l'actomiosina, siamo in presenza di un sistema così costituito: actomiosina flocculata (ed eventualmente anche superprecipitata), miosina libera, actina libera (in piccola quantità). Un ulteriore scissione di ATP provoca un ulteriore spostamento del sistema in favore della actomiosina.

Si può affermare quindi che: 1) nel muscolo distrofico la concentrazione di ATP non si modifica al punto da influenzare in qualche modo l'estrazione della miosina alla forza ionica di 0,66. 2) L'ipotesi di una reale diminuzione della miosina nel muscolo distrofico appare conseguentemente confortata da questi esperimenti. 3) L'ATP influisce nei rapporti quantitativi della actomiosina e della miosina, ottenibili da un muscolo nelle condizioni su espo-

ste, ma non in quanto condiziona quantitativamente, al momento della sua scissione, le frazioni di actina e miosina che si associano e precipitano.

2. *Azione dell'ATP sulle proprietà ottiche dell'actina.* — La tabella II che si riferisce allo studio delle proprietà ottiche dell'actina dimostra come l'aggiunta di ATP al macinato muscolare nelle condizioni riportate nella tabella I non modifica nella distrofia conclamata la incapacità dell'actina ad attivarsi in presenza di vari sali. L'attivazione dell'actina è invece in rapporto con le condizioni del muscolo, nel senso che come è già stato da noi riferito in moltissimi casi di distrofia muscolare ⁽²⁾ la polimerizzazione dell'actina dalla forma G (globulare) alla forma F (filamentosa) è in genere conservata solo quando la miosina è ancora estraibile e presente. Pertanto anche la aggiunta di ATP alla soluzione di actina prima dell'aggiunta dei sali per l'attivazione (coniglio 29) non riesce a modificare il comportamento dell'actina estratta da animali con distrofia conclamata.

TABELLA II.

Birifrangenza di flusso di soluzioni di actina estratte da muscoli di conigli distrofici con o senza aggiunta di ATP. Angolo di birifrangenza delle soluzioni di actina in soluzioni acquose o in soluzioni saline 0,1 M.

Conigli in distrofia conclamata	Estrazione con aggiunta di ATP					Estrazione senza aggiunta di ATP				
	Miosina	Actina in sol. acquosa	Actina in sol. 0,1 M di			Miosina	Actina in sol. acquosa	Actina in sol. 0,1 M di		
			NaCl	KCl	LiCl			NaCl	KCl	LiCl
28	assente	—			—	assente				
34	assente	—		—		assente	—	—	—	—
33	assente	—		—		assente	—		—	—
Conigli in distrofia incompleta										
36	presente	—			86°	presente	—			85°
41 e 45	presente	—			86°	presente				85°
40						presente	—		86°	
29(*)	assente	—			—	Il segno — indica la mancanza di attivazione dell'actina.				

(*) L'ATP, in ragione di mg 0,45/ml di sol. di actina, è stato aggiunto all'actina estratta prima dell'attivazione con i sali. Coniglio in distrofia conclamata.

Si può quindi pensare che nel processo distrofico l'actina vada incontro a modificazioni tali che alterano le sue proprietà e che non sono riportabili a una perdita di ATP, come sarebbe stato da aspettarci secondo l'ipotesi di Straub e Feuer ⁽⁹⁾ per cui l'azione dell'ATP sarebbe di decisiva importanza nella polimerizzazione dell'actina.

CONCLUSIONI E RIASSUNTO. - 1° La concentrazione dell'ATP nel muscolo anche in distrofia conclamata non si modifica al punto di influenzare la estraibilità della miosina alla forza ionica di 0,66.

2° La riduzione o assenza di miosina e la ridotta quantità di actomiosina che si riscontrano nei muscoli in distrofia conclamata non sono dovute ad una diminuzione dell'ATP, ma ad una reale diminuzione di queste sostanze nel muscolo distrofico.

3° L'incapacità dell'actina ad attivarsi con i sali non è riportabile ad una insufficiente quantità di ATP, ma a modificazioni di altro tipo indotte su questa proteina dal processo distrofico.

4° L'influenza dell'ATP sui rapporti quantitativi dell'actomiosina e della miosina negli estratti di muscoli a gradi intermedi di distrofia è attribuibile all'azione dell'ATP al momento della sua scissione sulle frazioni di actina e miosina presenti nell'estratto che si associano e precipitano come actomiosina.

Ci è grato ringraziare le ditte Farmitalia, Bracco (Italmerck) e Roche per il rifornimento di vitamine per la condotta di queste ricerche.

Biologia (Biochimica). — *Sulla presenza di acido citrico nelle calcificazioni patologiche* ^(*). Nota di PAOLO BUFFA, presentata ^(**) dal Socio G. VERNONI.

Dopo la importante scoperta di Dickens ^(1,2) che il tessuto osseo contiene quantità di acido citrico molto superiori a quelle che si riscontrano negli altri tessuti, questo composto, oltre che nelle ossa di numerose specie (Thunberg ^(3,4), Class e Smith ⁽⁵⁾, Nicolaysen e Nordbø ⁽⁶⁾), è stato trovato

(*) Dal Centro di Studio per la Fisiopatologia del C. N. R. presso l'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) F. DICKENS, « Chem. and Ind. », 59, 135 (1940).

(2) F. DICKENS, « Biochem. J. », 35, 1011 (1941).

(3) T. THUNBERG, « K. Fysiograf. Sällsk. Lund », II, 42 e 126 (1941), (citato in (4) e in (2)).

(4) T. THUNBERG, « Acta physiol. scand. », 15, 38 (1948).

(5) R. N. CLASS e A. H. SMITH, « J. biol. Chem. », 151, 363 (1943).

(6) R. NICOLAYSEN e R. NORDBØ, « Acta physiol. scand. », 5, 212 (1943).

anche in varie altre strutture biologiche calcificate di vertebrati e invertebrati. Infatti è stata dimostrata la presenza di acido citrico nei denti (Thunberg⁽³⁾), nel guscio di uova di uccelli (Thunberg^(3,7), Dickens⁽²⁾), nella conchiglia interna della seppia (Thunberg⁽⁸⁾) e del calamaro (Buffa e Peters⁽⁹⁾), nei gastroliti del gambero (Thunberg⁽⁸⁾), nel guscio del granchio (Buffa e Peters⁽⁹⁾). Tuttavia non ci risulta che l'acido citrico sia mai stato ricercato, nelle calcificazioni patologiche, sebbene sia stato ripetutamente dimostrato che esse hanno una composizione in calcio e fosforo molto simile a quella dei vari tipi di tessuto osseo.

In questa Nota si comunicano i risultati dell'analisi di un gruppo di calcificazioni patologiche umane di diversa natura e origine: anche tali formazioni patologiche calcificate, come tutte quelle normali finora studiate, contengono acido citrico in concentrazioni spesso notevoli.

MATERIALE E TECNICA. — Il materiale è stato gentilmente fornito dall'Istituto di Anatomia Patologica dell'Università di Roma; esso proveniva da individui deceduti da uno a due giorni. I pezzi calcificati appena prelevati venivano liberati meccanicamente, per quanto possibile, dai tessuti molli, e quindi subito pesati e macinati accuratamente in mortaio con sabbia e acido tricloroacetico all'8 %. L'estratto tricloroacetico veniva filtrato per carta ed il residuo lavato più volte con altro acido. L'acido citrico veniva determinato con il metodo di Pucher, Sherman e Vickery⁽¹⁰⁾ con le modificazioni apportate da Buffa e Peters⁽¹¹⁾ e gli adattamenti che ora descriviamo. L'estratto tricloroacetico veniva bollito con 0,15 ml di acido solforico (d. 1,84) per ml di estratto finale. Dopo raffreddamento si filtrava per carta per rimuovere il solfato di calcio formatosi e si portava al volume finale con acido tricloroacetico 8 % lavando il precipitato. La soluzione completamente decolorata non veniva riportata al color rosa con il permanganato, ma era direttamente sottoposta all'estrazione con etere di petrolio. Si usavano 4 ml di solfuro di sodio al 4 %. La lettura veniva fatta allo spettrofotometro di Beckman a 440 m μ . Due campioni contenenti ciascuno 100 μ g di acido citrico venivano titolati per confronto ad ogni determinazione. I risultati sono espressi in μ g di acido citrico anidro per g di tessuto calcificato umido; ciascun risultato è la media di due determinazioni di norma concordanti, alla lettura fotometrica, per meno di 0,01.

Generalmente la determinazione veniva eseguita lo stesso giorno della preparazione dell'estratto tricloroacetico; in alcuni casi però si è atteso anche diversi giorni poichè si è sperimentato che il titolo dell'acido citrico in soluzione tricloroacetica all'8 % rimane inalterato per diversi mesi a temperatura ambiente (la soluzione di acido citrico di riferimento viene conservata in queste condizioni). In tali casi, per maggior precauzione, l'estratto tricloroacetico veniva conservato a 1°C fino al momento del trattamento con acido solforico e la titolazione.

RISULTATI. — I risultati elencati nella tabella I sono stati ottenuti da una serie casuale di calcificazioni patologiche.

(7) T. THUNBERG, «Acta physiol. scand.», 17, 83 (1949).

(8) T. THUNBERG, «Acta physiol. scand.» 18, 157 (1949).

(9) P. BUFFA e R. A. PETERS, esperimenti non pubblicati (1949).

(10) G. W. PUCHER, C. C. SHERMAN e H. B. VICKERY, «J. biol. Chem.», 113, 235 (1936).

(11) P. BUFFA e R. A. PETERS, «J. Physiol.», 110, 488 (1949).

TABELLA I.

Sesso	Età anni	SEDE	Acido citrico µg/g di tessuto umido
CUORE.			
M	22	Valvola mitrale calcificata	1800
F	72	» » »	1890
M	28	» » normale	15
F	52	» » »	17
AORTA.			
F	67	Placca calcifica della porzione addominale	4960
M	66	» » dell'arco	4660
F	75	» » della porzione addominale	4480
F	79	» » » » »	8360
F	68	» » » » »	8320
M	59	» » » » »	7450
F	60	» » » » »	8100
M	62	» » » » »	6610
F	87	» » » » »	10530
M	87	» » » » »	5960
F	20	Frammento normale della porzione addominale	27
M	73	» » » » dell'arco	72
		» » » » addominale	37
M	30	» » » » toracica	33
		» » » » addominale	26
M	28	» » » » »	19
LINFoghiandoLE.			
F	47	Linfoghiandola calcificata dell'ilo polmonare . . .	1575
F	44	» » » » »	2240
F	52	» » » » epatico	1530
		» non calcificata dell'ilo epatico . . .	tracce
UTERO.			
F	77	Fibroma, frammento calcificato	3140
		» » non calcificato	50
APPENDICE EPIploICA.			
F	77	Frammento calcificato	2410
CISTI DA ECHINOCOCCO IN FEGATO CIRROTICO.			
M	53	Frammento calcificato della parete cistica	5750
TIROIde.			
F	59	Gozzo cistico, frammento calcificato	3080
		» » » non calcificato	1290

CUORE: in ambedue i casi si trattava di lesioni endocarditiche; per controllo sono stati presi pezzi corrispondenti dal cuore apparentemente normale di due individui di età comparabile. *Aorta:* erano tutti casi di arteriosclerosi; i controlli provengono da aorte completamente normali ed i frammenti comprendono tutti gli strati dell'arteria. *Linfoghiandole:* le due dell'ilo polmonare erano state sede di processi tubercolari, mentre per quella dell'ilo epatico il reperto era dubbio. *Tiroide:* si trattava di un gozzo cistico con focolai multipli di calcificazione asportato chirurgicamente.

Specificità del metodo usato per la determinazione dell'acido citrico. —

Le ricerche di Cahours⁽¹²⁾, Stahre⁽¹³⁾, Pucher, Sherman e Vickery⁽¹⁰⁾ e di Krebs e Eggleston⁽¹⁴⁾ hanno dimostrato che la reazione del pentabromoacetone, specialmente dopo il trattamento del filtrato aproteico con acido solforico a caldo, è altamente specifica per l'acido citrico. Secondo Breusch e Tulus⁽¹⁵⁾ invece la reazione del pentabromoacetone non è specifica per l'acido citrico se non dopo ebollizione dell'estratto con alcali. Per controllo un filtrato tricloroacetico, precedentemente bollito con acido solforico e neutralizzato, è stato bollito nuovamente con alcali, ma il risultato non è cambiato. Pertanto non si è tenuto ulteriormente conto della obiezione di questi autori e si sono bolliti gli estratti soltanto con acido solforico. Conviene infine ricordare che Dickens⁽²⁾ ha isolato dal tessuto osseo l'acido citrico dopo averlo scoperto con la reazione del pentabromoacetone e più recentemente Buffa, Peters e Wakelin⁽¹⁶⁾ l'hanno isolato da preparazioni di tessuto renale trattate con fluoroacetato. Per tutte queste ragioni, in attesa di avere sufficiente materiale per procedere all'isolamento ed alla identificazione chimica diretta, si ritiene di poter assumere che la sostanza trovata nelle calcificazioni patologiche è veramente acido citrico.

CONSIDERAZIONI. — I risultati ottenuti dimostrano che tutte le calcificazioni patologiche analizzate contenevano acido citrico. Esse provenivano da processi morbosi di natura infiammatoria, degenerativa, iperplastica e tumorale e da distretti istologicamente e funzionalmente molto diversi. La concentrazione dell'acido citrico nelle calcificazioni appare indipendente dal sesso e dall'età dell'individuo affetto dalla lesione calcificata.

Il contenuto di acido citrico delle calcificazioni appare molto più elevato di quello dei tessuti normali o non calcificati corrispondenti. Poichè l'acido citrico del tessuto osseo rimane inalterato per periodi lunghissimi — Thunberg⁽¹⁷⁾ ne ha trovato ancora persino in ossa preistoriche vecchie 8000 anni —, mentre quello che si accumula nel cuore del ratto in seguito alla lesione biochimica prodotta dal fluoroacetato, scompare rapidamente dal tessuto cardiaco dopo la morte dell'animale (Buffa e Peters⁽¹¹⁾) può sorgere il dubbio che la stessa cosa avvenga nelle calcificazioni patologiche e nei tessuti normali, cioè che dopo la morte la concentrazione dell'acido citrico rimanga immutata nelle calcificazioni e diminuisca nei tessuti normali o non calcificati. Noi crediamo che tale dubbio possa escludersi per analogia con quanto è stato osservato negli animali di laboratorio; infatti il contenuto di acido citrico dei loro tessuti normali freschi⁽¹¹⁾ è dello stesso ordine di quello dei

(12) A. CAHOIRS, « Ann. Chim. », 19, 484 (1847) (citato da A. S. GOLDBERG e A. R. BERNHEIM, « J. biol. Chem. », 156, 33 (1944)).

(13) L. STAHRÉ, « Z. an. Chem. », 36, 195 (1897) (*idem, ibidem*).

(14) H. A. KREBS e L. V. EGGLESTON, « Biochem. J. », 38, 426 (1944).

(15) F. L. BREUSCH e R. TULUS, « Biochim. Biophys. Acta », 1, 77 (1947).

(16) P. BUFFA, R. A. PETERS e R. W. WAKELIN, « Biochem. J. », 48, 467 (1951).

(17) T. THUNBERG, « Acta physiol. scand. », 14, 245 (1947).

tessuti umani analizzati 24-48 ore dopo la morte. Inoltre, titolando l'acido citrico nel tessuto cardiaco normale del ratto immediatamente o 24 ore dopo la morte, si ottengono risultati simili. [Estrazione immediata: media di 10 animali 25 $\mu\text{g/g}$ di tessuto (Buffa e Peters⁽¹⁸⁾); estrazione dopo 24 ore: 2 animali, 22 e 42 $\mu\text{g/g}$ di tessuto (Buffa⁽¹⁸⁾)].

Già dal limitato numero di casi analizzati non sembra che esistano relazioni tra la concentrazione dell'acido citrico e la natura del processo morboso che ha dato origine alla calcificazione, mentre vi sono indicazioni di possibili rapporti tra la sede ed il contenuto in acido citrico della calcificazione. Per il momento non sappiamo dare alcuna spiegazione delle notevoli differenze di concentrazione trovate nelle calcificazioni aortiche; si tratta in genere di placche calcifiche che si isolano facilmente dalla parete arteriosa e si può escludere che tali differenze siano dovute alla presenza di quantità diverse di tessuti molli rimaste nei frammenti analizzati. Questo punto potrà forse essere chiarito da un'analisi chimica più completa e dall'esame istologico per identificare eventuali processi di ossificazione. Ad ogni modo è interessante notare che in queste calcificazioni patologiche l'acido citrico raggiunge a volte concentrazioni dello stesso ordine di quelle osservate nel tessuto osseo normale.

È un fatto ben stabilito che le calcificazioni patologiche contengono calcio e fosforo in quantità e rapporto simili a quelli del tessuto osseo (vedi le riviste di Barr⁽¹⁹⁾, Logan⁽²⁰⁾ ed ancora la ricerca di Fontaine e coll.⁽²¹⁾), ora l'acquisizione che esse contengono anche acido citrico accresce ulteriormente la somiglianza di composizione chimica tra queste formazioni calcificate patologiche ed il tessuto osseo. A nostro avviso questa somiglianza è molto significativa e di essa bisogna tenere conto quando si tenti di spiegare il modo di formazione delle calcificazioni patologiche.

Circa l'origine ed il significato dell'acido citrico nelle calcificazioni patologiche (come pure nel tessuto osseo) indicazioni significative sono offerte dalle recenti acquisizioni sulla distribuzione ed il metabolismo di questo acido nei tessuti. Buffa e Peters⁽¹⁸⁾, studiando il meccanismo biochimico di azione del fluoroacetato, hanno dimostrato che l'acido citrico si forma e si trasforma continuamente in quasi tutti gli organi e tessuti animali. Questo fatto rende verosimile che l'acido citrico delle calcificazioni abbia origine nei tessuti dove esse si formano. Inoltre, il fatto che l'acido citrico sia stato trovato in tutte le strutture biologiche calcificate finora studiate, dal tessuto osseo dei vertebrati ai gastroliti del gambero alle calcificazioni patologiche, fa pensare che esso probabilmente partecipi al processo della calcificazione e che non sia un componente accidentale delle formazioni calcificate. A questo proposito sono molto suggestivi i risultati di recentissime ricerche di Banister

(18) P. BUFFA, esperimenti non pubblicati (1952).

(19) D. P. BARR, « *Physiol. Rev.* », 12, 593 (1932).

(20) M. A. LOGAN, « *Physiol. Rev.* », 20, 522 (1940).

(21) R. FONTAINE e collaboratori, « *Rev. orthop.* », 36, 3 (1950).

e Foulkes ⁽²²⁾, i quali hanno trovato che nel tessuto cardiaco di *Xenopus laevis* intossicato con fluoroacetato, susseguentemente al consueto accumulo di acido citrico vi è pure un aumento del calcio totale. Ulteriori ricerche sono in corso.

Sono molto grato al prof. G. Bompiani Direttore dell'Istituto di Anatomia Patologica dell'Università di Roma ed ai professori A. Ascenzi e A. Ficari per il materiale autopsico ed allo studente interno L. Colajanni per l'aiuto.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente informa i Colleghi che sono presenti alla seduta i proff. Hilda Geiringer von Mises del « Wheaton College » di Norton Mass. e Richard von Mises della « Harvard University » e porge loro il cordiale saluto della Classe e suo personale.

Comunica quindi che è uscito il fascicolo n. 2 (febbraio 1952) dei « Rendiconti ».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Cambi, Signorini (anche a nome dei Colleghi Sansone e Segre), Giordani, G. Levi, Vernoni, U. Amaldi (a nome dei Colleghi Caccioppoli e Picone), Perucca, Zagar, Boaga, Chiarugi e Bonino.

Il Presidente legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria. Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CACCIOPPOLI R. – Misura e integrazione sulle varietà parametriche. Nota II.

BALDASSARRI M. – Una condizione per l'esistenza di unisecanti (pres. dal Corrisp. B. SEGRE).

CREPAX P. – Studio comparativo delle proteine del muscolo scheletrico di Coniglio nell'avitaminosi E e nell'inanizione cronica (pres. dal Corrisp. G. C. PUPILLI).

GAETA F. – Caratterizzazione delle curve origini di una catena di resti minimali. Nota II (pres. dal Socio F. SEVERI).

GROSS W. – Sul calcolo della capacità elettrostatica di un conduttore (pres. dal Socio M. PICONE).

FRANCINI E. – Determinazione dei coni e sessualità in « *Pinus halepensis* » Mill (pres. dal Socio A. CHIARUGI).

MACHNE X. e TONINI G. – Modificazioni del potenziale di lesione del miocardio sottoposto allo stiramento (pres. dal Corrisp. G. C. PUPILLI).

MANGINI A. e MONTANARI F. – Ricerche sui benzimidazoli: spettri di assorbimento e proprietà cromoforiche (pres. dal Socio G. B. BONINO).

(22) J. BANISTER e E. FOULKES, comunicazione personale (1952).

MANUNTA G. - Inibizione della lattazione per opera del P-ossipropiofenone (pres. dal Socio G. LEVI).

MIRONE P. e VAMPIRI M. - Spettro ultrarosso e costituzione del 3,5-dimetilpirazolo (pres. dal Socio G. B. BONINO).

MIRONE P. e VAMPIRI M. - Sullo spettro ultrarosso tra 2,7 e 5 di alcune sostanze contenenti il gruppo imminico (pres. dal Socio GIOV. B. BONINO).

PANIZZI L. e NICOLAUS R. - Ricerche sulle melanine. - I. Sulla melanina di seppia (pres. dal Socio F. GIORDANI).

RANZI S. - Ricerche per uno studio della determinazione embrionale al livello molecolare (pres. dal Socio S. TONZIG).

STORCHI E. - Piccole oscillazioni dell'acqua contenuta da pareti piane (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio U. Amaldi, a nome del Collega Picone, legge la relazione della Commissione, composta dai predetti Soci, incaricata di esaminare la seconda parte della Memoria di U. Wegner, dal titolo: «Contributi alla teoria dei procedimenti iterativi per la soluzione dei sistemi di equazioni lineari».

Detta relazione è messa ai voti e approvata dalla Classe con le riserve di carattere finanziario già decise, per la citata Memoria, nella seduta del 12 gennaio c. a.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente presenta i volumi inviati in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza l'opera del Socio Fermi dal titolo: «Elementary Particles», il volume «La vita delle Piante» del Socio Gola, il fasc. 3 del Vol. III e il fasc. 1 del Vol. IV di «Caryologia», Giornale di Citologia, Citosistemica e Citogenetica, diretto dal Socio Chiarugi, una pubblicazione dell'«Harvard College Observatory» dal titolo «Physical Processes in Gaseous Nebulae» e un estratto dalla «Gazzetta Chimica Italiana», volume 81, contenente la rievocazione di Emanuele Paternò, tenuta da F. C. Palazzo al VI Congresso Nazionale di Chimica che ebbe luogo a Milano nel settembre 1950, unitamente al XXIII Congrès de Chimie Industrielle.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 marzo 1952

- Cariologia*. Giornale di Citologia, Cito-sistemica e Citogenetica. Edita da Alberto Chiarugi. Vol. III, n. 3; vol. IV, n. 1.
- Congresso (VI) Nazionale di Chimica. XXIII Congrès de Chimie Industrielle*. Milano 17-23 settembre 1950. Estr. da «La Chimica e l'Industria», a. XXXII, 1950, novembre.
- CROVA Bice. — *L'abitazione nei suoi riflessi sociali*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1951. Pp. 178, in-8°. (Collana di Studi sui problemi medico-sociali, 15).
- FERMI Enrico. — *Elementary Particles*. New Haven, Yale University Press, 1951. Pp. XII-110, in-8°. (Silliman Memorial Lectures).
- GOLA Giuseppe. — *La vita delle piante*. Torino, U.T.E.T., 1951. Pp. XI-673, in-8°, con figg. e tavv.
- HARVARD COLLEGE OBSERVATORY. — *Physical Processes in Gaseous Nebulae*. Estr. da «The Astrophysical Journal», volume LXXXV, 1937, n. 4.
- KULIK J. Ph., POLETTI L., PORTER R. J. — *Liste des nombres premiers du onzième million (plus précisément de 10.006.741 a 10.999.997)*. Amsterdam, «Werto», 1951. Pp. 25, in-8°.
- PALAZZO Francesco Carlo. — *Emanuele Paternò*. Rievocazione al VI Congresso Nazionale di Chimica. XXIII Congrès de Chimie Industrielle. Estr. da «Gazzetta Chimica Italiana», vol. LXXXI.
- POLETTI Luigi. — Vedi: KULIK J. Ph., POLETTI L., PORTER R. J.
- PORTER R. J. — Vedi: KULIK J. Ph., POLETTI L., PORTER R. J.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 19 aprile 1952

Presiede il Socio anziano G. LEVI

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Misura e integrazione sulle varietà parametriche.* Nota II (*) del Corresp. RENATO CACCIOPOLI.

10. Passiamo ora allo studio di quelle *molteplicità*, di un punto per una proiezione di una superficie, che abbiamo introdotte nell'analisi delle trasformazioni piane continue ⁽¹⁾.

Consideriamo un piano orientato, che per semplicità potremo supporre essere il piano xy : indichiamo con T un campo quadrato aperto in xy , con Z il campo rettangolare illimitato nella direzione z (prisma quadrato indefinito) avente T come sezione con xy , e con T', Z' analoghi domini rettangolari. Z, Z' staccano sulla superficie S (di classe L) un certo numero di intorni aperti o compatti (v. n. 5), anche un'infinità numerabile.

Segue da semplici considerazioni di continuità che degli intorni compatti staccati da Z' (o in generale da un dominio rettangolare R' qualunque) soltanto un numero finito può avere punti (con tracce) a distanza $> \varepsilon$ dalla (traccia della) frontiera ⁽²⁾, ε essendo un numero positivo comunque assegnato, almeno per ogni porzione compatta di S .

È chiaro allora che per un qualunque intorno Δ , aperto o compatto, staccato da Z o da Z' , si ha $\varphi_3(\Delta) = i \text{ mis } T$, essendo i un intero relativo, non nullo soltanto in un numero finito di casi ⁽³⁾; indichiamo rispettivamente con p_T , e q_T , la somma dei valori assoluti e la somma algebrica dei vari numeri i .

(*) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) In B), loc. cit. (5) al n. 1 della Nota precedente.

(2) Con tutta correttezza logica andrebbe sempre fatta la distinzione fra *punti* P di S e *tracce* \bar{P} ; ma ce ne dispenseremo quando non vi sia possibilità di equivoco.

(3) La cosa è ovvia per le superficie poliedriche, e si riconosce in generale mediante passaggio al limite.

Dato un punto Q in xy , consideriamo per tutti i campi T di centro Q i valori di p_T (non crescenti col lato di T): se l'insieme di questi è limitato, risultano ben determinati, non appena T sia sufficientemente piccolo, i valori $p_T = p(Q)$, $q_T = q(Q)$, che diremo rispettivamente *molteplicità assoluta o totale*, e *molteplicità relativa* di Q per la proiezione $S^{(3)}$ di S su xy ; posto $p = p_1 + p_2$, $q = p_1 - p_2$, $p_1(Q)$ e $-p_2(Q)$ saranno le molteplicità *positiva* e *negativa*.

Queste molteplicità si lasciano naturalmente definire per ogni porzione aperta $S(A)$ di S , come due funzioni additive $p(Q, A)$, $q(Q, A)$ dell'insieme base A . Se in particolare S è una superficie poliedrica Σ , p e q si prolungano in due funzioni $p(Q, I; \Sigma)$, $q(Q, I; \Sigma)$, definite per tutti i punti Q e additive rispetto ad I , insieme di Borel sul modello; p è la variazione totale di q .

Consideriamo ora una successione $\{\Sigma_n\}$ di superficie poliedriche con aree equilimate, approssimanti S .

Se $p(Q, I; \Sigma_n)$ si mantiene limitata, il teorema del n. 4 ci assicura l'esistenza di almeno una funzione limite $q(Q, I; S)$: questa coincide per $I = A$ con la funzione dianzi indicata con $q(Q, A)$. Ne segue che è univocamente definita in F la funzione $q(Q, H)$, o $q(Q, J)$, molteplicità relativa di Q per la proiezione di $J = S(H)$; la sua variazione totale $p(Q, H)$, o $p(Q, J)$ dà la molteplicità totale.

Se per un punto Q la molteplicità totale $p(Q)$ risulta infinita, $q(Q)$ può presentare l'indeterminazione $\infty - \infty$; simili punti costituiscono al più un insieme E di misura nulla. Ciò si deduce facilmente dal fatto che $p(Q)$ è *inferiormente semicontinua*, tenendo presente che le Σ_n hanno aree equilimate.

II. Proseguiamo la nostra analisi supponendo senz'altro S piatta (n. 7), con traccia in xy ed equazioni (2): l'assimilazione della superficie ad una proiezione $S^{(3)}$ aiutando peraltro l'intuizione geometrica. Ad S si associa una *trasformazione piana* Φ dell'insieme base \mathfrak{A} , definita dalla coppia a variazione limitata $[x(u, v), y(u, v)]$. Attribuendo ad ogni punto Q di xy la molteplicità $p(Q, H)$ o l'altra $q(Q, H)$, e prescindendo dall'*insieme singolare* E , si ottengono due *insiemi ponderati* (n. 3), chiamati rispettivamente l'*insieme corrispondente* e quello *pseudo-corrispondente*, $M(H)$ e $N(H)$, di H nella trasformazione Φ . Le loro funzioni caratteristiche $p(Q, H)$, $q(Q, H)$ dipendono additivamente da H nella famiglia F ; come funzione di Q , la prima è inferiormente semicontinua.

La variazione $W(H)$ della coppia $[x, y]$, cioè l'area semplice della porzione di superficie $S(H)$, è la misura (semplice) dell'insieme pseudo-corrispondente $N(H)$. Si tratta invero di due funzioni additive di H che coincidono su tutti gli insiemi A o C cui corrispondano su S intorni Δ , aperti o compatti, staccati da campi o dominî quadrati T o T' ⁽⁴⁾; il valore comune essendo i mis T . La considerazione di tali intorni conduce poi anche subito

(4) Che subentrano ai campi e dominî Z, Z' del caso generale.

al risultato che la variazione totale $V(H)$, area totale di $S(H)$, è la misura dell'insieme corrispondente $M(H)$.

V' ha anche luogo a considerare, come *pseudo-variazione totale*, la misura totale $U(H)$ di $N(H)$; $U(H)$ è una funzione sub-additiva, compresa fra $|W(H)|$ e $V(H)$.

Se la trasformazione Φ è *assolutamente continua*, cioè se è tale la coppia $[x, y]$, si possono definire gli insiemi corrispondente e pseudo-corrispondente, *a meno di insiemi di misura totale nulla*, per tutti gli insiemi di Borel I , ponendo per esempio $M(I) = M(H_1)$, $N(I) = N(H_1)$ (n. 6).

12. Le funzioni numeriche di punto $p(Q)$, $q(Q)$ dipendono essenzialmente dalla superficie piatta S ; le relazioni di corrispondenza e pseudo-corrispondenza, fra insiemi di \mathcal{A} e del piano xy , dalla trasformazione Φ . Due risultati relativi a tali dipendenze funzionali hanno importanza fondamentale.

Il primo è quasi ovvio, come conseguenza della definizione stessa di p : *la molteplicità totale $p(Q; S)$ del punto Q per la superficie S è un funzionale inferiormente semicontinuo di S* . Si intende qui la tendenza di una superficie variabile S ad un limite va intesa nel senso precisato al n. 2 per le approssimazioni poliedriche ⁽⁵⁾. Ne segue che la dipendenza di $M(\mathcal{A}, \Phi)$ ⁽⁶⁾ da Φ è inferiormente semicontinua: e quindi che *la variazione totale di una coppia (l'area totale di una superficie piatta) è un funzionale inferiormente semicontinuo di questa (della superficie)*.

Il secondo risultato, tipico della nostra teoria, riguarda la relazione di pseudo-corrispondenza. Consideriamo una successione $\{\Sigma_n\}$ di superficie poliedriche con aree equilimitate, tendenti ad S ; cioè di coppie quasi-lineari (x_n, y_n) , a variazioni totali equilimitate, tendenti a $[x, y]$; e indichiamo con Φ_n le relative *trasformazioni quasi-lineari* delle reti base r_n (n. 2). Vedremo che la pseudo-corrispondenza fra insiemi istituita da Φ è in un certo senso il limite di quelle relative alle Φ_n .

Seguiremo la linea del ragionamento del n. 5 sulle funzioni di proiezione. Consideriamo su S un intorno aperto $S(A)$ staccato dal campo quadrato T : la funzione $q(Q, A; \Phi)$ ha il valore i in T (n. 10) ed è nulla altrove. Siano T' un dominio quadrato in T , $S(C)$ l'insieme compatto $T' \cap S(A)$, e poniamo $\Sigma_n(B_n) = T' \cap \Sigma_n(A)$. Per n sufficientemente grande si ha $q(Q, B_n; \Phi_n) = q(Q, C; \Phi)$, col valore i in T' e zero altrove; nonchè $q(Q, C; \Phi_n) = q(Q, C; \Phi)$, quando Q sia dato internamente a T' ; restando sempre inteso che Q non appartiene all'insieme singolare E di Φ .

Indichiamo con $V_n(I)$ la variazione totale della coppia $[x_n, y_n]$, e supponiamo, riferendoci a norma del teorema del n. 4 ad una successione estratta, che la successione $\{V_n(I)\}$ sia quasi convergente verso una funzione $V_0(I)$. Sia D_n la differenza assoluta fra C e B_n : al limite massimo di D_n corrisponde su S un insieme con traccia sul contorno di T' ; ne segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(D_n) = 0$,

(5) Cui si riconduce la convergenza secondo Fréchet.

(6) Cioè della funzione caratteristica di quest'insieme.

con al più un'infinità numerabile di eccezioni per ogni aggregato infinito di dominî T' a frontiere disgiunte.

Consideriamo gli insiemi $N(I, \Phi_n)$ pseudo-corrispondenti di I nella trasformazione Φ_n , e le loro misure semplice e totale $W(I, \Phi_n)$, $U(I, \Phi_n)$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} U(D_n, \Phi_n) = 0$, l'insieme $N(C, \Phi_n)$ tende in media a $N(C, \Phi)$:

e l'analisi precedente ci permette di affermare che tale convergenza in media ha luogo sugli insiemi H di F nelle stesse condizioni della quasi-convergenza (per una successione estratta; per la data della convergenza in misura) delle funzioni additive numeriche (n. 4).

Scriveremo, con notazione già adoperata ⁽⁷⁾,

$$N(H, \Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty}^* N(H, \Phi_n);$$

con la stessa notazione, il risultato del n. 5 (per superficie piate) si scrive

$$W(H, \Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty}^* W(H, \Phi_n)$$

e non è più che un'ovvia conseguenza del precedente.

In queste relazioni si potrebbe sostituire alla successione $\{\Phi_n\}$ di trasformazioni quasi-lineari altra più generale di trasformazioni supposte soltanto *proprie*, relative cioè a superficie S_n proprie (n. 6) ⁽⁸⁾. D'altronde sarebbe anche facile prendere in considerazione trasformazioni degeneri, ciò che per brevità tralascieremo.

13. Le molteplicità di un punto per una proiezione di superficie, o superficie piate, possono anche definirsi in un modo diverso dal precedente, peraltro *perfettamente equivalente* (nel caso bidimensionale) a tutti i fini della nostra teoria: dalle nozioni fondamentali delle variazioni come funzioni additive d'insieme, e delle misure relative ed assolute, a tutte le applicazioni al calcolo integrale.

Anzichè considerare, come al n. 10, le somme $p_T = \sum |z|$ e $q_T = \sum z$, si ponga $p'_T = \sum \text{sign}^2 z$, $q'_T = \sum \text{sign} z$; sientino cioè soltanto gli intorno Δ , distinguendone le proiezioni in positive e negative. Con ciò i valori di $p(Q)$ e di $q(Q)$ risultano cambiati soltanto in un numero finito di punti se la trasformazione è quasi-lineare, ed in un'infinità al più numerabile in generale ⁽⁹⁾. Ma nel caso di varietà e trasformazioni a più di due dimensioni, cui come è chiaro la nostra teoria si estende senz'altro, è la prima nozione di molteplicità che conduce ad una definizione corretta della pseudo-corrispondenza.

(7) In N I, loc. cit. (1) al n. 1.

(8) Estendendo così la proprietà di *continuità* delle funzioni φ di cui al n. 7 di N I.

(9) Il risultato è in qualche modo intuitivo; la dimostrazione ne è dovuta a RADÓ (v. l'opera citata in (7) al n. 1). Quest'Autore fa uso sistematico della molteplicità assoluta β' (che indica con x); un inconveniente dei suoi metodi mi sembra consistere nell'analisi topologica che involgono, di per sè interessante ma che li complica a segno da renderne problematica l'estensione al caso n -dimensionale (cfr. RADÓ e REICHELDERFER, loc. cit. (22) al n. 9, 1.20).

Nella mia primitiva trattazione (limitata al caso bidimensionale) ho fatto uso sistematico di questa nozione, definendo d'altronde gli insiemi pseudo-corrispondenti «in media», cioè a prescindere da insiemi di misura totale nulla ⁽¹⁰⁾; ho poi introdotto anche la seconda definizione ⁽¹¹⁾, come equivalente e «genericamente» coincidente con la prima; e da un'esposizione un po' confusa è nata una specie di *contaminatio* delle due, che peraltro non ho mancato di rilevare come inessenziale ⁽¹²⁾.

14. Essenziale in questa teoria è lo studio di speciali decomposizioni di una superficie S : questo studio, che si inquadra nelle nostre considerazioni fondamentali sugli insiemi J di S ⁽¹³⁾, è basato sull'analisi delle *sezioni piane*.

Consideriamo nello spazio una superficie S (di classe L), un piano orientato π , ed un punto P di S su π . Diremo che P appartiene alla *sezione* di S con π se ogni intorno di P presenta punti dalle due bande di π ⁽¹⁴⁾.

Di un intorno Δ (ed in generale di un insieme \tilde{J} qualsiasi) definiamo il *diametro* come estremo superiore delle distanze fra due suoi punti. Se il precedente punto P non è di sezione per S e π , i suoi intorni di diametro δ non superiore ad un certo valore δ_0 non conterranno punti dalle due bande di π . Segue facilmente di qui che dei piani di un fascio parallelo soltanto una infinità numerabile può incontrare S fuori della sezione, essere cioè *radente* in qualche punto. Questa osservazione ci permetterà di sottintendere nel seguito la considerazione di piani non radenti.

Supponiamo S chiusa, e sia $\{\Sigma_n\}$ una successione di superficie poliedriche approssimanti, con aree equilimitate. Da quanto detto ai nn. 3 e 5 segue che l'insieme ponderato D_n interno a Σ_n converge in media verso un insieme D , e che altrettanto può ammettersi per quasi tutte le sezioni di D_n e di D con i piani di una data giacitura: inoltre potranno suppersi dotate di minimo limite finito le lunghezze delle sezioni di Σ_n con questi piani.

Analogamente vanno considerati, in corrispondenza dei dominî rettangolari R' , gli insiemi $R' D_n$, $R' D$ e le porzioni $R' \Sigma_n$, $R' S$ di Σ_n , S ; e conseguentemente il caso generale che S sia aperta.

15. Dobbiamo ora rifarci alle nostre ricerche sugli insiemi orientati, considerandone un'estensione spontanea.

(10) A), loc. cit. (5) al n. 1.

(11) Loc. cit. (1).

(12) In C), loc. cit. (5) al n. 1. Tanta disinvoltura è certamente deplorabile, ma potrebbe quasi dirsi *felix culpa*, se non ha ostacolato la scoperta dei fatti essenziali e dei metodi più idonei; le nozioni di insieme pseudo-corrispondente (fondamentale per una teoria assolutamente generale del cambiamento delle variabili negli integrali multipli), di variazioni totale e semplice come funzioni di insieme, ecc., sembrano essere in seguito andate smarrite.

(13) L'incondizionata decomponibilità, analoga a quella del piano, di una superficie in insiemi, è sconosciuta alle teorie recenti; nella mia, è la base di una nozione di misura nel senso di Borel-Lebesgue.

(14) Ved. nota (2).

Per quasi tutti i piani orientati π di data giacitura la sezione $s = \pi S$ di S con π si presenta come un insieme linearmente orientato di lunghezza finita. Le tracce \bar{S} e \bar{s} di S ed s non sono tenute ad avere misura, spaziale o piana, nulla; ma la convergenza in media degli insiemi πD_n , o in generale di quelli del tipo $\pi R' D_n$, definiti da poligoni con lunghezze equilimitate, permette di definire le funzioni di proiezione (lunghezze relative) $\psi_i(Es)$ ($i = 1, 2, 3$) sugli assi; E denotando un insieme di Borel nello spazio ⁽¹⁵⁾. Di qui si passa (v. n. 5) alle funzioni generali $\varphi_i(H, s)$, lunghezze relative delle proiezioni di $\pi S(H)$. Risultano così definite tre funzioni di proiezione lineare $\varphi_i(L)$, per gli insiemi linearmente orientati segati sulle porzioni di S , cioè sugli insiemi J da quasi tutti i piani dello spazio.

Per questi insiemi J abbiamo già considerato (n. 6) le funzioni di proiezione $\varphi_i(J)$ (la differenza fra le notazioni degli argomenti può evitare la confusione con le precedenti φ_i): si tratta di insiemi superficialmente orientati, definiti in base alle successioni $\{D_n\}$.

Tanto J quanto L sono insiemi orientati di un tipo generale, in cui un punto del *sostegno* può essere centro di più *elementi* ⁽¹⁶⁾: insiemi di elementi raccordati, anzichè per l'appartenenza ad una frontiera, dal riferimento ad un modello. Qui dunque l'attuale ricerca si ricongiunge alla precedente, subordinandosi entrambe ad una concezione generale.

Indichiamo con $\sigma_i(J)$ la variazione totale di $\varphi_i(J)$, con $\lambda_i(L)$ quella di $\varphi_i(L)$: esse danno le aree e lunghezze assolute delle proiezioni di J e di L .

Siano $J_1^{(x)}, J_2^{(y)}, J_3^{(z)}$ le sezioni di J con i piani paralleli ai piani coordinati yz, zx, xy , e $\varphi_{12}^{(x)}, \varphi_{13}^{(x)}, \lambda_{12}^{(x)}, \lambda_{13}^{(x)}$, ecc. le corrispondenti funzioni φ e λ relative agli assi y, z , ecc. Mediante passaggio al limite attraverso le approssimazioni poliedriche si stabiliscono le *formole di riduzione*

$$(4) \quad \varphi_i(J) = \int \varphi_{i3}^{(y)} dy = \int \varphi_{32}^{(z)} dz \quad , \quad \sigma_i(J) = \int \lambda_{23}^{(y)} dy = \int \lambda_{32}^{(z)} dz ,$$

e le analoghe ottenutene con permutazioni circolari ⁽¹⁷⁾.

Abbiamo così stabilito che (*quasi tutte*) le sezioni piane di una superficie di classe L sono insiemi linearmente orientati di lunghezza finita; estendendo le formole relative al caso elementare di una superficie poliedrica o regolare.

Questi risultati si estendono a varietà in uno spazio a quantesivogliano dimensioni, per esempio a ipersuperficie.

Nel nostro caso particolare delle superficie si può poi dire di più, ricordando la ben nota circostanza della compattezza delle famiglie di curve di lunghezza limitata: cioè che le sezioni piane di una superficie di classe L si compongono generalmente di curve rettificabili e di punti di accumulazione

(15) In $N I$ (dove le funzioni ψ sono indicate con φ) vengono considerate in generale frontiere di domini; D, D_n sono allora insiemi ordinari.

(16) Ved. $N I$, n. 10, e $N II$, n. 17. Nel caso attuale si presenta peraltro la nuova circostanza di elementi che possono dirsi *moltiplici* o *diramati*.

(17) Queste formole corrispondono alle (9), (10) di $N II$.

dei loro punti ⁽¹⁸⁾; queste curve sono immagini di insiemi H del modello costituiti da continui ciclici di continui K , cioè corrispondono a curve (eventualmente punti) del modello ridotto \mathcal{H} .

Se ne deduce senza difficoltà un risultato fondamentale, sostanzialmente dovuto a Lebesgue ⁽¹⁹⁾: *Una superficie di classe L si lascia decomporre in porzioni arbitrariamente piccole mediante curve rettificabili*. Queste, se non già corrispondenti a curve ordinarie del modello, come nel caso di una superficie propria (n. 6), sono ovviamente sempre approssimabili mediante curve di tale tipo ⁽²⁰⁾.

16. Supponiamo in particolare S piatta, e consideriamo la variazione $W(H)$ della coppia $[x, y]$. Questa, se H è un insieme A corrispondente ad un intorno Δ staccato da un campo rettangolare T , si riduce a i mis T (n. 11). Se la frontiera di H è trasformata da Φ in una curva Γ (composta di una o più parti) rettificabile, o più generalmente di misura piana nulla, $W(H)$ eguaglia l'area $\alpha(\Gamma)$ interna a Γ (n. 3); l'area totale, $\bar{\alpha}(\Gamma)$ essendo la pseudo-variazione totale $U(H)$. In generale poi le differenze $W(H) - \alpha(\Gamma)$, $U(H) - \bar{\alpha}(\Gamma)$ sono infinitesime con la misura di Γ .

Le considerazioni precedenti ci permettono allora di formulare il seguente risultato:

La variazione totale della coppia $[x, y]$ è il comune estremo superiore delle somme

$$\sum_k |\alpha(\Gamma_k)|, \quad \sum_k \bar{\alpha}(\Gamma_k)$$

per tutte le decomposizioni di \mathcal{A} ⁽²¹⁾ in porzioni limitate da curve Γ_k ⁽²²⁾.

17. Daremo ora (sempre esemplificando sul caso $n = 3$, $k = 2$) le definizioni fondamentali di misura e di integrale, ovvie dopo la premessa teoria degli insiemi orientati; ritrovando così, come subito preciseremo, quelle della nostra prima trattazione.

(18) Se S è chiusa, le sezioni sono involucri di insiemi di curve chiuse (anche ridotte a punti), al più in infinità numerabile.

Queste circostanze dovrebbero spiegare il paradosso dell'esistenza (da me in passato esclusa, loc. cit (1)) di superficie a punti semplici aventi area finita e misura spaziale positiva (BESICOVITCH, « Quart. Journal of Math. », 16 (1945)). Misura nulla spetterebbe solo all'insieme dei punti centri effettivi di elementi, l'eventuale apporto positivo essendo dovuto a punti *neutri* (N I, n. 10). Le note superficie completamente degeneri sono affatto prive di elementi superficiali, e le loro sezioni di elementi lineari.

(19) « Annali di Matematica », III, 7 (1902), n. 61.

(20) CESARI (« Atti R. Acc. d'Italia », 13 (1943), p. 1327) ha rivelato il fatto « inaspettato » che sulle superficie quadrabili esistono curve « sottili » (veramente per l'intuizione geometrica sarebbe stato sorprendente piuttosto il contrario). Non poi tanto sottili, nè tanto inaspettate, se non dopo i miei lavori, coerentemente ignorati, almeno dopo la *Thèse* di Lebesgue.

(21) Basta considerare i domini interni ad \mathcal{A} .

(22) Loc. cit. (1). Questi estremi superiori sono ricomparsi nei lavori di CESARI, indicati con le lettere T e G .

Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ le funzioni, di J su S o di H in F , relative alle proiezioni di S sui piani coordinati, cioè le variazioni W_1, W_2, W_3 delle coppie $[y, z], [z, x], [x, y]$ (nn. 5 e 8); indichiamo con w il vettore di cui sono le componenti, con V_i la variazione totale di W_i .

La variazione totale di w su J definisce l'area $\sigma(J)$ di J , e la derivata di w rispetto a σ dà il versore normale n in un punto P di S . L'area è dunque una funzione additiva di insieme di Borel su S ; la normale risulta definita quasi ovunque, cioè a prescindere da un insieme di area nulla ⁽²³⁾.

In formole:

$$\begin{aligned}\sigma(J) &= \int_J |dw| = \int_J \sqrt{dW_1^2 + dW_2^2 + dW_3^2} \left(= \int_H \sqrt{dW_1^2 + dW_2^2 + dW_3^2} \right)^{(24)} = \\ &= \int_J \sqrt{dV_1^2 + dV_2^2 + dV_3^2} \left(= \int_H \sqrt{dV_1^2 + dV_2^2 + dV_3^2} \right); \\ n_P &= \left(\frac{dw}{d\sigma} \right)_P^{(25)} \left(= \left(\frac{dw}{d\sigma} \right)_K \right)\end{aligned}$$

(J e P corrispondendo all'insieme H e al continuo K del modello).

Se S è assolutamente continua, nel senso che risultano assolutamente continue le coppie $[y, z], [z, x], [x, y]$ (ed allora soltanto), le formole precedenti si riducono a quelle classiche, nelle quali si interpretino gli jacobiani come *derivate delle coppie* (n. 7).

Gli integrali superficiali delle forme differenziali si definiscono mediante la formola

$$\int_J f(x, y, z) dy dz = \int_J f(x, y, z) dW_1 = \int_H f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) dW_1,$$

il differenziale dW_1 riducendosi a $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv$ nel caso dell'assoluta continuità di $[y, z]$; e le due analoghe ottenute permutando circolarmente x, y, z .

(23) Nella mia prima trattazione, ho chiamato *asintotica* la normale e *asintoticamente tangente* il relativo piano, in ragione della loro proprietà fondamentale, dimostrata dapprima per superficie della forma $z = f(x, y)$ (Questi « Rendiconti », VI, 7 (1928)) e poi più in generale (Questi « Rendiconti », VI, 22 (1935)).

CESARI ha introdotto le locuzioni di *quasi-normale* e *quasi-tangente*.

(24) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_k \sqrt{W_1^2(J_k) + W_2^2(J_k) + W_3^2(J_k)}$, con $J_1 + J_2 + \dots = J$, e δ massimo fra i diametri degli J_k ; sostituendo H, H_k a J, J_k , δ sarà il diametro *misurato su \mathcal{H}* (n. 2).

Nei miei primi lavori, in seguito alla presunzione erronea discussa al n. 9, scrivevo queste e le successive espressioni integrali relativamente ad insiemi di Borel I qualunque. Per rendere le mie formole applicabili al caso più generale non v'è pertanto che da limitarle agli insiemi H di F .

(25) La derivazione si esegue mediante un qualunque reticolo staccato su S da un reticolo spaziale.

Gli integrali del Calcolo delle Variazioni sono del tipo

$$\int_S F(x, y, z, n) d\sigma;$$

quindi, al pari dei precedenti, sono integrali di Stieltjes che si riducono ad integrali ordinari nel caso dell'assoluta continuità ⁽²⁶⁾. La formola generale per il cambiamento delle variabili in un integrale doppio (immediatamente estendibile ad un integrale n -plo) si scrive

$$\begin{aligned} \int_{N(H)} f(x, y) dx dy &= \int_H f(x(u, v), y(u, v)) dW = \\ &= \int_H f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv, \end{aligned}$$

$N(H)$ essendo l'insieme pseudo-corrispondente di H ⁽²⁷⁾, e la seconda eguaglianza sussistendo quando $[x, y]$ è assolutamente continua.

In tutti i casi di assoluta continuità si può sostituire l'insieme H di F con un qualunque insieme di Borel I ⁽²⁸⁾.

18. Seguendo la linea della teoria degli insiemi orientati, abbiamo fin qui considerato sistematicamente superficie di classe L . Ma si passa subito al caso contemplato nella nostra prima trattazione (e come ivi dichiarato, solo apparentemente più generale) di superficie di classe L rispetto ai tre piani coordinati (n. 5). Segue invero, dall'ipotesi che le tre coppie $[y, z]$, $[z, x]$, $[x, y]$ siano a variazione limitata, che quasi tutte le sezioni di S con piani paralleli ai piani coordinati hanno proiezioni di lunghezza finita, e sono però di lunghezza finita. Si estende allora il risultato del n. 15 sulla decomponibilità mediante curve rettificabili ⁽²⁹⁾. Le definizioni fondamentali del n. precedente sussistono, le variazioni W_i prolungandosi dagli insiemi $H^{(i)}$ relativi ai modelli ridotti \mathcal{K}_i agli insiemi H relativi a \mathcal{K} (cfr. n. 8).

L'indipendenza dagli assi della definizione di area non è senz'altro ovvia, come quando S è supposta a priori di classe L ; ma discende dal fatto che il vettore w è individuato dalle sue determinazioni sulle porzioni di S limitate da curve rettificabili; determinazioni che rispondono univocamente alla definizione originaria del bivettore di Peano.

La nostra definizione è dunque, come abbiamo già mostrato nella prima trattazione, l'estensione *naturale* di quella di Peano.

(26) Ho introdotto questi integrali e ne ho studiato la semicontinuità, in C), loc. cit. (5) al n. 1.

(27) Il primo integrale è ovviamente quello ordinario di $f(Q) q(Q, H)$ (n. 11).

(28) Basta dunque formulare come *condizione* la prolungabilità della variazione di coppia in una funzione additiva assolutamente continua per rendere illimitatamente valida la mia teoria (tanto più semplice e completa delle posteriori) del cambiamento di variabili negli integrali doppi.

(29) Avevo revocato in dubbio una simile decomponibilità per il caso più generale (ved. la seconda Nota citata in (23)), limitandomi alla considerazione di curve semirettificabili.

Geometria. — *Una proprietà caratteristica in grande delle curve giacenti su di una quadrica.* Nota (*) del Corrisp. BENIAMINO SEGRE.

1. In uno spazio proiettivo (reale o complesso) a tre dimensioni, consideriamo sei rami lineari \mathcal{L}_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) — di classe differenziale C^2 — le cui origini stiano in un piano α che non tocchi nessuno di essi. Allora ogni piano π sufficientemente prossimo ad α sega \mathcal{L}_i in un punto P_i , e sussiste, come vedremo (nn. 2-4), il

TEOREMA. — *Affinchè, per ogni scelta di π nell'intorno di α , i sei punti P_i stiano su di una conica Γ irriducibile, occorre e basta che i sei rami \mathcal{L}_i stiano su di una stessa quadrica, che non tocchi il piano α (1).*

Nel campo algebrico, da qui discende subito la seguente proprietà, la quale risponde ad una questione recentemente proposta in via incidentale da F. Severi nei lavori di Seminario dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, come estensione della nota caratterizzazione — risalente al Castelnuovo — delle curve piane quali curve aventi ∞^3 trisecanti. Si ha precisamente il

COROLLARIO. — *Le curve algebriche d'ordine ≥ 6 tracciate su di una quadrica sono le sole curve algebriche sghembe che ammettano ∞^3 coniche 6-secanti.*

Questo risultato non si lascia però estendere ulteriormente, in quanto proveremo (nn. 5, 6) che:

Esistono curve algebriche sghembe del 10° ordine non giacenti su nessuna superficie cubica, le quali tuttavia sono segate dal generico piano dello spazio in dieci punti situati su di una cubica piana.

2. La sufficienza della condizione espressa dal teorema dianzi enunciato essendo evidente, basterà dimostrarne la necessità. Supponiamo dunque che, per ogni piano π (sufficientemente prossimo ad α), i sei punti P_i stiano su di una conica Γ ; otterremo così complessivamente ∞^3 coniche Γ , e si tratta di dimostrare ch'esse giacciono tutte su di una quadrica.

Fissiamo una posizione π^0 generica di π , e siano Γ^0 e P_i^0 le posizioni corrispondentemente assunte da Γ e P_i ($i = 1, 2, \dots, 6$). Consideriamo inoltre le ∞^3 coniche Γ determinate da piani π passanti per P_i^0 ; per costruzione, tali coniche — fra cui vi è la Γ^0 — contengono tutte il punto fisso P_i^0 , e si appoggiano a ciascuno dei rami $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots, \mathcal{L}_6$ in un punto variabile. Ne consegue che la congruenza, K , formata dalle ∞^3 coniche suddette ammette come fuochi su Γ^0 i punti $P_1^0, P_2^0, \dots, P_6^0$, il primo dei quali viene a contare fra essi dop-

(*) Presentata nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) Per una caratterizzazione integrale, di altro tipo, della totalità delle curve chiuse giacenti su di una sfera, cfr. B. SEGRE, *Una nuova caratterizzazione della sfera*, questi « Rendiconti » (8), 3, 420-422 (1947).

piamente⁽²⁾. La K ha così su Γ^0 sette fuochi, onde ogni punto di Γ^0 dev'essere un fuoco di K , poichè altrimenti K dovrebbe avere su Γ^0 esattamente sei fuochi (reali o complessi). Poichè Γ^0 è sostanzialmente una conica qualsivoglia di K , così la congruenza K deve ammettere come fuoco ogni punto di ciascuna delle sue coniche.

Da qui dedurremo che le coniche di K si appoggiano a due a due fra loro, oltre che nel punto fisso P_1^0 , in un punto Q variabile. Per ciò basterà mostrare che una qualunque conica Γ di K passa per il punto, Q^0 , ove il piano π di Γ sega Γ^0 all'infuori di P_1^0 ; e non sarà restrittivo supporre Q^0 distinto da P_1^0 .

A tal uopo, introduciamo nello spazio (com'è lecito, stante il carattere proiettivo della questione) coordinate proiettive non omogenee x, y, z , assumendo P_1^0 come origine, π^0 come piano xy , e Q^0 come punto all'infinito dell'asse y . Questo asse incontra così la conica irriducibile Γ^0 nei punti distinti P_1^0 e Q^0 , ond'esso non può risultare tangente a Γ^0 in P_1^0 . La conica Γ , situata nel piano π di equazione

$$(1) \quad f \equiv ax + by + z = 0,$$

si potrà dunque rappresentare su esso con un'equazione della forma:

$$(2) \quad \varphi \equiv \alpha(a, b)x^2 + \beta(a, b)xy + \gamma(a, b)y^2 + \delta(a, b)x + y = 0,$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ denotano funzioni regolari di a, b in un intorno di $a = b = 0$; e sarà

$$(3) \quad \gamma(0, 0) = 0,$$

in forza dell'ipotesi che il punto Q^0 all'infinito dell'asse y stia su Γ^0 .

I fuochi di K , sulla generica conica Γ , si hanno associando alle equazioni (1), (2) di Γ la

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(a, b)} = 0,$$

ossia la

$$(4) \quad y \frac{\partial \varphi}{\partial a} - x \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0.$$

Affinchè detti fuochi risultino indeterminati su Γ , occorre e basta che la cubica (4) contenga come componente la conica (2); e poichè le (4) e (2) passano per l'origine con molteplicità rispettive 2 e 1, ciò si traduce in un'identità nelle x, y della forma

$$(5) \quad y \frac{\partial \varphi}{\partial a} - x \frac{\partial \varphi}{\partial b} = (\lambda x + \mu y) \varphi,$$

ove λ e μ designano funzioni regolari di a, b in un intorno a $a = b = 0$.

Tenuto conto della (2), uguagliando i coefficienti di y^2 nei due membri della (5) otteniamo che in quell'intorno dev'essere

$$\mu = 0.$$

(2) Per le proprietà differenziali delle congruenze di curve di cui qui ed in seguito facciamo uso, cfr. G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II (Paris, Gauthier-Villars, 1915), pp. 2-5.

Basta quindi uguagliare i coefficienti di y^3 nei due membri della (5), per dedurne l'identità:

$$(6) \quad \frac{\partial \gamma(a, b)}{\partial a} = 0.$$

Le (3), (6) implicano la

$$(7) \quad \gamma(a, 0) = 0;$$

e questa - in virtù delle (1), (2) - esprime precisamente che, se il piano π di una conica Γ di K contiene il punto Q^0 (sicchè $b = 0$), anche Γ passa per Q^0 .

3. Fissiamo ora nel piano π^0 (fuori di Γ^0) un generico punto O , e diciamo Q_i^0 l'intersezione di OP_i^0 e Γ^0 residua a P_i^0 . Le coniche Γ situate negli ∞^2 piani π passanti per O costituiscono una nuova congruenza, H , la quale contiene Γ^0 ed ammette su Γ^0 i sei punti P_i^0 come fuochi, in quanto le sue coniche si appoggiano per ipotesi ai rami \mathcal{L}_i . In virtù del n. 2, le ∞^1 coniche Γ di H uscenti dal punto P_i^0 contengono tutte di conseguenza il punto Q_i^0 . Tanto basta per asserire che, su Γ^0 , H ha anche i punti Q_i^0 come fuochi; sicchè la congruenza H ammette come fuoco ciascun punto di Γ^0 e, del pari, ciascun punto di ogni sua conica.

Da qui dedurremo che le ∞^3 coniche Γ (di cui al n. 1) si incontrano a due a due fra loro in due punti. A questo fine, stante l'arbitrarietà del punto O dianzi considerato, è manifestamente sufficiente provare che di tale proprietà godono le varie coppie di coniche della suddetta congruenza H . E per ciò, tenuto conto dell'arbitrarietà di Γ^0 , basta mostrare che, preso un qualunque punto Q^0 di Γ^0 , le ∞^1 coniche Γ di H il cui piano contiene Q^0 passano tutte di conseguenza per questo punto.

Procederemo all'uopo come nel n. 2, introducendo coordinate proiettive non omogenee x, y, z aventi O come origine, π^0 come piano xy , e Q^0 come punto all'infinito dell'asse y . Poichè attualmente Γ^0 non passa per O , così la congruenza H si rappresenterà (in un intorno di Γ^0) con le equazioni (1) e

$$(8) \quad \varphi \equiv \alpha(a, b)x^2 + \beta(a, b)xy + \gamma(a, b)y^2 + \delta(a, b)x + \varepsilon(a, b)y + 1 = 0,$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ denotano funzioni regolari di a, b in un intorno di $a = b = 0$, soddisfacenti anche ora alla (3).

Il fatto - dianzi acquisito - che i singoli punti della generica conica Γ di H siano fuochi di H , si traduce in ciò che il primo membro della (4), ove si esprima φ con la (8), dev'essere divisibile per tale φ . Basta quindi osservare che la cubica così definita dalla (4) ha un punto doppio nell'origine, mentre la conica (8) non passa per questo punto, per dedurne che la (4) deve ora risultare un'identità nelle x, y . Uguagliando a zero il coefficiente di y^3 nella suddetta equazione (4), ne ricaviamo la (6); e da questa, tenuto conto della (3), segue senz'altro la (7), ciò che prova l'asserto.

4. Possiamo infine completare la dimostrazione del teorema del n. 1, provando che

Le ∞^3 coniche Γ giacciono su di una quadrica fissa.

Invero, tre $\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ genericamente fissate di tali coniche risultano irriducibili, ed appoggiate fra loro a due a due in coppie di punti distinti (n. 3). Esiste dunque una quadrica passante per i relativi punti di appoggio, complessivamente in numero di sei, e contenente un punto ulteriore di ciascuna delle tre coniche $\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$. Quella quadrica contiene allora le $\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$, avendo con ognuna per costruzione cinque punti distinti a comune; essa passa pertanto per la generica Γ , in quanto ha in comune con Γ le tre coppie di punti secondo cui questa conica si appoggia alle $\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$.

5. Otteniamo un primo esempio di curve (spezzate) soddisfacenti alle condizioni di cui all'ultimo enunciato del n. 1, considerando due generiche superficie del 4° ordine (rigate ed irriducibili), F e G , passanti doppiamente per due rette sghembe r, s . L'intersezione delle F, G si compone delle r, s , contate ciascuna quattro volte, e di 8 rette distinte ulteriori t_1, t_2, \dots, t_8 , appoggiate alle r ed s . Incominciamo col mostrare che:

Non esiste nessuna superficie cubica passante per le dieci rette r, s, t_1, \dots, t_8 .

Invero, se esistesse una superficie cubica Φ passante per queste rette, l'intersezione di Φ tanto con la F che con la G dovrebbe essere costituita dalle rette r, s contate doppiamente, e dalle t_1, \dots, t_8 . La Φ dovrebbe pertanto passare semplicemente per le r, s , e fare parte di una quartica del fascio determinato dalle F, G . Poichè le superficie di questo fascio passano doppiamente per r ed s , così la componente residua della quartica suddetta dovrebbe essere un piano contenente le r, s ; ma questo è assurdo, poichè le r, s sono per ipotesi sghembe fra loro.

La curva del 10° ordine spezzata nelle rette r, s, t_1, \dots, t_8 gode quindi delle proprietà enunciate alla fine del n. 1, ove si mostri che:

Le rette r, s, t_1, \dots, t_8 segano su di un piano π generico un gruppo di 10 punti distinti, situato su di una curva del terzo ordine.

Infatti, dette R, S le intersezioni di π con le r, s , si consideri la superficie del quarto ordine del fascio determinato dalle F, G che contiene la retta RS . Tale superficie sega π lungo questa retta e, ulteriormente, lungo una cubica piana, la quale ha manifestamente i requisiti voluti.

6. Allo scopo di ottenere esempi di curve irriducibili, godenti delle proprietà segnalate alla fine del n. 1, consideriamo due generiche superficie F^3, F^4 , degli ordini rispettivi 3 e 4, passanti semplicemente per due rette sghembe r ed s . Detta \mathcal{C} la curva del 10° ordine lungo cui F^3 ed F^4 si incontrano ulteriormente, prendiamo una generica superficie F^5 del 5° ordine passante per \mathcal{C} , e diciamo \mathcal{D} la curva del 10° ordine intersezione residua di F^4 ed F^5 .

Il sistema lineare delle superficie del 6° ordine passanti per \mathcal{C} e \mathcal{D} comprende le superficie spezzate in F^5 ed in un piano variabile arbitrariamente.

Esso dunque sega su F^4 , fuori della curva fissa $\mathcal{C} + \mathcal{D}$, il sistema (completo) delle sezioni piane. Ne consegue che *la curva \mathcal{D} non sta su nessuna superficie cubica*. Ed invero, se vi fosse una superficie cubica G^3 passante per \mathcal{D} , la superficie $F^3 + G^3$ apparterrebbe al sistema lineare suddetto e segherebbe F^4 , fuori di $\mathcal{C} + \mathcal{D}$, lungo una curva di cui farebbero parte le rette sghembe r, s . Ma ciò è assurdo poichè, per quanto sopra, questa curva residua dovrebbe essere piana.

Si ha poi che *la curva \mathcal{D} sega su di un piano π generico un gruppo di 10 punti distinti, situato su di una curva del terzo ordine*. Infatti la quartica e la quintica piane segate da F^4 ed F^5 su π si incontrano in 20 punti, 10 dei quali sono le intersezioni di \mathcal{C} e π , e stanno quindi sulla cubica (F^3, π) . Ne consegue che i rimanenti 10 punti, ossia le intersezioni di \mathcal{D} e π , stanno su di un'altra cubica piana; ciò si ottiene agevolmente mostrando che, fra le sestiche piane passanti per i 20 punti suddetti, ve n'è almeno una contenente come parte la (F^3, π) .

Fisica matematica. — *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono.* Nota I ^(*) del Corrisp. BRUNO FINZI.

Le equazioni elettromagnetiche nello spazio-tempo sono estremamente compendiose e concettualmente molto semplici. Nello spazio-tempo quadridimensionale pseudoeuclideo, il campo elettromagnetico del vuoto è rappresentato da un unico tensore doppio emisimmetrico $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ e la distribuzione elettrica da un vettore j_α . Gli indici assumono i valori 0, 1, 2, 3 e l'indice 0 contraddistingue la coordinata temporale, espressa in unità römèriane, e gli indici 1, 2, 3 contraddistinguono le tre coordinate spaziali. Le leggi elettromagnetiche nel vuoto si riducono notoriamente alle seguenti due: il tensore elettromagnetico è irrotazionale, cioè, se $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ è il tensore di Ricci,

$$(1) \quad \text{rot } F_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\alpha\beta/\gamma} = 0;$$

la sua divergenza eguaglia la distribuzione elettrica,

$$(2) \quad \text{div } F_{\alpha\beta} \equiv F_{\alpha\beta}^{/\beta} = j_\alpha^{(1)}.$$

Weyl ⁽²⁾ dimostrò che, ammessa la prima legge, la seconda può essere dedotta da un principio di minima azione. Dalla prima legge si deduce infatti che il tensore elettromagnetico può ottenersi per derivazione da un vet-

(*) Presentata nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) Cfr. ad esempio B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna, Zanichelli, cap. IX (1949).

(2) H. WEYL, « Ann. d. Phys. », 54, p. 118 (1917); cfr. anche *Raum, Zeit, Materie*, Berlin, pp. 195-196 (1921).

tore spazio-temporale Φ_α che rappresenta il potenziale scalare e il potenziale vettore,

$$(3) \quad F_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta;\alpha} - \Phi_{\alpha;\beta}.$$

Ne segue che la seconda legge può dedursi dal principio di minima azione

$$(4) \quad \delta \int_{\omega} \mathcal{L} d\omega = 0,$$

quando si assuma come azione l'integrale esteso ad una regione qualsivoglia ω dello spazio-tempo dell'invariante quadratico

$$(5) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \Phi_\alpha j^\alpha$$

rappresentante una densità d'energia, e si operi la variazione lasciando inalterato il potenziale Φ_α al contorno τ di ω :

$$(6) \quad \delta\Phi_\alpha = 0 \quad \text{su } \tau.$$

È pure noto come, sempre ammettendo la prima legge, si possano dedurre dal principio della minima azione (4), sotto la condizione (6), le generalizzazioni della seconda legge nelle teorie di Mie ⁽³⁾, Born ⁽⁴⁾, Proca ⁽⁵⁾, Yukawa ⁽⁶⁾, Bopp ⁽⁷⁾: basta a tal fine generalizzare opportunamente l'espressione (5) di \mathcal{L} .

Così, nella teoria di Mie, acconcia a rappresentare il campo elettromagnetico in presenza della materia, in luogo dell'unico tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ se ne hanno due: uno, che indichiamo ancora con $F_{\alpha\beta}$, individuante il campo elettrico e l'induzione magnetica, l'altro, che indichiamo con $f_{\alpha\beta}$, individuante il campo magnetico e l'induzione elettrica. L'equazione

$$(7) \quad \text{div } f_{\alpha\beta} = j_\alpha,$$

che nella teoria di Mie sostituisce la (2), si deduce dal principio della minima azione (4), ponendo per $\delta \mathcal{L}$ l'espressione seguente ⁽⁸⁾:

$$(8) \quad \delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} f^{\alpha\beta} \delta F_{\alpha\beta} - j^\alpha \delta \Phi_\alpha.$$

Così pure per ottenere le equazioni di Proca-Yukawa basta aggiungere al secondo membro della (5) un addendo proporzionale all'invariante quadratico $\Phi_\alpha \Phi^\alpha$.

In questa Nota desidero mostrare come *entrambe* le equazioni elettromagnetiche possano ottenersi da un unico principio di minima azione, togliendo in tal modo carattere di privilegio alla prima equazione in confronto alla seconda.

(3) G. MIE, « Ann. d. Phys. », 37, 39, 40 (1912-13); 85 (1928).

(4) M. BORN, « Proc. R. Soc. London », 143 (1933); M. BORN e L. INFELD, id., 144 (1934).

(5) A. PROCA, « Journ. de Phys. Rad. », 7 (1936).

(6) H. YUKAWA, « Proc. Phys. Math. Soc. of Japan », 20 (1938).

(7) F. BOPP, « Ann. der Physik », 38 (1940); 42 (1942).

(8) Cfr. H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, pp. 210-218.

1. Premettiamo il seguente *lemma*, che generalizza il notissimo teorema di Clebsch relativo ai vettori: ogni tensore doppio emisimmetrico può riguardarsi come somma di un tensore irrotazionale e di uno solenoidale:

$$(9) \quad F_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}$$

essendo $H_{\alpha\beta} = -H_{\beta\alpha}$, $K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$,

$$(10) \quad \text{rot } H_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{div } K_{\alpha\beta} = 0.$$

Se Φ_α e Ψ_α sono vettori solenoidali arbitrari, si soddisfa alle due (10) prendendo

$$(11) \quad H_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta}, \quad K_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \Psi^{\gamma/\varrho},$$

dove $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho}$ è il tensore di Ricci.

Infatti

$$\text{rot } H_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} H^{\alpha\beta/\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (\Phi^{\beta,\alpha\gamma} - \Phi^{\alpha/\beta\gamma}) = 0$$

$$\text{div } K_{\alpha\beta} \equiv K_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \Psi^{\gamma/\varrho\beta} = 0.$$

Nelle (11), senza alterare il valore di $H_{\alpha\beta}$ e quello di $K_{\alpha\beta}$, si può aggiungere un gradiente $\xi^{/\alpha}$ a Φ^α e un gradiente $\eta^{/\alpha}$ a Ψ^α , e si possono sempre determinare i due scalari ξ ed η in modo che i due vettori Φ_α e Ψ_α siano solenoidali:

$$\Phi_\alpha{}^{/\alpha} = 0, \quad \Psi_\alpha{}^{/\alpha} = 0.$$

In tal modo delle quattro componenti, funzioni delle coordinate, che danno il campo del vettore Φ_α tre sole possono riguardarsi come indipendenti, e tre sole delle quattro componenti, funzioni delle coordinate, che danno il campo del vettore Ψ_α possono riguardarsi come indipendenti. In totale si hanno dunque sei funzioni indipendenti, le quali, assegnato il tensore doppio emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$, risultano individuate dalle sei equazioni scalari equivalenti alla (9) quando in essa si pongano per $H_{\alpha\beta}$ e $K_{\alpha\beta}$ le espressioni (11).

Attraverso alla (9) e alle (11) un generico tensore doppio emisimmetrico dello spazio-tempo può dunque esprimersi linearmente mediante due tensori derivati di due vettori solenoidali dello spazio-tempo stesso. Diremo questi vettori *i due vettori potenziali* del tensore emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$. Se, in particolare, $F_{\alpha\beta}$ è irrotazionale, tenendo conto di questa circostanza, si può individuarlo con il solo vettore potenziale Φ_α ; se $F_{\alpha\beta}$ è solenoidale, tenendo conto di ciò, si può individuarlo col solo vettore potenziale Ψ_α ⁽⁹⁾; se il

(9) Se, più particolarmente ancora, il tensore $F_{\alpha\beta}$ è irrotazionale e solenoidale, cioè armonico, come avviene per il campo neutro nel vuoto, tenendo conto o della prima o della seconda condizione si può individuare il campo o con Φ_α o con Ψ_α . Tenendo conto dell'altra condizione, entrambi questi vettori solenoidali risultano armonici, perchè, se tenendo conto dell'irrotazionalità si scrive che $F_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta}$, tenendo conto della solenoidalità si ha: $F_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = \Phi_{\beta/\alpha}{}^{/\beta} - \Phi_{\alpha/\beta}{}^{/\beta} = 0$, cioè $\square \Phi_\alpha \equiv \Phi_{\alpha/\beta}{}^{/\beta} = 0$; mentre se, tenendo conto della

tensore $F_{\alpha\beta}$ è generico, per individuarlo ci vogliono entrambi i vettori potenziali.

2. Consideriamo ora il *campo neutro nel vuoto*, individuato dall'unico tensore $F_{\alpha\beta}$, perchè $j_\alpha = 0$.

Dimostriamo che il campo elettromagnetico neutro nel vuoto è quello per cui risulta minima, a parità di valori al contorno di entrambi i potenziali, l'azione $\int l d\omega$, con

$$(12) \quad l = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Infatti, se $F_{\alpha\beta}$ è un tensore *a priori* generico individuato dai vettori potenziali Φ_α e Ψ_α , funzioni regolari in ω , se n_α è il versore normale al contorno τ , volto verso ω , si ha:

$$\begin{aligned} \delta \int l d\omega &= \delta \int \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d\omega = \frac{1}{2} \int F^{\alpha\beta} \delta F_{\alpha\beta} d\omega = \frac{1}{2} \int F^{\alpha\beta} (\delta \Phi_{\beta/\alpha} - \delta \Phi_{\alpha/\beta}) d\omega + \\ &+ \frac{1}{2} \int F^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \delta \Psi^{\gamma/\varrho} d\omega = \int F^{\alpha\beta} \delta \Phi_{\beta/\alpha} d\omega + \frac{1}{2} \int \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\alpha\beta} \delta \Psi^{\gamma/\varrho} d\omega = \\ &= \int (F^{\alpha\beta} \delta \Phi_{\beta})_{/\alpha} d\omega + \frac{1}{2} \int (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\alpha\beta} \delta \Psi^{\gamma})_{/\varrho} d\omega - \int \left\{ F^{\alpha\beta}_{/\alpha} \delta \Phi_\beta + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\alpha\beta}_{/\varrho} \delta \Psi^\gamma \left. \right\} d\omega = - \int \left\{ F^{\alpha\beta} n_\alpha \delta \Phi_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\alpha\beta} n^\varrho \delta \Psi^\gamma \right\} d\tau - \\ &- \int \left\{ F^{\alpha\beta}_{/\alpha} \delta \Phi_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\alpha\beta}_{/\varrho} \delta \Psi^\gamma \right\} d\omega. \end{aligned}$$

Ed essendo, su τ , $\delta \Phi_\beta = 0$ e $\delta \Psi^\gamma = 0$,

$$\delta \int l d\omega = - \int \left\{ F^{\alpha\beta}_{/\alpha} \delta \Phi_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\alpha\beta}_{/\varrho} \delta \Psi^\gamma \right\} d\omega.$$

Affinchè sia $\delta \int l d\omega = 0$, qualunque siano, in ω , $\delta \Phi_\beta$ e $\delta \Psi^\gamma$, debbono essere nulli i coefficienti di $\delta \Phi_\beta$ e di $\delta \Psi^\gamma$, cioè:

$$(13) \quad \text{rot } F_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{div } F_{\alpha\beta} = 0,$$

conformemente alle (1) e (2) (per $j_\alpha = 0$). Viceversa, se il campo soddisfa alle (13) l'azione di puro campo elettromagnetico (così si chiama l'azione precedentemente considerata) risulta stazionaria, anzi minima.

solenoidalità, si scrive che $F_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \Psi^{\gamma/\varrho}$, tenendo conto dell'irrotazionalità si ha: $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta/\gamma} = 2 \Psi^{\gamma\delta}_{/\gamma} - 2 \Psi^{\delta\gamma}_{/\alpha} = 0$, cioè $\square \Psi^\delta = 0$.

Poichè la solenoidalità di $F_{\alpha\beta}$ si traduce nell'irrotazionalità del tenore coniugato $*F_{\alpha\beta} = 1/2 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta}$, e viceversa, si vede che mentre Φ_α è il primo potenziale di $F_{\alpha\beta}$, Ψ_α è il primo potenziale di $*F_{\alpha\beta}$, così che Φ_α e Ψ_α sono rispettivamente quelli che si dicono il « potenziale » e l'« antipoteniale » del campo elettromagnetico armonico considerato.

Entrambe le equazioni elettromagnetiche maxwelliane, relative ai campi neutri nel vuoto, si possono dunque trarre da un unico principio variazionale di minima azione.

3. La stessa cosa si verifica per le equazioni elettromagnetiche maxwelliane relative ai *campi non neutri nel vuoto*. Basta in questo caso porre per l l'espressione (5), cioè considerare come azione la differenza fra l'azione di puro campo e quella che si dice *sostanziale elettrica*, per ottenere col procedimento poc'anzi indicato, entrambe le equazioni (1) e (2), anche per $j_\alpha \neq 0$.

Infatti, variando entrambi i potenziali, ma non j_α , si ha:

$$\delta \int l d\omega = \delta \int_{\omega} \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d\omega - \int_{\omega} j^\beta \delta \Phi_\beta d\omega,$$

e ricordando i calcoli del n. 2, se su τ è $\delta \Phi_\alpha = 0$, $\delta \Psi_\alpha = 0$,

$$\delta \int l d\omega = - \int_{\omega} \left\{ (F^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} + j^\beta) \delta \Phi_\beta + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\alpha\beta}{}_{|\varrho} \delta \Psi^\gamma \right\} d\omega.$$

Scrivendo che $\delta \int l d\omega = 0$ qualunque siano, in ω , $\delta \Phi_\beta$ e $\delta \Psi^\gamma$, si ha:

$$F^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} + j^\beta = - F^{\beta\alpha}{}_{|\alpha} + j^\beta = 0, \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\alpha\beta}{}_{|\varrho} = 0,$$

e queste coincidono appunto con le (2) e (1).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulla rappresentazione asintotica degli estremi delle soluzioni di equazioni differenziali lineari del 2° ordine.*

Nota di UBALDO RICHARD, presentata (*) dal Corrisp. F. G. TRICOMI.

INTRODUZIONE. — Sia $y(x)$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$(I) \quad \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x) y(x) = 0.$$

Supponiamo che, nella semiretta $x \geq a$, sia $p(x) > 0$, $q(x) > 0$, e che $y(x)$ abbia un insieme discreto di massimi e minimi nei punti $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Diremo ξ_n gli zeri di $y(x)$.

Alcuni Autori, in specie H. Milloux, A. Wiman⁽¹⁾, hanno assegnato, per $p(x) \equiv 1$ e sotto opportune condizioni restrittive, delle formule asintotiche per le successioni $|y(x_n)|$, $|y'(\xi_n)|$.

(*) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) H. MILLOUX, *Sur l'équation différentielle $x'' + A(x)x = 0$* . « Prace Mat. Fiz. », 41, pp. 39-54 (1934); A. WIMAN, *Ueber eine Stabilitätsfrage in der Theorie der linearen Differentialgleichungen*. « Acta Math. », 66, pp. 121-145 (1936).

Presento in questa Nota una formula del genere, nuova per il metodo di deduzione ⁽²⁾, per le condizioni di validità e sopra tutto per la precisa valutazione dell'errore ⁽³⁾.

I. ALCUNE PROPOSIZIONI DI MONOTONIA. — *Ipotesi*: la funzione

$$(2) \quad \omega(x) = \frac{1}{2} p(x) \frac{d}{dx} [\{p(x) q(x)\}^{-1/2}]$$

è monotona e infinitesima per $x \rightarrow +\infty$.

Osservazioni preliminari. — Dall'ipotesi si deduce il segno costante di $\omega(x)$, quindi la monotonia ⁽⁴⁾ di $p(x) q(x)$. L'ipotesi include pertanto le condizioni di Sonin-Pólya, sotto le quali si dimostra la opposta monotonia delle successioni

$$\begin{aligned} |y'(x_n)|, \quad & \{p(x_n) q(x_n)\}^{1/2} |y(x_n)|, \\ \{p(\xi_n) q(\xi_n)\}^{-1/2} p(\xi_n) |y'(\xi_n)|, \quad & p(\xi_n) |y'(\xi_n)|, \end{aligned}$$

e spesso anche parecchio di più ⁽⁵⁾.

Se $p(x) \equiv 1$ l'ipotesi assicura senz'altro che tutti gli integrali della (1) hanno un'insieme discreto di massimi e minimi. Nell'unico caso dubbio, quando $q(x)$ sia decrescente e tenda a zero per $x \rightarrow +\infty$, segue infatti dall'ipotesi che

$$\frac{d}{dx} [\{q(x)\}^{-1/2}] < 1 \quad (\text{definitivamente}),$$

Quindi, indicando con c un'opportuna costante:

$$q(x) > \frac{1}{(x+c)^2} \quad (\text{definitivamente}).$$

Si confronta allora la $y'' + q(x)y = 0$ con la $z'' + (x+c)^{-2}z = 0$.

La conclusione si estende ovviamente al caso in cui l'integrale $\int_x^\infty \frac{dt}{p(t)}$ diverga con x .

TEOREMA I. — *Nell'ipotesi sopra dichiarata le funzioni*

$$(3_1) \quad \rho_1(x) = \frac{1}{1+\omega} [(pq)^{1/2} y^2 - 2\omega y p y' + (pq)^{-1/2} p^2 y'^2]$$

$$(3_2) \quad \rho_2(x) = \frac{1}{1-\omega} [(pq)^{1/2} y^2 + 2\omega y p y' + (pq)^{-1/2} p^2 y'^2]$$

sono monotone di verso opposto.

(2) Sul metodo usato può vedersi la mia comunicazione al IV Congresso dell'U.M.I. (1951): *Su una classe di funzioni ausiliarie riguardanti le equazioni differenziali del 2° ordine*.

(3) Il problema è stato di recente proposto, in termini di valutazione dell'errore, da G. SANSONE in *Equazioni differenziali nel campo reale: comportamento asintotico delle soluzioni; punti singolari; soluzioni periodiche e valutazione del periodo*, § 1. « Rend. di Matem. », Roma, ser. V, vol. X (1951).

(4) Oltre al caso $p(x) q(x) = \text{cost.}$, di cui non ci occuperemo perchè la corrispondente equazione (1) sarebbe risolubile elementarmente.

(5) Si veda il mio lavoro: *Sulle successioni di valori stazionari delle soluzioni di equazioni differenziali lineari del 2° ordine*. « Rend. Sem. Mat. Torino », vol. 9°, pp. 309-324 (1949-50).

Dimostrazione. - Derivando e tenendo conto dell'equazione (1) si ottiene

$$(4_1) \quad \rho_1'(x) = \left[\frac{1}{1+\omega} \right]' (pq)^{1/2} \left[y + \frac{py'}{(pq)^{1/2}} \right]^2$$

$$(4_2) \quad \rho_2'(x) = \left[\frac{1}{1-\omega} \right]' (pq)^{1/2} \left[y - \frac{py'}{(pq)^{1/2}} \right]^2$$

e dall'esame delle (4₁), (4₂) si deduce che la monotonia di $\omega(x)$ implica la monotonia (di verso opposto) delle (3₁), (3₂).

Avvertenza. - Esiste un $a_1 (\cong a)$ tale che, per $x > a_1$, riesce $|\omega(x)| < 1$. Per $x > a_1$ le forme quadratiche (3₁), (3₂) sono definite positive; d'ora innanzi supporremo senz'altro $x > a_1$.

TEOREMA II. - *Le successioni*

$$\rho_1(x_n) = \frac{\{\dot{p}(x_n)q(x_n)\}^{1/2}y^2(x_n)}{1+\omega(x_n)}, \quad \rho_2(x_n) = \frac{\{\dot{p}(x_n)q(x_n)\}^{1/2}y^2(x_n)}{1-\omega(x_n)}$$

sono monotone di verso opposto. Nello stesso modo si comportano le successioni

$$\rho_1(\xi_n) = \frac{\{\dot{p}(\xi_n)q(\xi_n)\}^{-1/2}\dot{p}^2(\xi_n)y'^2(\xi_n)}{1+\omega(\xi_n)}, \quad \rho_2(\xi_n) = \frac{\{\dot{p}(\xi_n)q(\xi_n)\}^{-1/2}\dot{p}^2(\xi_n)y'^2(\xi_n)}{1-\omega(\xi_n)}.$$

Esiste inoltre una costante $k > 0$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n) = k^2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(\xi_n) = k^2.$$

Dimostrazione. - La prima parte dell'enunciato segue ovviamente dal teorema I. Quanto alla seconda, supponiamo per fissare le idee che $\omega(x)$ sia crescente. Allora, dalla $x_n < \xi_n < x_{n+1}$ segue

$$\rho_2(x_n) < \rho_2(\xi_n) < \rho_2(x_{n+1})$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(\xi_n) > 0.$$

D'altra parte $\omega(x) \rightarrow 0$ e perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(\xi_n);$$

anche la seconda parte del teorema è dimostrata.

Conclusione. - I risultati dei primi due teoremi si riassumono nel quadro seguente, dove si è fatto uso dei simboli $\uparrow \downarrow$, introdotti da A. Ostrowski per rappresentare la convergenza monotona verso un limite. La costante k dipende dalla scelta di $y(x)$ fra gli integrali della (1).

(5)

Ipotesi	Risultati	
$\omega(x) \uparrow 0$	$\rho_1(x) \downarrow k^2$	$\rho_2(x) \uparrow k^2$
$\omega(x) \downarrow 0$	$\rho_1(x) \uparrow k^2$	$\rho_2(x) \downarrow k^2$

2. FORMULE ASINTOTICHE. — TEOREMA III. — *Nelle stesse ipotesi del n. 1, se cioè $y(x)$ è un integrale oscillante della (1) e se $\omega(x)$ è monotona e infinitesima per $x \rightarrow +\infty$, allora valgono le formule*

$$(6) \quad \begin{cases} \{p(x_n)q(x_n)\}^{1/4} |y(x_n)| = k + O\{|\omega(x_n)|\} \\ \{p(\xi_n)q(\xi_n)\}^{-1/4} p(\xi_n) |y'(\xi_n)| = k + O\{|\omega(\xi_n)|\}. \end{cases}$$

Più precisamente, per $x > a_1$ si ha

$$(7) \quad \begin{cases} \left| \{p(x_n)q(x_n)\}^{1/4} |y(x_n)| - k \right| < k |\omega(x_n)| \\ \left| \{p(\xi_n)q(\xi_n)\}^{-1/4} p(\xi_n) |y'(\xi_n)| - k \right| < k |\omega(\xi_n)| \end{cases}$$

e, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha definitivamente

$$(7') \quad \begin{cases} \left| \{p(x_n)q(x_n)\}^{1/4} |y(x_n)| - k \right| < \frac{1+\varepsilon}{2} k |\omega(x_n)| \\ \left| \{p(\xi_n)q(\xi_n)\}^{-1/4} p(\xi_n) |y'(\xi_n)| - k \right| < \frac{1+\varepsilon}{2} k |\omega(\xi_n)|. \end{cases}$$

Dimostrazione. — Sia per fissare le idee, $\omega(x)$ crescente. Seguono allora dalle (5) le disuguaglianze

$$\rho_1(x_n) > k^2 > \rho_2(x_n),$$

$$\rho_1(\xi_n) > k^2 > \rho_2(\xi_n),$$

esplicitando le quali si ottengono, per $x > a_1$, le

$$k^2 [1 - \omega(x_n)] > \{p(x_n)q(x_n)\}^{1/2} y^2(x_n) > k^2 [1 + \omega(x_n)],$$

$$k^2 [1 - \omega(\xi_n)] > \{p(\xi_n)q(\xi_n)\}^{-1/2} p^2(\xi_n) y'^2(\xi_n) > k^2 [1 + \omega(\xi_n)].$$

Di qui si deducono senza difficoltà le (6), (7), (7').

Osservazione. — Si possono confrontare le (6) con le formule date dagli Autori citati nell'introduzione. Il teorema di H. Milloux, quando applicabile, fornisce per la prima delle (6) il resto $o(x^{-1})$; i teoremi di A. Wiman lasciano il resto delle (6) sotto forma indeterminata.

Ponendo $t = \log x$ nell'equazione di Bessel

$$(xy')' + \frac{x^2 - v^2}{x} y = 0$$

si ha $\frac{d^2 y}{dt^2} + (e^{2t} - v^2) y = 0$; il teorema di Milloux è applicabile e fornisce il resto $o(t^{-1}) = o\left(\frac{1}{\log x}\right)$, mentre le (6) danno il resto $O(x^{-1})$. Si veda in proposito anche il n. 4.

3. UN'APPLICAZIONE DELLE (5). — G. N. Watson ⁽⁶⁾ ha dimostrato che per le soluzioni dell'equazione di Bessel

$$[xy']' + \frac{x^2 - v^2}{x} y = 0$$

(6) G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1945, sec. ed., 15. 31, pp. 488-489.

la successione

$$(8_1) \quad \{p(x_n)q(x_n)\}^{1/4} |y(x_n)| = \{x_n^2 - v^2\}^{1/4} |y(x_n)|$$

cresce, mentre per $v > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x > v \sqrt{\frac{4v^2 + 4 + \sqrt{48v^2 + 13}}{4v^2 - 3}}$, decresce la successione

$$(8_2) \quad \{x_n\}^{1/2} |y(x_n)|.$$

Con metodi analoghi si prova che

$$(9_1) \quad \{p(\xi_n)q(\xi_n)\}^{-1/4} p(\xi_n) |y'(\xi_n)| = \{\xi_n^2 - v^2\}^{-1/4} \xi_n |y'(\xi_n)|$$

decresce, mentre per $v > 1/2$ cresce la successione

$$(9_2) \quad \{\xi_n\}^{1/2} |y'(\xi_n)|.$$

Queste proposizioni, che portano facilmente a valutazioni asintotiche di $|y(x_n)|$, $|y'(\xi_n)|$, non sono dunque utilizzabili per $v=0$. Poichè in questo caso $\omega(x) = -\frac{1}{2x}$, si possono sostituire le (8₂), (9₂) rispettivamente con $\sqrt{\rho_1(x_n)}$, $\sqrt{\rho_2(\xi_n)}$.

Si ottiene per esempio

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x_n}} \sqrt{1 - \frac{1}{2x_n}} < |J_0(x_n)| < \sqrt{\frac{2}{\pi x_n}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \xi_n}} < |J'_0(\xi_n)| < \sqrt{\frac{2}{\pi \xi_n}} \sqrt{1 + \frac{1}{2\xi_n}}.$$

4. UN'APPLICAZIONE DELLE (6). - Consideriamo ora, a titolo di esempio, l'equazione

$$(10) \quad y'' + q(x)y = 0$$

nell'ipotesi che $q(x)$ sia rappresentabile nell'intorno di $+\infty$ con uno sviluppo (anche soltanto asintotico, purchè due volte ⁽⁷⁾ derivabile termine a termine)

$$q(x) = x^{2r} \left\{ 1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots \right\}.$$

Se $r < -1$ si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^{+\infty} q(t) dt = 0$, e per un criterio dello Hille ⁽⁸⁾

gli integrali della (10) non sono oscillanti.

Supponiamo $r > -1$: se $r \neq 0$ si trova $\omega(x) = -\frac{1}{2} r x^{-1-r} \{1 + O(x^{-1})\}$, mentre se $r = 0$ e se c_k è la prima delle c_1, c_2, \dots diversa da zero si trova

(7) Perchè si presti alla rappresentazione di $\omega(x)$, $\omega'(x)$. Cfr. K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, cap. XIV (Berlino, Springer, 1947, quarta ed.).

(8) E. HILLE, *Non oscillation theorems*. «Trans. Amer. Math. Soc.», 64, pp. 234-252 (1948).

$\omega(x) = \frac{1}{4} h c_h x^{-1-h} \{1 + O(x^{-1})\}$. In ogni caso per $r > -1$ gli integrali della (10) sono oscillanti e le (6) sono applicabili.

La tabella seguente confronta l'ordine di grandezza del resto dato dalle (6) con quello dato (o non dato) dai teoremi di Milloux e Wiman.

	Formula (6)	Teorema di Milloux	Teorema di Wiman
$r > 0$	$O(x^{-1-r})$	$o(x^{-1})$?
$r = 0$	$O(x^{-1-h})$	—	—
$-1 < r < 0$	$O(x^{-1-r})$	—	?

Il segno — indica la non applicabilità del teorema, il segno ? la mancanza di una valutazione del resto.

Geometria algebrica. — *Caratterizzazione delle curve origini di una catena di resti minimali.* Nota II (*) di FEDERICO GAETA, presentata (**) dal Socio F. SEVERI.

5. In N. R. classifichiamo tutte le famiglie di curve sgheembe algebriche di residuale ρ caratterizzate dal simbolo $\left[\begin{smallmatrix} \mu_{11} \mu_{12} \dots \mu_{1, \rho+2} \\ \mu_{11} \mu_{21} \dots \mu_{\rho+1, 1} \end{smallmatrix} \right]$ nella cui riga superiore sono scritti i gradi delle forme della prima riga della matrice associata e normalizzata $\mathbb{G}_{\rho+1, \rho+2}$ di una curva generica della famiglia. Le condizioni di normalizzazione sono

$$(2) \quad \mu_{\rho+1, 1} \leq \mu_{\rho+1, 2} \leq \dots \leq \mu_{11} \leq \mu_{12} \leq \dots \leq \mu_{1, \rho+2}.$$

La condizione restrittiva $\mu_{\rho+1, 1} > 0$ non giustificata in N. R., appariva conseguenza delle conoscenze derivanti dal materiale sperimentale trattato finora. In questa Nota approfondisco le conseguenze della soppressione di tale restrizione, anche per rispondere a taluni suggerimenti di P. Dubreil, cui esprimo i più vivi ringraziamenti.

Supponiamo che $(F_1, F_2, \dots, F_{\rho+2})$ siano le forme della base minima ottenuta dalla matrice e siano n_i i loro ordini, che appaiono evidentemente disposti in successione non crescente:

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{\rho+2}.$$

Algebricamente non si può escludere l'esistenza di sizigie $(H_1, H_2, \dots, H_{\rho+2})$ con le H_i forme d'ordine m_i , con $H_1 = 0$ ed $n_{\rho+2} + m_{\rho+2} \leq n_1$ essendo

$$H_2 F_2 + H_3 F_3 + \dots + H_{\rho+2} F_{\rho+2} \equiv 0.$$

(*) Si continuano in questa Nota la numerazione e le notazioni della precedente *Complementi alla teoria delle varietà algebriche V_{r-2} di residuale finito di S_r* . Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XII, fasc. 3, 270-273 (1952).

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

Tale circostanza non si può presentare ovviamente per una V_{r-2} di residuale zero. Per $\rho = 1$ invece possiamo considerare il caso più semplice di una curva sgheмба del tipo $\begin{bmatrix} 1 & 2,2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Essa è del quart'ordine, spezzata in una cubica piana ed in una retta esterna al piano della medesima, appoggiata ad essa in un punto, resto di una conica rispetto ad una quadrica spezzata contenente come parte il piano della conica, e ad una superficie del terzo ordine. La totalità ∞^{15} di queste curve costituisce una varietà irriducibile subordinata alla famiglia ∞^{16} delle quartiche di prima specie.

Per studiare in generale la questione delle curve con $\mu_{q+1,1} \leq 0$ faremo le considerazioni seguenti, relative alla definizione rigorosa dei caratteri μ_{ij} ⁽¹²⁾; ad ogni elemento c_{ij} di $\mathcal{C}_{q+1, q+2}$ è possibile associare un intero (≥ 0) detto *grado virtuale* μ_{ij} , che coincide col grado ordinario (od effettivo) della forma quando essa non è nulla. Le forme nulle possono avere un grado ≥ 0 . Questi gradi si definiscono nell'unico modo possibile, in guisa che risultino soddisfatte sempre le condizioni di omogeneità:

$$\mu_{ij} + \mu_{hk} = \mu_{ik} + \mu_{jh}.$$

Ne deriva la possibilità di effettuare trasposizioni fra le righe e colonne di una qualsiasi matrice omogenea senza alterare i gradi virtuali, proprietà che si può sfruttare per normalizzare la matrice come in N. R., in guisa che sussistano le disuguaglianze (2).

Se una $\mathcal{C}_{q+1, q+2}$ possiede una costante non nulla, è possibile dedurre molto semplicemente una matrice $\mathcal{C}_{q, q+1}$ rappresentante il medesimo ideale. Ne segue che se il numero base dell'ideale è esattamente $\rho+2$, $\mathcal{C}_{q+1, q+2}$ è priva di costanti non nulle. Supporremo sempre verificata questa condizione in seguito. Allora risulta che ogni forma di grado virtuale $\mu_{ij} \leq 0$ è necessariamente nulla. D'altronde siccome non possono annullarsi tutte le forme di una medesima riga o colonna risulta che *i gradi virtuali degli elementi della prima riga e dell'ultima colonna della matrice normalizzata $\mathcal{C}_{q+2, q+2}$ sono sempre positivi*. Pertanto in taluni casi può essere comodo utilizzare i simboli $\begin{bmatrix} \mu_{11} \mu_{12} \dots \mu_{1, q+2} \\ \mu_{1, q+2} \mu_{2, q+2} \dots \mu_{q+1, q+2} \end{bmatrix}$ ⁽¹³⁾ piuttosto che quelli di N. R. per individuare una famiglia di curve sgheembe di residuale ρ . Ma questi simboli non si possono dare ad arbitrio; se vede invero che anche gli elementi della $(\rho+1)$ -esima colonna debbono essere positivi.

Prescindendo dalla restrizione che $\mathcal{C}_{q+1, q+2}$ non possieda costanti non nulle possiamo classificare le matrici omogenee in questi tre tipi:

1° $\mu_{q+1,1} > 0$. Questo tipo trattato in N. R. conduce a *famiglie* di curve con tutti gli invarianti positivi.

2° $\mu_{q+1,1} = 0$ conduce a varietà irriducibili subordinate a qualche

(12) Queste semplici proprietà trovansi stabilite con tutti i dettagli nel lavoro comune con ANDREOTTI citato in [3].

(13) In seguito però continueremo adoperando i simboli $\begin{bmatrix} \mu_{1i} \\ \mu_{j1} \end{bmatrix}$ come in N. R.

famiglia con $\mu_{q+i,1} > 0$ di residuale minore, come nell'esempio addotto dalla quartica spezzata.

3° $\mu_{q+i,1} < 0$. Questo tipo è misto. Per $\rho = 0$ esso non ha senso. L'esempio più semplice è quello delle curve $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ di residuale uno. Esse costituiscono una famiglia ∞^{20} di quintiche di genere tre spezzate in una quartica piana ed una retta esterna ad essa appoggiata, resto di una cubica piana rispetto ad una quadrica spezzata e di una superficie del quart'ordine. Risulta così provata l'affermazione del numero precedente dell'esistenza di famiglie di curve spezzate di residuale finito. Si riconosce senza difficoltà che per $\rho = 1$ tutte le famiglie di curve con $\mu_{q+i,1} < 0$ sono costituite da curve spezzate. Anche per $\rho = 2$ tutte le famiglie di curve con $\mu_{q+i,1} < 0$ sono spezzate. Invece per $\rho \geq 3$, oltre ad esistere famiglie di curve spezzate, esistono pure famiglie di curve irriducibili con $\mu_{q+i,1} > 0$. Il caso più semplice è quello della curva d'ordine 28 della famiglia $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ resto di una C^{36} irriducibile della famiglia $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ rispetto a due superficie F^6 . L'irriducibilità della C^{28} è conseguenza del fatto che una base minima dell'ideale della C^{36} è del tipo. (F^9, F^7, F^7, F^7).

Il problema di caratterizzare geometricamente le famiglie con $\mu_{q+i,1} > 0$ si risolve subito osservando che i resti minimali di una curva rappresentata da una matrice normalizzata $\mathcal{G}_{q+i, q+a}$ si rappresentano con la matrice verticale delle prime $\rho - 1$ colonne. Iterando la costruzione di questi resti minimali finchè sia possibile si vede che:

a) Se è possibile giungere fino ad una curva di residuale zero, tutti gli invarianti μ_{ij} sono positivi.

b) Se tutti gli invarianti sono positivi, è possibile rovesciare la costruzione precedente in modo da ottenere una catena di resti minimali aritmeticamente normali C_0, C_1, \dots, C_q che finisce in una C_q della famiglia data.

Risulta dunque che le famiglie di curve algebriche sghembe di residuale finito, la cui generica C è origine di una catena C_0, C_{q-1}, \dots, C_1 di curve aritmeticamente normali, ciascuna delle quali C_i è resto della C_{i+1} rispetto a due superficie d'ordine minimo per questa, si caratterizzano mediante la proprietà $\mu_{q+i,1} > 0$, che esprime che i gradi virtuali di tutti gli elementi di una matrice associata e normalizzata di C_q sono positivi.

6. Quando si considerano le nuove famiglie con $\mu_{q+i,1} < 0$ trattate in questa Nota, i soliti $2\rho + 2$ invarianti non si possono dare ad arbitrio. Bastano le famiglie con $\mu_{q+i,1} > 0$ per la conferma della ipotesi di Halphen stabilita in N.R. Colgo l'occasione per enunciare questo fatto in una forma più precisa:

Dato un intero positivo k , comunque elevato, si può trovare un intero N tale che esista un'infinità di famiglie di curve d'ordine $\geq N$ individuate da un numero $\geq k$ d'invarianti proiettivi.

Ciò non esclude che esistano altresì infinite famiglie di curve d'ordine $\geq N$ (ad esempio di residuale zero) individuate da due soli invarianti proiettivi.

Geometria. — *Una condizione per l'esistenza di unisecanti.*
 Nota di MARIO BALDASSARRI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. B. SEGRE.

Secondo idee ormai classiche ⁽²⁾, i sistemi algebrici di varietà algebriche sono talora riconducibili, birazionalmente, a tipi più semplici, quando esista qualche varietà che incontri in un sol punto variabile la generica varietà del sistema.

Ho dimostrato altrove ⁽²⁾ che condizione sufficiente affinché esista una siffatta varietà unisecante per un sistema ∞^d di varietà V_r^n ⁽³⁾, è che riesca: $r + 2 - n^d > 0$; e che tale condizione, quando si faccia un'opportuna ipotesi di generalità, risulta anche necessaria.

Qui dimostro che, se la V_r^n generica di un sistema algebrico ∞^s ammette una varietà Δ $(r-1)$ -dimensionale, s -pla, che sia intersezione completa di V_r^n con un'altra varietà ad r dimensioni da essa razionalmente definita, la condizione suddetta può venir sostituita con la limitazione assai meno restrittiva $r + 2 - n/s > 0$; e che anche questa, sotto un'opportuna ipotesi di generalità, può essere resa necessaria.

Tale criterio può essere spesso utilmente applicato; e qui da ultimo, a titolo d'esempio, faccio vedere come esso permetta di semplificare la classificazione delle V_3 contenenti un fascio di superficie razionali, compiuta da F. Enriques ⁽⁴⁾.

1. Sia K un corpo algebricamente chiuso di caratteristica zero ⁽⁵⁾, e sia $K' \equiv K(u, v) \bmod \varphi(u, v)$ un'estensione di K di grado di trascendenza uno. Indichiamo con $f(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$ ed $F(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$ due elementi di

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) L'idea risale ad A. CLEBSCH (nei due lavori: *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung*. «Math. Ann.», 1 (1869); *Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweiteilung der Abel'schen Functionen*. «Math. Ann.», 3 (1871)). Essa fu in seguito sviluppata da diversi Autori in numerosi lavori, fra i quali mi limito a segnalare: M. NOETHER, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Kurven besitzen*. «Math. Ann.», 3, 161-227 (1871); F. ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali*. «Math. Ann.», 52, 134-153 (1899); E. D. TAGG, *Surfaces which contain an irrational pencil of rational curves*. «Journ. London Math. Soc.», 14, 216-228 (1939).

(2) M. BALDASSARRI, *Su un criterio di riduzione per i sistemi algebrici di varietà*. «Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova», 19, 1-43 (1950).

(3) Si sottintende, ora e nel seguito, che i sistemi considerati siano immersi in uno spazio lineare ambiente SR , potendosi sempre, ad esempio, supporre: $R = r + p + 2$.

(4) F. ENRIQUES, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione di una equazione algebrica $f(x, y, z) = 0$ mediante funzioni razionali di due parametri*. «Math. Ann.», 49, 1-23 (1897), riassunto in: «Rend. Lincei» (5), 4, 311-316 (1895).

(5) Per le generalità occorrenti in questo lavoro, si può vedere la Memoria cit. in (2), ovvero consultare i trattati: B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, Bd. 2, Springer, Berlin, 1937; W. GRÖBNER, *Moderne Algebraische Geometrie*, Springer, Wien, 1949.

$K'[x_1, x_2, \dots, x_{r+1}]$, rispettivamente di gradi n ed m , tali che l'intersezione Δ_{r+1} delle varietà delle loro radici sia luogo di punti s -pli per il primo e semplicemente per il secondo; e denotiamo con V_r la varietà, di dimensione r , data sul corpo di funzioni algebriche $K'(x_1, x_2, \dots, x_{r+1}) \bmod f(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$. Supporremo che il polinomio $f(x)$ ⁽⁶⁾ sia assolutamente irriducibile e regolare ⁽⁷⁾ (cioè di grado n in ciascuna variabile).

Da qui fino al n. 6 dimostreremo allora il teorema seguente, nel cui enunciato compare l'espressione *varietà V_r generale rispetto alla condizione Δ* che sarà definita più avanti (n. 6):

TEOREMA I. — *Condizione sufficiente perchè una varietà V_r data sopra il corpo $K'(x) \bmod f(x)$, sia razionale sopra un corpo $K'(t_1, t_2, \dots, t_{r+1}) \bmod g(t)$, con $g(t)$ polinomio di grado $(n-1)$ in t_{r+1} , è che fra i numeri r , n ed s interceda la limitazione: $r+2-n/s > 0$.*

Se la varietà V_r è generale rispetto alla condizione Δ , tale limitazione è anche necessaria.

Il teor. I può anche venir enunciato come segue in puri termini algebrici:

Se $H \equiv K'(x) \bmod f(x)$ ha dimensione r ed $f(x)$ ha grado n , si possono trovare certi elementi t_1, t_2, \dots, t_{r+1} di K' , tali che risulti:

$$H \equiv K'(t) \bmod g(t),$$

con $g(t)$ di grado $(n-1)$ in t_{r+1} , qualora sia: $r+2-n/s > 0$.

Se il polinomio $f(x)$ è generale rispetto alla condizione Δ , tale limitazione è anche necessaria.

Per dimostrare il teor. I, è conveniente usare variabili omogenee. Sostituiamo perciò le (x) e le (u, v) con variabili omogenee ξ_i e v_i , dove $i = 0, 1, \dots, r+1$ e $j = 0, 1, 2$. I polinomi $f(x)$ ed $F(x)$ si riducono così a forme di ordini n ed m rispettivamente:

$$(1) \quad \begin{cases} f(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{r+1}) \equiv \sum \alpha_{i_0 i_1, \dots, i_{r+1}} \xi_0^{i_0} \xi_1^{i_1} \dots \xi_{r+1}^{i_{r+1}}, & (i_0 + i_1 + \dots + i_{r+1} = n), \\ F(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{r+1}) \equiv \sum \alpha'_{i_0 i_1, \dots, i_{r+1}} \xi_0^{i_0} \xi_1^{i_1} \dots \xi_{r+1}^{i_{r+1}}, & (i_0 + i_1 + \dots + i_{r+1} = m), \end{cases}$$

ove le α ed α' sono forme nelle v , di certi ordini v e v' rispettivamente, le v essendo vincolate dall'equazione:

$$\varphi(v_0, v_1, v_2) = 0,$$

dove ora φ è una forma, il cui ordine denotiamo con μ .

Introduciamo le $(r+2)$ quantità η_i :

$$(2) \quad \eta_i = \sum \beta_{j_0 j_1 j_2}^{(i)} v_0^{j_0} v_1^{j_1} v_2^{j_2}, \quad (i = 0, 1, \dots, r+1; j_0 + j_1 + j_2 = \rho),$$

dove ρ indica un numero intero e positivo, per ora indeterminato, e le β sono elementi di K pure del tutto indeterminati.

(6) Useremo spesso il simbolo (x) in luogo di $(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$, ed analoghi.

(7) Questa condizione non è restrittiva. Infatti, se non fosse soddisfatta, il teor. I che segue sarebbe evidente (cfr., più avanti, il n. 5).

La totalità delle forme d'ordine ρ nelle v sega, sulla curva $\varphi(v) = 0$, una serie lineare g^ω , di cui si possono scegliere ω gruppi linearmente indipendenti, ivi determinati da altrettante forme $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\omega$, con:

$$(3) \quad \omega = \mu(\rho + 2) - \binom{\mu + 1}{2};$$

coscicch  le η_i , date dalle (2), possono altres  esprimersi con le:

$$(4) \quad \eta_i = \sum_{k=1}^{\omega} \gamma_{ik} \psi_k(v_0, v_1, v_2), \quad (i = 0, 1, \dots, r+1),$$

le γ_{ik} essendo nuove indeterminate di K.

Si sostituiscano ora le η_i al posto delle ξ_i in $f(\xi)$ ed $F(\xi)$: si otterranno due forme nelle v di ordini rispettivamente $N = n\rho + v$ ed $M = m\rho + v'$. Proveremo che, se $r + 2 - n/s > 0$, esistono dei valori finiti e non tutti nulli delle γ_{ik} , tali che riesca:

$$(5) \quad f(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{r+1}) \equiv 0 \quad (\varphi(v)),$$

per valori abbastanza grandi di ρ .

2. Dimostriamo intanto che esistono tre forme $A(v)$, $B(v)$ e $\lambda(v)$ di ordini rispettivamente $N - q - 1$, $M - q - 1$, ed $M + N - q - \mu - 1$ ⁽⁸⁾, con q tale che $N = qs + s_1$ ($0 \leq s_1 < s$), soddisfacenti all'identit  nelle v :

$$(6) \quad A(v)f(v) + B(v)F(v) \equiv \lambda(v)\varphi(v).$$

A tal fine si osservi che la (6) conduce, eguagliando i coefficienti dei termini simili, a:

$$(7) \quad p = \binom{M + N - q + 1}{2}$$

equazioni nei coefficienti a_i, b_i, l_i e γ_{ik} , che compaiono rispettivamente nelle forme $A(v)$, $B(v)$, $\lambda(v)$ e nelle espressioni (4) delle η_i ; e che sono tutti indeterminati ed in numero totale ⁽⁹⁾ di:

$$(8) \quad h + 1 = \left\{ \mu(M - q + 1) - \binom{\mu + 1}{2} \right\} + \left\{ \mu(N - q + 1) - \binom{\mu + 1}{2} \right\} + \\ + \left\{ \binom{M + N - q - \mu + 1}{2} + (r + 2) \right\} \mu(\rho + 2) - \binom{\mu + 1}{2}.$$

Il sistema di quelle p equazioni pu  essere scritto nella forma

$$(9) \quad \chi_i(a; b; l; \gamma) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p);$$

esso definisce, in uno spazio affine $S_{p+1}[a; b; l; \gamma]$, una variet  \mathfrak{R} : quella delle radici dell'ideale $\mathfrak{I} = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_p)$, la quale non   vuota, perch  contiene almeno la radice $O = (0, 0, \dots, 0)$, come subito si verifica.

(8) Tali valori risultano certamente positivi, se ρ   abbastanza grande.

(9) Il numero delle γ , nella formula che segue,   il valore ω fornito dalla (3): per il numero delle a_i e delle b_i si   proceduto come, nel n. 1, per le γ .

3. Condizione sufficiente perchè il sistema (9) ammetta soluzioni, oltre quella già indicata in O, è, per noti risultati della teoria dell'eliminazione, che $h + 1 > p$. Con ciò resta infatti anche escluso che quelle soluzioni cadano tutte nell'iperpiano improprio dello spazio affine S_{h+1} , giacchè vi sarà, in tale ipotesi, una semplice infinità almeno di soluzioni, una cui componente irriducibile conterrà O (si tenga presente che O non può essere soluzione isolata ⁽¹⁰⁾), e perciò vi sarà su di essa tutto un intorno di O di soluzioni finite.

Occorre ancora, ai nostri fini, che esistano soluzioni con le γ_{ih} non tutte nulle. Si può facilmente soddisfare tale esigenza, prefissando un valore arbitrario non nullo per una determinata delle z_i : ciò infatti esclude che la forma $\lambda(v)$ possa essere identicamente nulla, e quindi lo stesso potrà dirsi della forma $\lambda(v) \varphi(v)$. Tanto basta per affermare, qualora si badi alla struttura della (6), che una eventuale soluzione ha ora certo qualche γ_{ih} non nulla.

In definitiva, per poter soddisfare tutte le condizioni volute, basta supporre che sia $h > p$; ossia, tenendo presenti le (7) ed (8), che sussista la disuguaglianza:

$$(10) \quad (r+2) \left\{ \mu(p+2) - \binom{\mu+1}{2} \right\} + \left\{ \mu(M-g+1) - \binom{\mu+1}{2} \right\} + \\ + \left\{ \mu(N-g+1) - \binom{\mu+1}{2} \right\} + \left\{ \mu(M+N-g+1) - \binom{\mu+1}{2} \right\} - 2 > 0.$$

L'espressione a primo membro risulta un polinomio di primo grado in p , con il coefficiente di p eguale a:

$$\sigma = r + 2 - n/s.$$

Pertanto, se $\sigma > 0$, esiste un p_0 tale che si possa soddisfare alla (6) per ogni $p > p_0$.

4. Dalla (6) segue subito che le curve $Af = 0$ e $BF = 0$, sul piano (v_0, v_1, v_2) , segano, sulla curva $\varphi(v) = 0$, uno stesso gruppo \mathfrak{S} di punti, dove qui \mathfrak{S} è inteso come gruppo delle intersezioni distinte, valutate ciascuna con la propria molteplicità d'intersezione ⁽¹¹⁾.

Se \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{A}' e \mathfrak{B}' denotano i gruppi di intersezione (A, φ) , (f, φ) , (B, φ) ed (F, φ) , risulta ⁽¹²⁾:

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'.$$

Qualora \mathfrak{A} ed \mathfrak{A}' non fossero primi fra loro, si dicano \mathfrak{A}^* ed $\mathfrak{A}^{*'} i due gruppi residui, purificati dall'eventuale sottogruppo comune. Sarà ancora:$

$$\mathfrak{A}^* + \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}^{*'} + \mathfrak{B}'.$$

(10) Cfr. ad esempio: F. SEVERI, *Lezioni di Analisi*, Bologna, Zanichelli, vol. 1, cap. 9, p. 411 (1933).

(11) Naturalmente s'intenderà per gli altri gruppi d'intersezione considerati in questo numero.

(12) Il segno \equiv è usato in questo numero nel senso d'identità (gruppo dell'eguaglianza rispetto allo zero assoluto). Cfr. ad esempio F. SEVERI, *Fondamenti di Geometria Algebrica*, Cedam, Padova, p. 48, n. 5 (1948).

Il gruppo \mathcal{A}^* , poichè non può essere contenuto (neppure parzialmente) in \mathcal{A}^* , dovrà essere contenuto in \mathcal{B} , e si avrà quindi la relazione fra gruppi effettivi:

$$\mathcal{B} - \mathcal{A}^{*'} \equiv \mathcal{B}' - \mathcal{A}^*.$$

Ma \mathcal{B} contiene almeno $N\mu$ punti, ed $\mathcal{A}^{*'}$ al più $(N - q - 1)\mu$ punti ⁽¹³⁾, talchè $\mathcal{B} - \mathcal{A}^{*'}$ contiene almeno $\mu(q + 1)$ punti.

Si può dunque dire che esiste un gruppo $\mathfrak{N} \equiv (M_1^{h_1}, M_2^{h_2}, \dots, M_q^{h_q})$, con $\sum h_i \equiv \mu(q + 1)$, tale che nel punto M_d ($d = 1, 2, \dots, q$) sia le curve $F(v) = 0$, $\varphi(v) = 0$ che le $f(v) = 0$, $\varphi(v) = 0$ hanno almeno molteplicità d'intersezione h_d .

Al punto M_d del piano (v_0, v_1, v_2) resta associato - mediante le (4) - un punto $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{r+1})$, giacente sia sulla forma $f(\xi) = 0$ che sulla $F(\xi) = 0$, e quindi situato sulla varietà Δ loro intersezione. Ma questa è luogo di punti s -pli per la $f(\xi) = 0$ e semplici per la $F(\xi) = 0$, cosicchè le curve $f(v) = 0$ e $\varphi(v) = 0$ avranno nel punto M_d molteplicità d'intersezione eguale almeno ad sh_d . Si conclude che queste due curve hanno in comune complessivamente almeno $\mu(q + 1)s$ punti (distinti o no).

D'altra parte è: $\mu(q + 1)s = \mu((N - s_1)/(s) + 1)s > N\mu$. Tanto basta, notoriamente, per la validità della relazione (5).

5. Tutto ciò può riassumersi dicendo che, se $\sigma = r + 2 - n/s > 0$, è possibile determinare, razionalmente su K' , un punto della V_r . È lecito supporre, assumendo ρ sufficientemente grande, che tale punto non cada costantemente sulla varietà multipla Δ .

Infatti, affinchè ciò non accada, basta che una specializzazione di quel punto fatta su K' non cada su Δ : e, per questo, basta aggiungere al sistema delle (9) le $(r + 2)$ equazioni lineari nella γ_{ik} esprimenti che la curva (4) passa per un dato punto di \bar{V}_r , che non stia su $\bar{\Delta}$, dove \bar{V}_r e $\bar{\Delta}$ indicano date specializzazioni di V_r e Δ su K' . Ciò equivale a considerare una sezione della varietà \mathcal{R} con uno spazio lineare opportuno dello S_{h+r} ; e questa - in base a ciò che precede - non è certamente vuota se $\rho > \bar{\rho}_0 > \rho_0$, con $\bar{\rho}_0$ opportuno intero, convenientemente grande.

Tornando a variabili non omogenee, sia (x') il punto dianzi determinato. Poniamo in $f(x): x = z - x'$, dove le z sono nuove variabili. La $f(x)$ si trasformerà in un polinomio $h(z)$ nelle z , privo del termine costante, con i coefficienti in K' . Assumiamo inoltre:

$$t_i = z_i / z_{r+1} \quad \dots \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Poichè le t appartengono ad H , si ha:

$$K'(t_1, t_2, \dots, t_r) \subseteq K'(x_1, x_2, \dots, x_{r+1}).$$

(13) Invero tale numero non potrebbe risultare infinito, senza che si avesse: $B(v) \equiv \alpha(v)\varphi(v)$; ma allora dalla (6) conseguirebbe senz'altro la (5).

Il polinomio $h(z)$ si può poi scrivere nella forma $z_{r+1} \cdot g(t_1, t_2, \dots, t_r, z_{r+1})$, dove $g(t; z_{r+1})$ ha grado $(n-1)$ in z_{r+1} ; se, per simmetria, si scrive $z_{r+1} = t_{r+1}$, si può dire che t_{r+1} è algebrico di grado $(n-1)$ sul corpo $K'(t_1, t_2, \dots, t_r)$, il quale è una estensione trascendente pura di K' di dimensione r . Ma è anche:

$$K'(t_1, t_2, \dots, t_{r+1}) \subseteq K'(x_1, x_2, \dots, x_{r+1});$$

e poichè $z_{r+1} \in K'(t)$, a questo corpo appartengono pure le z , e quindi le x , e si ha:

$$K'(t) \subseteq K'(x) \subseteq K'(t),$$

cioè:

$$K'(x) \bmod f(x) \equiv K'(t) \bmod g(t).$$

Abbiamo così provato la prima parte del teor. 1.

6. Per dimostrare la necessità della condizione espressa nel teor. 1, si supponga che la V_r , data su K' , ammetta un sistema Σ , di dimensione k , di curve ψ unisecanti, associato ad un qualunque valore sufficientemente grande di ρ .

È allora certo che la varietà \mathcal{R} , considerata al n. 2, ammette, per ogni ρ siffatto, almeno ∞^k suoi punti con le γ_{ik} non tutte nulle. Si pensino ora sostituite ai coefficienti delle $\chi_i(a; b; l; \gamma)$, arbitrarie quantità di K , di modo che le ipersuperficie $\chi_i = 0$ descriveranno, al variare di esse, certi sistemi lineari Σ_i entro lo S_{h+1} ; e sia $\bar{\mathcal{R}}$ la generica varietà intersezione, certo effettiva, così ottenuta.

Noi diremo allora che:

La varietà V_r , data su K' , è generale rispetto alla condizione Δ , se la dimensione k inerente al sistema Σ , per il generio ρ , non supera quella di $\bar{\mathcal{R}}$.

È facile verificare che siffatta nozione di generalità non dipende dalla forma F . Infatti si possono sempre estrarre $(h+1)$ forme, una da ogni Σ_i , in maniera che la dimensione della $\bar{\mathcal{R}}$ risulti regolare, cioè uguale ad $h+1-p$, e la V_r sarà quindi generale rispetto a Δ se $k \leq h+1-p$: limitazione che dipende soltanto da dati numerici intrinseci della forma $f(x)$.

Si può altresì affermare che, nella nostra ipotesi di generalità, dovrà essere $h+1-p > 0$. Tenendo conto delle formule (7) ed (8), si vede che $h+1-p$ è un polinomio di primo grado in ρ con termine noto negativo. Occorre dunque supporre positivo il coefficiente di ρ nel polinomio stesso, ossia $\sigma = r+2-n/s > 0$, come appunto volevasi dimostrare.

7. Dal teor. 1 seguono alcuni criteri che possono essere utili per trasformare birazionalmente una forma M_{r+1} ⁽¹⁴⁾, luogo di una ∞^1 di varietà V_r , in un'altra M_{r+1}^* di tipo più semplice.

Poichè, qualora si conosca una curva unisecante le V_r , la questione procede secondo un ben noto schema di dimostrazione, come può, ad

(14) Usiamo addirittura il termine *forma* perchè la dimensione dello spazio ambiente è qui irrilevante.

esempio, vedersi nei lavori citati in (1) e (2), ci limiteremo qui ad enunciare i teoremi più notevoli ottenibili in tal guisa.

TEOREMA 2. - Sia M_{r+1} una forma tale che:

a) essa contenga un fascio (razionale o no) di varietà V ad r dimensioni e d'ordine n ;

b) la generica di queste V_r possessa una varietà s -pla Δ $(r-1)$ -dimensionale;

c) la varietà Δ sia intersezione completa della varietà V con un'altra varietà ad r dimensioni che la contenga semplicemente.

Condizione sufficiente affinché M_{r+1} sia birazionalmente trasformabile in un'altra forma M'_{r+1} , $(n-1)$ -pla, contenente un fascio di spazi lineari S_r , su cui si rappresentino le V_r , è che sia:

$$r + 2 - n/s > 0.$$

Se la V_r^n è generale rispetto alla condizione Δ , questa limitazione fornisce anche una condizione necessaria.

TEOREMA 3. - Se, ferme restando le ipotesi a), b), c) del teorema precedente, la conoscenza di un numero finito di punti della generica V_r^n permette di rappresentarla sopra uno spazio S_r semplice, senza introdurre ulteriori irrazionalità nei coefficienti, la limitazione $r + 2 - n/s > 0$ è addirittura sufficiente perchè la M_{r+1} sia linearmente ⁽¹⁵⁾ trasformabile in un cono semplice luogo di $\infty^1 S_r$ (in particolare uno S_{r+1} se il fascio di V_r^n è razionale).

Tralasciamo di riportare gli enunciati analoghi, con le ovvie modificazioni occorrenti, riguardanti il caso che il sistema ∞^1 delle V_r abbia indice > 1 ⁽¹⁶⁾.

8. Per l'applicazione dei teoremi 1, 2, 3, non sarà superfluo osservare che, se in un caso concreto si trova che la limitazione $r + 2 - n/s > 0$ è soddisfatta, si potrà senz'altro affermare che esiste un insieme Σ di curve unisecanti (d'ordine abbastanza elevato); se invece risulta $r + 2 - n/s \leq 0$, occorrerà indagare se la V_r del caso in esame sia o no generale rispetto a Δ . Nella prima di queste alternative si potrà affermare che non esistono curve unisecanti; nella seconda, invece, nulla si potrà dire in merito a tale esistenza, ed il problema esigerà indagini ulteriori.

Diamo, terminando, alcuni esempi nei quali quella condizione sufficiente è soddisfatta, i quali ci permetteranno di migliorare la nota classificazione delle V_3 con un fascio di superficie razionali.

F. Enriques, in un importante lavoro ⁽¹⁷⁾, classificò tali V_3 ; ma, come egli stesso avverte, non in modo definitivo. Le lacune più ampie (e, forse,

(15) L'avverbio *linearmente* è qui da intendersi nel senso che la generica V_r si rappresenta sopra uno S_r del cono. Cfr. Mem. cit. in (2).

(16) Cfr. a tal proposito il lavoro del TAGG citato in (1) e la Mem. cit. in (2). I precedenti risultati possono venir accostati a quelli classici di G. HUMBERT (*Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*. « Journ. de Math. », 10, 169 (1894)) e G. CASTELNUOVO (*Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica*. *Memorie scelte*, Zanichelli, 1937, p. 123).

(17) Mem. cit. in (4).

le uniche) si hanno nel cosiddetto caso della 2^a famiglia, che comprende le V_3 con un fascio di superficie razionali a curve-sezioni ellittiche. L'Autore elenca ivi tutti i tipi possibili, meno quelli corrispondenti ai valori $n = 5, 7, 8$ dell'ordine della superficie variabile F^n ; i quali sono d'immediata razionalità, giungendo ai seguenti tipi:

1° lo S_3 semplice;

2° lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'ordine $2m$ con retta ($2m - 4$)-pla;

3° la V_3^m dello S_4 , con piano ($m - 3$)-plo;

4° la V_3^m dello S_4 , con piano ($m - 6$)-plo;

5° la V_3^m dello S_4 , con piano ($m - 9$)-plo.

Tali tipi non sono però tutti birazionalmente distinti, come provano le seguenti osservazioni:

a) Nel caso 3°, esiste una curva unisecante il fascio. Basta infatti applicare il teor. 1 per $r = 2$, $n = 3$ ed $s = 1$, dopo aver osservato che ora è $\sigma = r + 2 - n/s = 1 > 0$. Pertanto, in virtù del teor. 2, si ricade nel caso 2°.

b) Nel caso 4°, la generica F_2^6 contiene una curva del nono ordine Δ_1^9 , doppia per essa e semplice per la superficie cubica aggiunta alla F_2^6 ; tale Δ_1^9 è precisamente l'intersezione completa della F_2^6 con quell'aggiunta. Si può dunque ancora applicare il teor. 1, con $r = 2$, $n = 6$ ed $s = 2$, e si trova $\sigma = 1 > 0$. Quindi esiste un'unisecante; e poichè la F_2^6 , noto un suo punto, si rappresenta sopra un piano senza introdurre alcuna ulteriore irrazionalità nei coefficienti, si ricade, per il teor. 3, nel caso 1°.

c) Nel caso 5°, la generica F_2^9 del fascio possiede una curva doppia, d'ordine ventisette; ma ciò non è più di per sè sufficiente ad operare la riduzione. Qualora si potesse trasformare, razionalmente nei coefficienti, la F_2^9 in una F_2^{*9} a curve sezioni ellittiche con curva multipla a componente tripla, anche questo caso ricadrebbe in 1°. All'uopo occorrerebbe però, un'opportuna indagine sulle superficie F_2^9 dello S_3 , proiezioni della superficie normale dello S_9 , la quale esula dagli scopi di questo lavoro.

Tenendo conto dei risultati di F. Enriques, si può così concludere con un teorema che fornisce la classificazione, probabilmente definitiva, delle V_3 in discorso (a prescindere eventualmente dal caso dubbio dianzi segnalato in c).

TEOREMA 4. — *Una varietà a tre dimensioni, con un fascio lineare di superficie razionali, si può birazionalmente trasformare, escluso il caso ch'essa possieda un fascio di F_2^9 (a curve sezioni ellittiche e con una curva multipla non più che doppia):*

1° nello S_3 semplice, oppure

2° in un S_3 doppio con superficie di diramazione di uno dei tre tipi seguenti:

a) d'ordine $2m$ con retta ($2m - 4$)-pla;

b) d'ordine $2m$ con punto ($2m - 2$)-plo;

c) d'ordine $2m$ con due punti prossimi ($2m - 3$)-pli.

Geometria. — *Osservazioni sul gruppo dei punti $(k+1)$ -pli di una g_n^k sopra una curva algebrica.* Nota di FRANCESCO GHERARDELLI, presentata (*) dal corrisp. B. SEGRE.

1. I gruppi dei punti $(k+1)$ -pli delle g_n^k estratte da una g_n^r , gruppi che chiameremo k -jacobiani, sono fra loro equivalenti ma, in generale, appena sia $r > k+1$ (1), non costituiscono da soli una serie lineare: infatti essi formano una totalità che, generalmente, è in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con la totalità degli $[r-k-1]$ di $[r]$. Tale affermazione vale però soltanto in generale; infatti, per esempio, i gruppi k -jacobiani delle g_n^k estratte dalla g_n^n completa di tutti i gruppi di n punti di una retta, costituiscono da soli la serie lineare $g_{(k+1)(n-k)}^{(k+1)(n-k)}$ pure completa.

Le curve e le serie lineari per cui avviene che i gruppi jacobiani delle g_n^r da esse estratte costituiscano da soli una serie lineare, sono state completamente determinate (2). Scopo principale di questa Nota è l'estensione a valori qualsiasi di k dei risultati noti per $k=1$.

2. Si può seguire passo passo la dimostrazione tenuta per $k=1$ dagli Autori citati. Supponiamo, per semplicità, che la g_n^r sia semplice (3) e priva di punti fissi e consideriamone l'immagine proiettiva, C . Indicando con λ ($\lambda \cong (k+1)(r-k)$) l'ordine del gruppo k -jacobiano, G_λ , di una g_n^k estratta dalla g_n^r , è subito visto che, su C , λ punti costituiscono un gruppo G_λ se, e soltanto se, i $[k]$ osculatori in essi alla curva incontrano uno stesso $[r-k-1]$ ossia appartengono ad un medesimo complesso lineare speciale di $[k]$. Ora, i complessi lineari di $[k]$ di $[r]$ segnano sulla V_{k+1} dei $[k]$ osculatori di C una serie lineare di gruppi di $[k]$, d'ordine λ : i gruppi dei relativi punti di contatto formano su C una serie lineare della quale fanno parte i gruppi G_λ . Anzi, fra le serie lineari d'ordine λ contenenti i G_λ , questa ha la dimensione minima. Infatti, la varietà dei complessi lineari speciali, appartiene al sistema lineare di tutti i complessi lineari di $[k]$ di $[r]$; in altre parole, ogni complesso lineare di $[k]$ è combinazione lineare di complessi lineari speciali, come subito si riconosce dalla sua equazione. Da questo segue che, se i $[k]$ osculatori della curva C appartengono ad un sistema lineare Σ

(*) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) Se $r = k+1$, i k -jacobiani formano la serie lineare reciproca dalla data g_n^{k+1} ; cfr. B. SEGRE, *Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti*. «Mem. Lincei», ser. VI, vol. 2, pp. 578-592 (1928).

(2) Cfr. G. GHERARDELLI, *Un'osservazione sulla serie Jacobiana di una serie lineare*. «Rend. Lincei», ser. VI, vol. 6, p. 286 (1927), e B. SEGRE, loc. cit., in (1).

(3) I ragionamenti che seguono valgono però anche, con ovvie modificazioni, per le g_n^r composte.

di complessi lineari di $[k]$ di dimensione $t_r - 1$, i gruppi G_k costituiscono da soli una serie lineare se:

$$t_r = \binom{r+1}{k+1} - (k+1)(r-k) - 1.$$

E si può aggiungere che t_r è il massimo numero di complessi lineari di $[k]$ l. i. (linearmente indipendenti), in cui possono stare i $[k]$ osculatori di una curva appartenente ad $[r]$. Quando ciò avvenga, gli $[r-k-1]$ appoggiati a $(k+1)(r-k)[k]$ osculatori della curva C incontrano tutti i medesimi $\lambda - (k+1)(r-k)[k]$ osculatori di C ; cosicchè l'insieme dei G_k viene riferito birazionalmente, senza eccezioni, non già all'insieme degli $[r-k-1]$ di $[r]$ (come avviene in generale), ma ai gruppi di una involuzione lineare di tali $[r-k-1]$. L'ordine di tale involuzione, eguale al numero degli $[r-k-1]$ che si appoggiano a $(k+1)(r-k)[k]$, è dato, per una formula di H. Schubert ⁽⁴⁾, da:

$$\frac{1!2!\dots(r-k-1)![(r-k)(k+1)]!}{(k+1)!(k+2)!\dots r!}.$$

È anche facile ottenere la caratterizzazione invariante delle curve C , profittando dei risultati di B. Segre contenuti nella Memoria citata in ⁽¹⁾.

Supponiamo dapprima che r assuma il valore minimo, $k+2$, compatibile con le nostre ipotesi ($r > k+1$, $k > 1$). Assoggettando la curva C ad una reciprocità di $[r]$ in sè, ad essa, come inviluppo dei suoi $[k]$ osculatori, corrisponde una curva C' , inviluppo delle sue rette tangenti, la quale appartiene a t_{k+2} complessi lineari di rette l. i. : C' è una C^{k+2} birazionale normale ⁽⁵⁾ e tale risulta pertanto anche la C .

Sia ora $r > k+2$. Osserviamo che un punto P di $[r]$ è punto totale ⁽⁶⁾ per un complesso lineare di $[k]$, cioè tutti i $[k]$ per P appartengono al complesso, appena che questo contenga $\binom{r}{k}[k]$ generici per P . Infatti, la varietà dei $[k]$ per P si rappresenta sulla grassmanniana V dei $[k]$ di $[r]$ con una grassmanniana d'indici $(r-1, k-1)$ appartenente ad un $\left[\binom{r}{k} - 1\right]$ ⁽⁷⁾. Da questa osservazione segue che, se P è un punto generico di C , un complesso lineare di Σ ammetterà P come punto totale quando contenga $\binom{r}{k} - (k+1)[k]$ generici per P , posto che tutti i complessi di Σ già contengono i $k+1[k]$ osculatori successivi di C di cui P è intersezione e che tali

(4) Cfr. H. SCHUBERT, *Anzahl-Bestimmung für lineare Räume beliebiger Dimension*. «Acta Math.», t. 8, p. 97 (1886).

(5) Cfr. B. SEGRE, loc. cit: in (1), p. 582.

(6) Locuzione di C. SEGRE; cfr. C. SEGRE, *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni*. «Ann. di Mat.» (3), 27, p. 93 (1918).

(7) F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare*. «Ann. di Mat.» (3), 24, pp. 89-120 (1915) oppure *Memorie Scelte*, vol. I (Bologna, Zuffi, 1950) pp. 405-440.

$k+1$ $[k]$ si rappresentano su V con $k+1$ punti l. i. ⁽⁸⁾. Se quindi proiettiamo la curva C da un suo punto generico su di un $[r-1]$ generico di $[r]$ si ottiene una curva \bar{C} appartenente a:

$$\binom{r+1}{k+1} - (k+1)(r-k) - 1 - \binom{r}{k} + k + 1 = \binom{r}{k+1} - (k+1)(r-k-1) - 1 = t_{r-1},$$

complessi lineari di $[k]$ l. i.; ossia, \bar{C} gode della stessa particolarità di C , tenuto conto del suo spazio di appartenenza. Proiettando allora C su di un $[k+2]$ generico di $[r]$, da un $[r-k-3]$, $(r-k-2)$ -secante la C stessa, si ottiene in $[k+2]$ una C^{k+2} birazionale normale: C è una curva birazionale normale di $[r]$ ⁽⁹⁾.

3. Il gruppo k -jacobiano di una serie lineare g_n^k ($k > 1$) si comporta anche sotto altri punti di vista come il gruppo jacobiano di una g_n^1 . Si può, ad esempio, con facile estensione di quanto è stato fatto per le g_n^1 da F. Severi ⁽¹⁰⁾, caratterizzare le g_n^k con lo stesso gruppo k -jacobiano.

Sulla curva piana $f(x, y) = 0$, di ordine m e genere p , dotata di soli nodi e in posizione generica rispetto agli assi, consideriamo due funzioni razionali, $\Phi(x, y)$ e $\Psi(x, y)$, dello stesso ordine n , dipendenti entrambe da $k-1$ parametri e con lo stesso gruppo k -jacobiano:

$$\Phi(x, y) = \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_{k-1} \varphi_{k-1},$$

$$\Psi(x, y) = \psi_0 + \mu_1 \psi_1 + \dots + \mu_{k-1} \psi_{k-1},$$

dove tutte le φ_i [ψ_i] ($i = 0, 1, \dots, k-1$) hanno lo stesso gruppo di poli $G_n[\bar{G}_n]$.

Se le due funzioni razionali Φ e Ψ definiscono due distinte g_n^k , queste, certo prive di gruppo comune, chè altrimenti coinciderebbero, possono oppur no appartenere ad una stessa g_n . Nel primo caso la g_n^{2k+1} congiungente le due g_n^k ha per immagine proiettiva una curva (semplice o multipla) i cui $[k]$ osculatori appartengono ad almeno un complesso lineare di $[k]$. Nel secondo caso, considerando i wronskiani W_Φ di $\frac{d\varphi_0}{dx}, \frac{d\varphi_1}{dx}, \dots, \frac{d\varphi_{k-1}}{dx}$ e W_Ψ di $\frac{d\psi_0}{dx}, \frac{d\psi_1}{dx}, \dots, \frac{d\psi_{k-1}}{dx}$ ⁽¹¹⁾, e quindi la funzione razionale $\Theta = \frac{W_\Phi}{W_\Psi}$,

(8) $k+1$ punti successivi della curva K , che rappresenta su V gli ∞^1 $[k]$ osculatori di C , sono generalmente indipendenti; infatti la curva K è contenuta in uno spazio di dimensione $(r-k)(k+1)$ e non inferiore, perchè i $[k]$ osculatori di C non possono essere contenuti in più di t_r complessi lineari di $[k]$ l. i.

(9) È opportuno rilevare che le conclusioni ottenute per $k > 1$ sono notevolmente più semplici di quelle che si hanno per $k = 1$ (cfr. B. SEGRE, loc cit. in (1), p. 592).

(10) Nella Memoria: *La serie canonica* ecc. «Commentarii Math. Helvetici», vol. 4, p. 268 (1932).

(11) Il wronskiano W_Φ (e similmente W_Ψ) è una funzione razionale del punto corrente su f , il cui gruppo degli zeri è costituito dal gruppo k -jacobiano della g_n^k $\Phi(x, y) = \text{cost.}$ e dal gruppo G_m dei punti all'infinito di f , che sono zeri $k(k+1)$ -pli per W_Φ ; il gruppo dei poli di W_Φ essendo invece formato dal gruppo jacobiano della funzione razionale x , contato $\frac{k(k+1)}{2}$ volte, e dal gruppo, G_m , dei poli delle φ_i ($i = 0, 1, \dots, k-1$) contato $k+1$ volte (cfr. M. DE-FRANCHIS, *Sul gruppo jacobiano di una serie lineare*. «Rend. Circ. Mat. di Palermo», t. 34, p. 165 (1912)).

risulta che sono equivalenti i multipli secondo $k+1$ dei gruppi delle due g_n^k . In questo caso si ha inoltre $n \geq k+3$ e se $n = k+3$, $p = 1$ o anche $p = 2$ se $k \geq 3$ ⁽¹²⁾. Infatti due g_{k+1}^k con lo stesso k -jacobiano coincidono; se poi $n = k+2$ o $n = k+3$, si verifica subito l'asserto aggiungendo alle due g^k lo stesso gruppo di $k-1$ punti fissi, P_1, P_2, \dots, P_{k-1} , e considerando il numero (certamente finito) dei gruppi di $2k$ punti comuni alle due $g^k + \sum_{i=1}^{k-1} P_i$.

Da questo segue che, esclusi i due casi eccezionali ora specificati, una funzione razionale del punto di una curva, dipendente da $k-1$ parametri, è determinata dal suo gruppo k -jacobiano, a meno di una sostituzione lineare fratta a coefficienti costanti.

Geometria. — *Sulle V_3 algebriche che contengono un sistema lineare di superficie di genere lineare $p^{(1)} \leq 1$.* Nota di LEONARD ROTH, presentata ^(*) dal Corrisp. B. SEGRE.

È classico il risultato che ogni superficie algebrica contenente un fascio di curve razionali oppure una rete di curve ellittiche è razionale o riferibile ad una rigata. Per una V_3 algebrica sono noti alcuni risultati analoghi, sebbene meno precisi, relativi al caso in cui la V_3 contenga un sistema lineare, di dimensione appropriata, di superficie appartenenti ad una delle seguenti categorie:

- (i) superficie razionali ⁽¹⁾;
- (ii) superficie regolari a generi $p_g = p_a = 0$, $p^{(1)} = 1$ ⁽²⁾;
- (iii) superficie regolari con tutti i generi uguali ad uno ⁽³⁾.

Nella presente Nota vengono studiate le V_3 contenenti altri sistemi lineari di superficie in qualche senso analoghe alle curve razionali od ellittiche, e cioè quelle a genere lineare assoluto $p^{(1)} \leq 1$ ⁽⁴⁾. Risulta così fra l'altro che, in generale, basta conoscere su una V_3 una rete di tali superficie, a curva caratteristica semplice, per poter concludere che V_3 appartiene a certe classi di varietà birazionalmente ben definite.

(12) Per $k = 1$ cfr. G. GHERARDELLI, *Sulle serie lineari semplicemente infinite con lo stesso gruppo jacobiano*. « Rend. Lincei », ser. VI, vol. 21, p. 261 (1935).

(*) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) F. ENRIQUES, « Math. Annalen », 49, 1 (1897); M. BALDASSARRI, « Rend. Sem. Mat. Padova », 20, 135 (1951); L. ROTH, « Rend. Acc. Lincei » (8), 12, 66 (1952). Per un resoconto dei risultati finora conseguiti, ved. L. ROTH, « Rend. di mat. » (5), 10, 297 (1951).

(2) G. FANO, « Mem. Acc. dei XL » (3), 24, 41 (1938); L. ROTH, « Rend. Acc. Lincei » (8), 12, 265-269 (1952). Si tratta di V_3 aventi tali superficie per sezioni iperpiane: esse risultano unirazionali o birazionali.

(3) G. FANO, « Mem. Acc. Italia », 8, 23 (1937); L. ROTH, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », 48, 233 (1952).

(4) Nel caso $p^{(1)} < 1$, la superficie è riferibile ad una rigata di genere $p > 0$, ove $p^{(1)} = 1 - 8(p - 1)$. Se $p^{(1)} = 1$, la superficie è riferibile ad una rigata (ellittica) o no, secondochè $p_{12} = 0$ o $p_{12} > 0$.

1. Consideriamo anzitutto una varietà V algebrica a tre dimensioni, priva di singolarità, sulla quale sia data una rete $|R|$ di superficie irriducibili e riferibili a rigate di genere $p > 0$, tale che la R generica sia anch'essa priva di singolarità. La curva caratteristica di $|R|$ può essere semplice o composta; in quest'ultimo caso supporremo che non si componga colle curve γ razionali generatrici delle R .

Per il punto P generico di V passano ∞^1 curve γ , che costituiscono un sistema irriducibile e razionale, in quanto esse sono in corrispondenza biunivoca colle superficie del fascio di $|R|$ avente P per punto base semplice; tali curve generano una superficie A irriducibile la quale, secondo una terminologia più volte adoperata⁽⁵⁾, risulta birazionale in $K(P)$. Ora, fissata una curva γ_0 , costruiamo le superficie A corrispondenti ai punti P di essa; allora possono soltanto presentarsi le seguenti due possibilità:

1° A varia con P ; in questo caso la A descrive un fascio $|A|$ lineare.

2° A non varia con P ; allora le ∞^2 curve γ passanti per i punti P di γ_0 riempiono un'unica superficie A .

Nel caso 1° le ∞^2 curve γ , ciascuna delle quali sega γ_0 in un punto P semplice per γ , invadono V ; e siccome ogni γ è birazionale in $K(P)$, discende che V è unirazionale: se, in particolare, tale sistema di curve ha l'indice uno, V risulta birazionale.

Nel caso 2° (che può verificarsi soltanto se P è semplice per A), muovendo γ_0 sopra una superficie R , otteniamo un sistema $\{A\}$ che ha evidentemente l'indice uno, ed è precisamente un fascio di genere p . Ogni superficie A contiene una rete $|\gamma|$, segata su essa da $|R|$.

Osserviamo che, se la curva caratteristica di $|R|$ è semplice, R risulta generica nel senso di Castelnuovo-Enriques, il che implica che V abbia irregolarità superficiale $q_2 = p$: allora deve verificarsi il caso 2°. Siccome nel caso 1° R non può essere generica (poiché V è allora superficialmente regolare), segue che $|R|$ dev'essere a curva caratteristica composta. Pertanto:

Se la curva caratteristica di $|R|$ è semplice, V è luogo di un fascio, di genere p , di superficie birazionali in $K(P)$; se essa è composta, o V è generata da un tale fascio, oppure risulta unirazionale.

Risultati consimili, ma - a quanto pare - non maggiormente espressivi possono conseguirsi nel caso in cui in luogo di $|R|$ si consideri un sistema lineare, di dimensione maggiore, di superficie riferibili a rigate. Se, per esempio, tale sistema ha dimensione 3, per il punto P generico di V passano ∞^2 superficie R , ed allora vi sono due possibilità da considerare:

1) Per P passano ∞^2 curve γ , formanti un sistema irriducibile e razionale che invade V , in quanto generano una rete di $|R|$. Se $v (> 0)$ denota il numero di queste curve che passano per un punto Q assegnato di V , abbiamo che V è rappresentabile sopra una involuzione I_v di S_3 .

2) Può darsi invece che per P passino soltanto ∞^1 curve γ ; allora si è ricondotti alle due possibilità discusse dianzi.

(5) L. ROTH, « Rend. Acc. Lincei » (8), 9, 62 (1950).

In ogni caso, dunque, risulta che V è o unirazionale oppure luogo di un fascio, di genere p , di superficie razionali; e, qualora la superficie R sia generica, vale questa seconda alternativa.

2. Supponiamo ora che V contenga un sistema $|F|$ lineare di superficie a genere lineare assoluto $p^{(1)} = 1$, restando immutate le rimanenti ipotesi. È noto ⁽⁶⁾ che la classificazione di tali superficie dipende, in primo luogo, dal valore del plurigenere p_{12} , il quale, per i tipi non riferibili a rigate (ellittiche), risulta sempre positivo; e che, all'infuori di due classi aventi $p_g = 1$, tutte le superficie contengono (almeno) un fascio, razionale od irrazionale, di curve ellittiche. Le classi eccezionali sono costituite dalle:

- a) superficie regolari con tutti i generi uguali ad uno;
- b) superficie irregolari iperellittiche, aventi $p_g = 1$, $p_a = -1$.

Anche tra queste vi sono tipi particolari che contengono fasci di curve ellittiche; anzi, nel caso b), se ne contengono uno, debbono contenerne due, entrambi ellittici.

Dalle citate ricerche discende che, se V contiene un sistema $|F|$ abbastanza ampio di superficie della classe a), la V risulta unirazionale o (in particolare) birazionale. Nella maggior parte dei casi in cui $|F|$ è semplice, si perviene rapidamente a questa conclusione osservando che le superficie di $|F|$ che hanno un punto triplo proprio in un punto assegnato generico di V sono irriducibili e razionali, e poi applicando loro i risultati già acquisiti per siffatte superficie.

Anche nel caso b) si possono ottenere risultati parziali in modo analogo, poggiando sul n. 1. Se il sistema $|F|$ è semplice e di dimensione abbastanza ampia, un suo sotto-sistema dotato di punto triplo base deve aver i generi $p_g = 0$, $p_a = -2$, ed è quindi costituito da superficie riferibili a rigate. Però, non volendo fermarci su questa discussione, che d'altronde difficilmente riuscirebbe esauriente, passiamo ai casi rimanenti in cui F contenga almeno un fascio di curve ellittiche.

3. Se F è una superficie avente i caratteri $p^{(1)} = 1$, $p_{12} > 0$, e non appartenente nè alla classe (ii) del n. 1 nè alle classi a) e b) del n. 2, essa contiene un unico fascio, razionale od irrazionale, di curve ellittiche, tranne nel caso in cui F sia ellittica, con $p_g = 0$, $p_a = -1$, $p_{12} = 1$, e quindi possenga due fasci, uno lineare e l'altro ellittico, di curve ellittiche. Tutte le altre superficie aventi $p_g = 0$, $p_a = -1$, contengono soltanto un fascio lineare di curve ellittiche. In ogni caso, dunque, resta individuato su F un fascio di curve ellittiche — diciamole γ — di un certo ordine n .

Supponiamo che V contenga una rete $|F|$ di tali superficie, la cui curva caratteristica non sia composta colle γ ; in questa ipotesi, per il punto P generico di V passano ∞^1 curve γ , formanti un sistema irriducibile e

(6) F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche* (Bologna, 1949), cap. XI. Per uno studio di alcuni tipi regolari aventi $p^{(1)} = 1$, ved. F. GAETA, « Rend. Acc. dei XL » (4), 2, 1 (1951).

razionale. Sulla curva generica di questo sistema determiniamo il *coniugato* Q di P , e cioè l'unico punto tale che $(n-1)P + Q$ sia un gruppo di punti segati sulla curva dagli iperpiani dello spazio ambiente. Evidentemente il luogo di Q è una curva, $V_1(P)$, irriducibile e birazionale in $K(P)$.

Ora, costruendo la curva analoga $V_1(P')$ per ogni singolo punto P' di $V_1(P)$, possono presentarsi due casi:

1) $V_1(P')$ varia con P' ; allora il luogo di $V_1(P')$ è una superficie $V_2(P)$, unirazionale in $K(P)$.

2) $V_1(P')$ non varia con P' .

Si può dimostrare ⁽⁷⁾ che il caso 2) può verificarsi soltanto se $V_1(P)$ non passa per P ; allora $V_1(P')$ dev'essere distinta da $V_1(P)$. Discende poi che in quel caso le curve $V_1(P)$ formano su V una congruenza del primo ordine, unisecante le superficie di $|F|$; il che significa che V è birazionalmente equivalente ad un cono proiettante F da un punto esterno, e quindi ⁽⁸⁾ non è unirazionale.

Proseguendo colla discussione del caso 1), costruiamo le ∞^2 curve $V_1(P'')$ relative ai punti P'' di $V_2(P)$; allora vi sono da considerare due possibilità:

3) Le curve così ottenute invadono V ; quindi risulta (come al n. 1) che V è unirazionale in $K(P)$.

4) Muovendo P'' su $V_2(P)$, si trova invece che le curve $V_1(P'')$ riempiono una superficie $V_2(P'')$; tale superficie non può coincidere con $V_2(P)$, perchè allora tutte le ∞^3 curve γ corrispondenti ai punti di $V_2(P)$ verrebbero a giacere su $V_2(P)$. Si dimostra facilmente ⁽⁹⁾ che in questo caso V è luogo di un fascio ellittico di superficie $V_2(P)$ unisecanti le γ ; e, siccome abbiamo osservato che $V_2(P)$ è unirazionale in $K(P)$, discende che V è allora rappresentabile sul prodotto d'una superficie $V_2(P)$ con una curva γ .

Riassumendo, se V contiene una rete $|F|$ di superficie soddisfacenti alle ipotesi del presente numero, deve presentarsi uno dei casi seguenti:

1° V è unirazionale in $K(P)$.

2° V è luogo d'una congruenza del primo ordine di curve razionali unisecanti le F , ed è quindi birazionalmente equivalente ad un cono proiettante una F .

3° V è luogo di un fascio ellittico di superficie unirazionali in $K(P)$, con curve ellittiche unisecanti, ed è quindi birazionalmente equivalente al prodotto d'una superficie razionale con una curva ellittica.

4. Tutto quanto si è detto finora vale sia se le superficie F sono regolari sia se le F sono irregolari; però possiamo pervenire a conclusioni più precise facendo qualche ulteriore ipotesi circa la natura di $|F|$. Anzitutto notiamo che V , se è unirazionale, dev'essere superficialmente regolare; se

(7) Per uno studio dettagliato cfr. L. ROTH, «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 47, 496 (1951).

(8) Ved. L. ROTH, loc. cit. in (2).

(9) Cfr. L. ROTH, loc. cit. in (7).

è trasformabile in un cono proiettante F , la sua irregolarità superficiale è uguale a quella della $F^{(10)}$; e, se è equivalente al prodotto d'una superficie razionale con una curva ellittica, la sua irregolarità superficiale è uguale ad uno.

Ora, nel caso in cui F sia generica e regolare, V dev'essere superficialmente regolare, ed è quindi esclusa la terza possibilità.

Pertanto:

Se F è regolare, e se $|F|$ è a curva caratteristica semplice, la V risulta o unirazionale in $K(P)$ oppure trasformabile birazionalmente in un cono proiettante F .

Se invece F è generica ed irregolare, rimane esclusa la prima alternativa, ed anche la terza, salvo il caso in cui F abbia irregolarità uno. È noto ⁽¹¹⁾ che allora F deve appartenere ad una delle classi costituite dalle:

a) superficie aventi $p_g = 0$, $p_a = -1$;

b) superficie aventi $p_g > 0$, $p_a \geq 0$, che contengono un fascio ellittico di curve ellittiche.

Pertanto:

Se F è irregolare, e se $|F|$ è a curva caratteristica semplice, V è trasformabile birazionalmente in un cono proiettante F , eccetto (forse) il caso in cui F appartenga ad una delle classi suindicate: allora V può essere birazionalmente equivalente al prodotto d'una superficie razionale con una curva ellittica.

Chimica. — *Sullo spettro ultrarosso tra 2,7 e 5 μ di alcune sostanze contenenti il gruppo imminico^(*).* Nota di PAOLO MIRONE e MARIA VAMPIRI, presentata ^(**) dal Socio G. B. BONINO.

In una precedente Nota pubblicata su questi « Rendiconti » [1], il primo di noi ha riferito sullo spettro ultrarosso del pirrolo puro e in soluzione tra 2,7 e 5 μ (fig. 1), con particolare riguardo a uno sdoppiamento mostrato, in soluzione, dalla banda riferita alla vibrazione di valenza del gruppo imminico (fig. 2). L'interesse di questo sdoppiamento, e la possibilità di interpretarlo come dovuto ad associazioni intermolecolari attraverso i gruppi imminici, ci hanno indotto ad estendere le osservazioni ad alcuni composti contenenti un gruppo imminico sia di caratteristiche analoghe a quelle dell'immino pirrolico (tetrametilpirrolo, indolo, carbazolo), sia di caratteristiche nettamente diverse (difenilammina).

Degli spettri ultrarossi di queste sostanze, quelli del tetrametilpirrolo e del carbazolo, per quanto ci consta, non sono ancora stati studiati nè com-

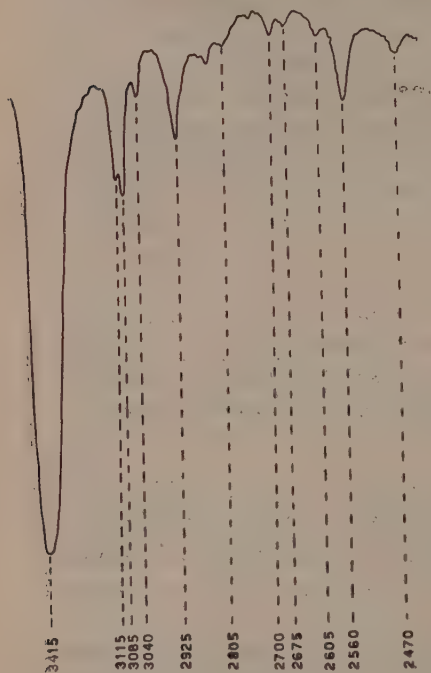
(10) F. SEVERI, « Rend. Palermo », 28, 33 (1909).

(11) F. ENRIQUES, op. cit., in (6).

(*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica Fisica del C.N.R. nell'Istituto Chimico « G. Ciamician » di Bologna diretto dal prof. G. B. Bonino.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

pletamente nè in parte; quello dell'indolo è stato studiato da Lecomte e Lambert [2] solo al di là di 7μ , e quello della difenilammina (allo stato fuso) è stato studiato completamente da Bell [3]. Inoltre Gordy e Stanford [4] hanno studiato la banda dovuta al gruppo NH dell'indolo e della difenilammina, trovandola per il primo a $2,83\mu$ in soluzione $1,63\text{ M}$ di tetracloruro di carbonio, e a $2,82\mu$ in soluzione $0,1\text{ M}$ dello stesso solvente; per la seconda a $2,91\mu$ in soluzione $1,63\text{ M}$ di tetracloruro di carbonio, e a $2,85\mu$ in soluzione



PIRROLO puro

Fig. 1.

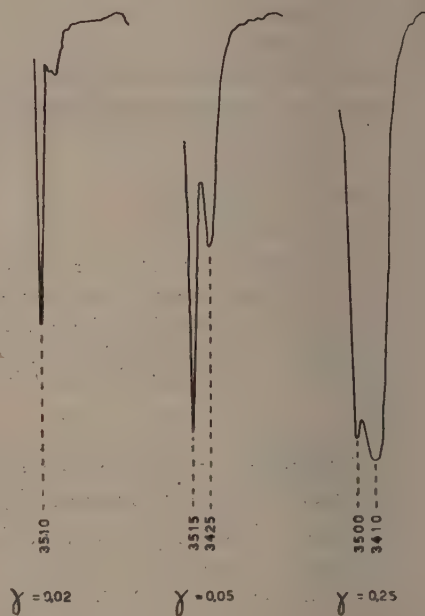
PIRROLO in CCl_4

Fig. 2.

$0,1\text{ M}$ dello stesso solvente. In base a questi dati Gordy e Stanford deducevano che le molecole della difenilammina dovevano essere associate in soluzione concentrata, e quelle dell'indolo no.

PARTE SPERIMENTALE.

Tetrametilpirrolo. - Il campione di tetrametilpirrolo puro sintetico è stato preparato, subito prima dell'esperienza, nel Laboratorio di Chimica Organica di questo Istituto dalla prof. Elisa Ghigi, che ringraziamo vivamente. Esso è stato esaminato in soluzione di tetracloruro di carbonio a con-

centrazione (termodinamica) $\gamma = 0,04$, sotto lo spessore di 0,1 mm. Le bande osservate sono date nella tabella seguente:

λ (μ)	$\bar{\nu}$ (cm^{-1})	I
2,87	3485	f
2,96	3380	m
3,40	2940	f
3,44	2900	f
3,50	2855	f
3,66	2730	d

Indolo. — Abbiamo impiegato indolo purissimo della ditta Fränkel e Landau, dopo averlo cristallizzato da etere di petrolio. L'indolo è stato esaminato allo stato solido, sotto forma di sottile straterello depositato su una lastrina di sal-

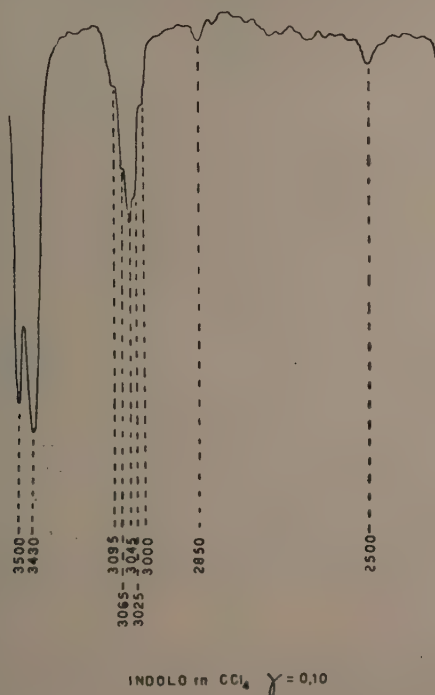


Fig. 3.

gemma da una soluzione in etere di petrolio. Inoltre sono state esaminate soluzioni in tetracloruro di carbonio a concentrazioni $\gamma = 0,2$, $\gamma = 0,1$ (fig. 3), $\gamma = 0,05$, sotto lo spessore di 0,1 mm. Le bande osservate sono riunite nella tabella seguente:

Solido			Soluzione		
$\lambda (\mu)$	$\bar{\nu} (\text{cm}^{-1})$	I	$\lambda (\mu)$	$\bar{\nu} (\text{cm}^{-1})$	I
—	—	—	2,85 ₆	3501	f
2,92	3425	f	2,91 ₆	3429	
—	—	—	3,23 ₃	3093	
—	—	—	3,26 ₃	3065	m
3,29	3040	d	3,28 ₅	3044	
—	—	—	3,30 ₅	3026	
—	—	—	3,33 ₀	3003	dd
—	—	—	3,51 ₂	2847	
—	—	—	3,72 ₄	2685	
—	—	—	3,83 ₄	2608	dd
—	—	—	3,99 ₈	2501	d

La banda dovuta alla vibrazione di valenza del gruppo NH ha, nella sostanza pura, il massimo a 3425 cm^{-1} ($2,92 \mu$). In soluzione si trova che essa è accompagnata da una seconda componente, posta dalla parte delle minori lunghezze d'onda e di intensità crescente al diminuire della concentrazione di indolo. Per $\gamma = 0,1$, la componente primitiva, con massimo a 3429 cm^{-1} , è ancora più intensa della nuova componente a 3501 cm^{-1} ; ma per $\gamma = 0,05$ la componente a 3501 cm^{-1} è diventata più intensa di quella a 3429 cm^{-1} .

Carbazolo. — Abbiamo impiegato carbazolo purissimo della ditta Fränkel e Landau. Questo composto è stato esaminato allo stato solido sotto forma di sospensione in olio di vaselina, e in soluzione cloroformica di concentrazione $\gamma = 0,0035$ sotto lo spessore di $0,1 \text{ mm}$. Non si sono potute esaminare soluzioni a concentrazioni più alte a causa della scarsa solubilità del carbazolo in tutti i solventi utilizzabili in questa regione dello spettro.

Le bande osservate sono riunite nella tabella seguente:

Solido			Soluzione		
$\lambda (\mu)$	$\bar{\nu} (\text{cm}^{-1})$	I	$\lambda (\mu)$	$\bar{\nu} (\text{cm}^{-1})$	I
—	—	—	2,87	3485	f
2,91	3435	f	—	—	—
3,27	3060	d	—	—	—

Difenilammina. — Abbiamo impiegato difenilammina purissima Merck, esaminandola allo stato solido sotto forma di sottile straterello depositato da una soluzione benzenica, e in soluzione a due diverse concentrazioni ($\gamma = 0,1$ e $\gamma = 0,01$) in benzolo sotto lo spessore di 0,1 mm. Abbiamo preso in esame la sola zona spettrale interessata alla vibrazione di valenza del gruppo NH, nella quale abbiamo osservato le bande seguenti:

Solido		Soluzione	
λ (μ)	$\bar{\nu}$ (cm^{-1})	λ (μ)	$\bar{\nu}$ (cm^{-1})
2,96	3380	2,93	3415

L'apparecchio impiegato per queste esperienze è uno spettrofotometro Beckman mod. IR2 a registrazione diretta, con monocromatore a prisma in fluoruro di litio. La larghezza della fenditura veniva fatta variare con continuità durante la registrazione, ed assumeva i seguenti valori (tra parentesi sono indicate le larghezze spettrali):

a 4,0 μ : 0,41 mm (19 cm^{-1})

a 3,4 μ : 0,31 mm (24 cm^{-1})

a 2,8 μ : 0,24 mm (33 cm^{-1})

Per l'indolo è stata fatta anche una registrazione spingendo al massimo il potere risolvente dell'apparecchio. La larghezza della fenditura assumeva i seguenti valori:

a 4,0 μ : 0,15 mm (7 cm^{-1})

a 3,4 μ : 0,115 mm (9 cm^{-1})

a 2,8 μ : 0,09 mm (12,5 cm^{-1})

I valori delle lunghezze d'onda dati con due cifre decimali possono ritenersi esatti entro $\pm 0,01 \mu$, e quelli dati con tre cifre decimali entro $\pm 0,005 \mu$.

DISCUSSIONE. — Nella Nota citata all'inizio, il primo di noi ha cercato di interpretare lo sdoppiamento della banda dell'immino pirrolico come dovuto all'esistenza, nel pirrolo puro, di associazioni costituite da molecole unite a due a due da legami a idrogeno ⁽¹⁾.

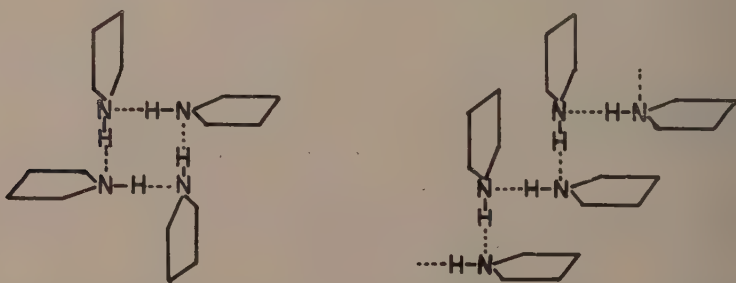
(1) È forse più ragionevole pensare che invece le molecole del pirrolo si associno in polimeri a catena o ad anello, in maniera analoga a quanto succede negli alcoli [5]:

Dalle misure sopra riportate, risulta che la banda del gruppo imminico nel tetrametilpirrolo e nell'indolo mostra uno sdoppiamento strettamente analogo a quello della stessa banda nel pirrolo. Per il tetrametilpirrolo non si è potuto osservare lo scambio di intensità al variare della concentrazione: però il loro rapporto di intensità, e l'intervallo spettrale che le separa, sono circa gli stessi che in una soluzione di pirrolo della stessa concentrazione. Perciò si può concludere che il tetrametilpirrolo e l'indolo, allo stato puro o in soluzione concentrata, sono associati allo stesso modo che il pirrolo.

Il carbazolo, a causa della sua insolubilità, non ha potuto essere esaminato a concentrazioni per cui potessero eventualmente manifestarsi entrambe le componenti della banda del gruppo imminico. Però, data l'analogia di questo composto col pirrolo e l'indolo, mi sembra lecito attribuire la banda a 3435 cm^{-1} (sostanza solida) a un gruppo NH associato, e quella a 3485 cm^{-1} (soluzione) a un gruppo NH libero.

È da notare il fatto che, mentre nel pirrolo e nel tetrametilpirrolo le due componenti della banda del gruppo imminico sono separate da un intervallo di circa 100 cm^{-1} , nell'indolo questo intervallo si riduce a 70 cm^{-1} , e nel carbazolo a 50 cm^{-1} . Ciò sembra provare che nei due ultimi composti le associazioni sono via via più deboli.

Per la difenilammina sembra potersi escludere la possibilità di una associazione. Infatti la banda del gruppo NH mostra solo un leggero spostamento da 3380 a 3415 cm^{-1} nel passaggio dalla sostanza solida alla soluzione.



L'ipotesi della formazione di dimeri aventi un centro di simmetria appare poco probabile, anche perchè richiederebbe che l'atomo di idrogeno potesse coordinarsi due atomi di azoto posti in direzioni facenti un certo angolo tra di loro. È noto invece che l'atomo di idrogeno, a causa della sua piccolezza, può coordinarsi solo due atomi, posti in linea retta con l'idrogeno stesso [6]. Questa condizione può venire soddisfatta solo nel caso di una associazione dei tipi schematizzati sopra.

Nel pirrolo le associazioni intermolecolari sarebbero però molto più deboli che negli alcoli. Infatti, nell'alcol etilico la banda attribuita agli OH liberi si trova a 3640 cm^{-1} , e quella attribuita agli OH associati a circa 3350 cm^{-1} [7]. Lo spostamento è di circa 300 cm^{-1} , triplo di quello osservato nel pirrolo. Inoltre, nell'alcol etilico la banda agli OH associati scompare a una concentrazione $0,02\text{ M}$, mentre nel pirrolo la banda attribuita agli NH associati scompare quasi già a una concentrazione $0,2\text{ M}$.

Inoltre anche in soluzione concentrata la banda è evidentemente semplice, mentre dovrebbe essere doppia se coesistessero molecole libere e molecole associate.

Del resto è logico attendersi che la difenilammina non formi legami a idrogeno dato che in essa il legame N-H non ha quel carattere polare, che invece possiede nei composti pirrolici in conseguenza della risonanza di due elettroni p_z dell'azoto con i quattro elettroni p_z degli atomi di carbonio dell'anello pirrolico.

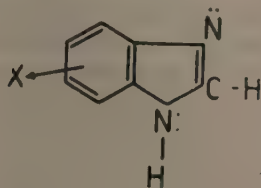
Ingraziamo il prof. G. B. Bonino, il quale ci ha accolto ed ospitato in questo Centro Studi, ci ha proposto questa ricerca e messo a disposizione i mezzi necessari per eseguirla, e ci ha fornito consigli e sviluppato discussioni sui risultati ottenuti.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] P. MIRONE, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XI, 365 (1951).
- [2] J. LECOMTE e P. LAMBERT, « Compt. rend. », 208, 1148 (1939).
- [3] F. K. BELL, « J. Am. Chem. Soc. », 48, 813 (1926).
- [4] W. GORDY e S. C. STANFORD, « J. Am. Chem. Soc. », 62, 497 (1940).
- [5] L. PAULING, *Nature of the chem. bond*. Ithaca, 1948, p. 305.
- [6] L. PAULING, op. cit., p. 286.
- [7] J. ERRERA e P. MOLLET, « Nature », 138, 882 (1936).

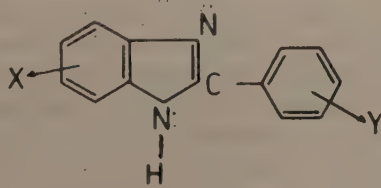
Chimica. — *Ricerche sui benzimidazoli: spettri di assorbimento e proprietà cromoforiche*^(*). Nota di ANGELO MANGINI, FERNANDO MONTANARI e RICCARDO PASSERINI, presentata^(**) dal Socio G. B. BONINO.

Nel quadro delle ricerche in atto in questo Istituto, intese alla caratterizzazione delle proprietà cromoforiche di alcuni gruppi di sostanze organiche, abbiamo preso in considerazione la serie del benzimidazolo e suoi C- ed N-fenil-derivati: in questa prima Nota cominciamo col riassumere i risultati spettroscopici inerenti ai benzimidazoli-I e ai 2-fenil-imidazoli-II (dei quali alcuni termini non ancora descritti)



(I)

X = H, CH₃, Alg, OCH₃, NH₂, NO₂



(II)

Y = H; X = H, CH₃, Cl, OCH₃, NO₂

X = H; Y = H, CH₃, Cl, OCH₃, NO₂, NH₂

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Bologna; col contributo del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

ricordando fra l'altro che: Wiegand e Merkel ⁽¹⁾ hanno studiato l'assorbimento di alcuni fenil-benzimidazoli (form. II: $X = H$; $Y =$ sostituyente generico), specie per quanto riguarda la formazione di «ponti» fra l'idrogeno imminico e il sostituyente Y in orto- nel fenile; alcuni 2-amino-benzimidazoli, il 5-cloro- e il 5-cloro-2-amino-benzimidazolo sono stati studiati spettroscopicamente da Autori Americani ⁽²⁾ durante il corso delle nostre ricerche, mentre le caratteristiche spettrali del 2-metil-benzimidazolo sono state rese note da Behaghel e Schneider ⁽³⁾.

La registrazione degli spettri - come negli altri lavori - è stata eseguita collo spettrofotometro Beckman a quarzo, mod. DU., impiegando soluzioni alcoliche, acide e alcaline, di regola alla concentrazione 1 : 100.000; operando in soluzione idroalcolica, si ottengono delle curve di assorbimento molto simili a quelle che si ricavano usando soluzioni alcoliche. Le letture sono state effettuate generalmente di 2 in 2 $m\mu$, e nei punti caratteristici anche di 1 in 1, impiegando vaschette da 1 cm: i risultati sono raccolti nelle tabelle I e II, ove i massimi sono dati in $m\mu$ e le intensità in $\lg \epsilon$ -mol. (i massimi poco pronunciati sono fra parentesi, i flessi sono asteriscati).

Genericamente parlando, il contegno spettrale dei benzimidazoli e loro 2-fenil-derivati si può riassumere come segue, osservando subito che in accordo alle note proprietà chimiche, si osserva che le caratteristiche spettroscopiche vengono più o meno modificate in soluzione acida e alcalina.

I) Benzimidazoli.

a) Nel benzimidazolo-I ($X = H$; comp. 1) la curva di assorbimento, discendente dalle minori λ sin verso 220 $m\mu$, presenta una zona di assorbimento a 240-250 $m\mu$, ove in genere è anche possibile rilevare un inviluppo, e bande di struttura fine nella regione 260-280 $m\mu$, di dove l'assorbimento cade assai rapidamente: tale situazione non viene praticamente modificata nei 4- e nei 5-metil- e cloro-benzimidazoli (I: $X = CH_3$, Alg; comp. 2...8);

b) negli amino-composti (I, $X = NH_2$) la struttura fine scompare: per il 4-amino-derivato (comp. 11), l'assorbimento nella regione 240-250 $m\mu$ viene spostato a 265 $m\mu$ e la struttura fine viene inglobata in un largo flessa a 285 $m\mu$ (comportamento quasi analogo presenta il 4-metossibenzimidazolo, comp. 9), mentre insorge a 218 $m\mu$ una terza banda di più forte intensità; per il 5-amino-derivato (comp. 12), l'assorbimento permane nella regione 240-250 $m\mu$, e al posto della struttura fine compare una netta banda a circa 300 $m\mu$;

c) i nitro-derivati-I ($X = NO_2$; comp. 13, 14) sono caratterizzati ognuno da una larga banda di assorbimento nella regione 300-320 $m\mu$,

(1) Riportato da A. VAN DORMAEL, « L'industrie Chim. Belge », XV, 113 (n. 3, 1950); cfr. pure: « Liebig's Ann. », 557, 246 (1947). È anche noto lo spettro del 4-5-difenil-imidazolo, riportato da F. KORTE, « Angew. Chem. », 63, 370 (1951).

(2) A. STECK, F. C. NACHOD, G. W. EWING, W. H. GORMAN, « J. Am. Chem. Soc. », 70, 3406 (1951).

(3) « Ber. », 69, 92 (1936).

e per il 5-nitro-composto compare pure un altro massimo a 235 m μ : in ogni caso, non è presente la struttura fine;

d) in soluzione acida, i benzimidazoli variano di poco l'andamento dello spettro, ma si osserva di regola uno spostamento ipsocromo di tutta la curva, accompagnato da effetto ipercromo per l'assorbimento nella regione della struttura fine, ma non così per la banda 240-250 m μ ; in soluzione alcalina, l'assorbimento a 240-250 m μ non compare, mentre le bande di struttura fine vengono più o meno involuppate in una curva di più elevata intensità: nei nitroderivati tutto lo spettro viene notevolmente spostato in senso batocromo.

II) Fenil-Benzimidazoli.

a) Nei fenil-benzimidazoli (form. II : Y = H, X = H, CH₃, Cl, OCH₃; comp. 15...21) si ritrova potenziato l'assorbimento nella regione 240-250 m μ dei benzimidazoli, mentre la struttura fine viene completamente annullata: inoltre, compare un forte assorbimento nella regione 300 m μ ;

b) nei fenil-(nitro)-benzimidazoli (II : X = NO₂, Y = H; comp. 22, 23) si osserva un notevole potenziamento batocromo delle due regioni di assorbimento;

c) nei fenil-benzimidazoli (II : X = H, Y = CH₃, Cl, OCH₃, NO₂; comp. 24...36) compare poco modificata la situazione del fenil-benzimidazolo, salvo il notevole spostamento batocromo della banda verso le maggiori lunghezze d'onda, oltre che nel p-nitro-composto, nell'o-nitro e o-metossi-derivato; nell'o-nitro-composto (comp. 34) compaiono inoltre alcune bande secondarie nella zona intermedia dello spettro.

In soluzione acida o alcalina lo spettro viene sempre più o meno modificato, e tali modificazioni sono più notevoli e di ordine diverso a seconda della presenza o meno del nitro-gruppo in benzo- o nel fenile, e della posizione da esso occupata:

d) in soluzione acida, i fenil-benzimidazoli, sostituiti in benzo- o nel fenile (II : Y = H, X = H, CH₃, Cl, OCH₃; comp. 15...21; X = H, Y = CH₃, Cl, OCH₃; comp. 26...32) ed escluso i nitro-derivati, presentano di regola il massimo nella regione 240-250 m μ potenziato nella intensità (differenza dai benzimidazoli-I), quello nella regione 300 m μ spostato di poco verso le maggiori frequenze; in soluzione alcalina, invece, la banda 240-250 m μ tende a scomparire, quando l'assorbimento sui 300 m μ subisce di regola un ridotto spostamento batocromo (analogia con i benzimidazoli): peraltro in qualche caso lo spostamento è in senso ipsocromo;

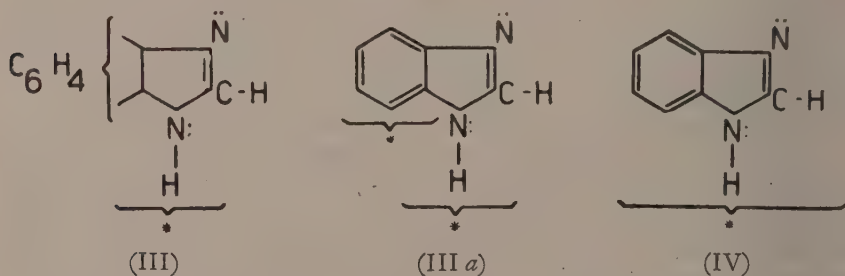
e) nei (nitro)-benzo-fenil-imidazoli (form. II : Y = H, X = NO₂; comp. 22, 23) in soluzione acida, la banda verso le maggiori lunghezze d'onda viene retrocessa, l'altro massimo è retrocesso nel 5-nitro- ma non nel 4-nitro-composto, ove permane praticamente non-modificato, se pure più accentuato; in soluzione alcalina, tutto lo spettro subisce spostamento batocromo e più notevole per la banda verso le maggiori λ ;

f) i (nitro)-fenil-benzimidazoli (form. II: $X = H$, $Y = NO_2$; comp. 34-35-36) mostrano contegno a sè: il p-nitro-derivato, si comporta come i nitro-benzo-fenil-imidazoli, e cioè spostamento batocromo in soluzione alcalina e ipsocromo in soluzione acida; il m-nitro-derivato mostra un contegno analogo ai derivati non-nitrati: ridotta retrocessione della banda verso le maggiori λ e potenziamento del massimo sui 240 m μ in soluzione acida e, rispettivamente, ridotto effetto batocromo e indebolimento delle bande in soluzione alcalina;

g) nell'o-nitro-derivato, a sua volta: in soluzione alcalina, l'assorbimento nella regione intermedia dello spettro (290-300 m μ) e quello verso le maggiori λ (regione 340 m μ), tendono a invilupparsi - quindi, spostamento ipsocromo della banda 340 m μ -, quando il massimo nella regione 250 m μ viene indebolito come negli altri casi; in soluzione acida, la banda verso le maggiori λ viene spostata verso il rosso (differenza da tutti gli altri benzimidazoli, fenil- e nitro-derivati), l'assorbimento nella zona intermedia dello spettro accentua la struttura fine, il massimo a 250 m μ viene come di solito indebolito.

Dal complesso dei risultati sperimentali, quali appaiono dal comportamento spettrale dei benzimidazoli in soluzione alcolica, acida o alcalina, il problema dei cromofori attivi nel sistema benzimidazolico è da esaminare sotto gli aspetti seguenti.

1° Nel benzimidazolo, all'assorbimento nella regione 240-250 m μ dovrebbe essere interessata l'unità imidazolica (l'asterisco vuol dire «eccitato»), «modificata» dal C_6H_4 , schemi (III)-(III a), o eventualmente anche compresa nella molecola come un tutto, schema (IV):

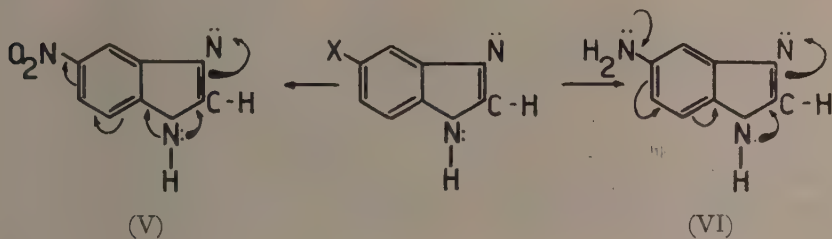


e ciò in relazione ai fatti seguenti: il 4-metil-imidazolo assorbe a 216 m μ ma non a 240 m μ ; la regione 240-250 m μ dello spettro del benzimidazolo, è quella che subisce le modificazioni più notevoli in ambiente acido o alcalino, e a seguito della N-ossidazione (4); nella stessa regione 240-250 m μ è possibile distinguere di regola due bande, pur se inviluppate.

È ovvio che in presenza di sostituenti in Bz- del tipo CH_3 e Alg, la situazione rimarrà praticamente invariata, ma se il sostituito in Bz- è

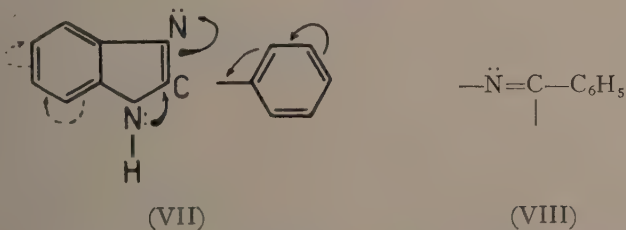
(4) M. COLONNA, comunicazione privata.

dotato di forte effetto M, quale ad esempio l' NH_2 e l' NO_2 , i sistemi mesomeri corrispondenti alle formulazioni unitarie prima schematizzate, e come tali aventi « peso » prevalente nello stato fondamentale, dovrebbero « evolversi » verso strutture limitate che ora comprenderanno il sostituito, ad esempio schemi (V) e (VI) [beninteso che la eccitazione dei due cromofori, graficizzati – per esemplificare – secondo Ingold, non è « contemporanea », ma qui in un unico schema per ragioni tipografiche; in virtù della tautomeria, si hanno schemi analoghi se l' NH_2 o l' NO_2 sono in posizione 4-; la diversa grafia delle frecce sta a indicare il differente « spostamento » elettronico: che in (V) opera in senso contrario, quando in (VI), invece, opera nello stesso senso]:



Di qui un assorbimento che potrà essere anche notevolmente diverso dai benzimidazoli-I, $\text{X} = \text{H}, \text{CH}_3, \text{Alg}$, specie per la regione verso le maggiori lunghezze d'onda, come in realtà si verifica;

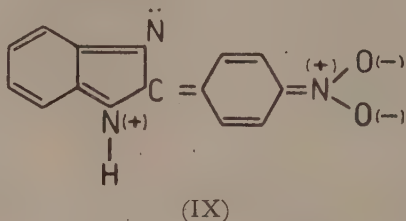
2° Nei fenil-benzimidazoli, l'assorbimento nella regione 240–250 $\text{m}\mu$ sarebbe similmente da assegnarsi, mentre a quello nella regione 300 $\text{m}\mu$ dovrebbe essere interessato il fenile (schema VII; anche qui la diversa grafia delle frecce sta a indicare il differente movimento elettronico)



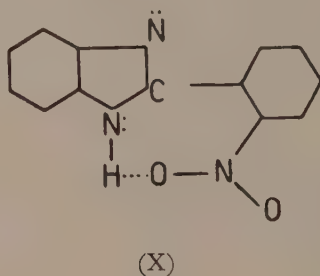
Sotto tale aspetto, all'assorbimento del fenil-benzimidazolo dovrebbe presumibilmente partecipare pure il cromoforo delle basi di Schiff, (VIII) ⁽³⁾: sta di fatto che tali composti (basi di Schiff) assorbono anche nella regione 300 $\text{m}\mu$ e oltre, e che il p-amino-fenil-benzimidazolo, ove la coniugazione del fenile è favorita dal forte effetto +M dell' NH_2 , assorbe a 320 $\text{m}\mu$ con $\lg \epsilon = 4,50$, e di conserva in soluzione debolmente acida (protonizzazione all'N-imidazolico) l'assorbimento viene potenziato.

È anche da attendersi che qualora il fenile contenga un gruppo nitrico in posizione coniugabile, possa partecipare alla mesomeria del sistema una

struttura limite del tipo-IX (il contributo alla coniugazione del nucleo benzenico può presumersi assai «ridotto»): ciò potrebbe essere avvalorato dal maggior effetto batocromo indotto dall' NO_2 in para- nel fenile ($\lambda_{\text{mass.}} = 347 \text{ m}\mu$, $\lg \epsilon = 4,23$), rispetto a quanto non faccia se in Bz- in 4- o 5- ($\lambda_{\text{mass.}} = 330 \text{ m}\mu$, $\lg \epsilon = 4,19$, $4,02$)



3° Altro aspetto del problema è che negli stessi fenil-benzimidazoli, mentre alcuni sostituenti in orto- nel fenile, $\text{CH}_3\text{—Cl}$ (comp. 24, 27), importano effetto ipsocromo sulla banda di assorbimento verso le maggiori lunghezze d'onda per il noto effetto «orto-», quando confrontati con i derivati para-, per altri, $\text{OCH}_3\text{—NO}_2$ (comp. 30, 34), detto effetto non si verifica: la possibilità di strutture chelate, ipotesi già avanzata da Wiegand e Merkel ⁽¹⁾ per l'o-metossi-derivato, potrebbe rendere anche ragione dei fatti osservati per l'o-nitro-fenil-benzimidazolo (X)



nel quale il ponte d'idrogeno tenderebbe a planificare la molecola: tale possibilità sarebbe avvalorata dal comportamento spettrale in soluzione alcalina e acida del composto in parola.

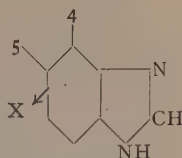
Ulteriori ricerche sono in corso, anche in relazione al problema specifico del ponte d'idrogeno nei derivanti orto-: in tal senso, il comportamento spettrale degli N-metil-benzimidazoli e degli N-fenil-benzimidazoli, ove ovviamente la possibilità di formazione del ponte non esiste, potrà chiarire la situazione.

TABELLA I.

Benzimidazoli.

(sol. alcolica 1 : 100'000).

Form. I



N.º Ord.	Form. I X =	X in — 4			X in — 5		
		sino a 260 mμ	sino a 300 mμ	oltre 300 mμ	sino a 260 mμ	sino a 300 mμ	oltre 300 mμ
1	H	244-3,77 249-3,73 (*)	(266-3,58) 272-3,74 279-3,80	—	244-3,77 249-3,73 (*)	(266-3,58) 272-3,74 279-3,80	—
2	H, CH ₃ —μ	243-3,79 248-3,77 (*)	(268-3,65 *) 274-3,80 280-3,86	—	—	—	—
3-4	CH ₃	247-3,85 254-3,81 (*)	(264-3,59 *) 271-3,60 279-3,63	—	245,5-3,74 253-3,67 (*)	(274-3,64 *) 277-3,71 283-3,69	—
5-6	Cl	249-3,89 (254-3,88)	(266-3,64 *) 272-3,65 281-3,60	—	247-3,72 254-3,67 (*)	(272-3,57 *) 280-3,73 286-3,68	—
7-8	Br	250-3,91 (*) 255-3,92	— 273-3,71 281-3,62	—	248-3,73 254-3,68 (*)	(274-3,62 *) 280-3,75 287-3,71	—
9-10	OCH ₃	250-3,83 256-3,81 (*)	— 271-3,43 (*) (278-3,31)	—	246-3,63 253-3,52 (*)	— 287-3,81 292-3,77	—
11-12	NH ₂	218-4,47	(264,5-3,87 285-3,62 *)	—	251-3,67	298,5-3,72	—
13-14	NO ₂	—	—	316,5-3,93	235-4,30	—	302-3,97

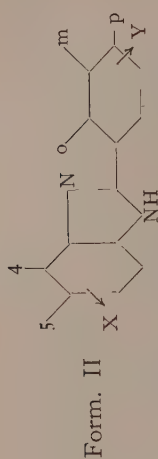
Questi numeri fra parentesi si riferiscono ai prodotti cui al numero d'ordine della tabella (così anche per la tabella II).

- (1) HELLER, KÜHN, « Ber. », 37, 3116 (1904): p. f. 170°.
- (2) RUPE, PORAI-KOSCHITZ, « Z. », 1904-I, 102: p. f. 175°.
- (3) GABRIEL, THIEMA, « Ber. », 52, 1081 (1919): p. f. 143-144°.
- (4) LADEMBURG, « Ber. », 10, 1123 (1877); BAMBERGER, BERLE, « A. », 273, 321 (1893): p. f. 113°.
- (5) P. f. 170°.
- (6) O. FISCHER, « Ber. », 37, 556 (1904): p. f. 125-126°.
- (7) P. f. 168°.
- (8) O. FISCHER, MOUSON, « Ber. », 38, 325 (1905): p. f. 137°.
- (9) P. f. 168°.
- (10) OCHIAI, KATADA, « J. pharm. Soc. Japan », 60, 211-16 (1940); « Z. », 1941-II, 614: p. f. 124°.
- (11) VAN DER WANT, « Rec. », 67, 48 (1948): p. f. 119-120°.
- (12) WOLLEY, « J. Biol. Chem. », 152, 225 (1944) e VAN DER WANT, « Rec. », 67, 47 (1948), hanno ottenuto un prodotto a m. f. 108-109° che descrivono come un biidrato, mentre alla analisi il prodotto risulta essere il mono-cloridrato. La base libera fonde a 165-166°.
- (13) VAN DER WANT, « Rec. », 67, 48 (1948): p. f. 244°.
- (14) O. FISCHER, HESS, « Ber. », 36, 3968 (1903): p. f. 206°.

TABELLA II.

2-fenil-benzimidazoli.

(sol. alcolica 1 : 100.000).

[illegible]

27-28-29	H	Cl	240-4,05 (*)	200,5-4,16	318-3,65 (*)	243-4,07 (*) 250-3,89 (*)	296-4,31 (*)	307-4,37 321-4,16 (*)	225-4,17 (*) 245-4,18	298-4,38 (*)	308-4,42 322-4,20 (*)
30-31-32	H	OCH ₃	238,5-4,15	284-4,07 (*) 292,5-4,21	314-4,35 329-4,16 (*)	215,5-4,52 241-4,10 (*)	296-4,32 (*)	306-4,35 (320-4,20)	251-4,17	—	(301-4,43) 308-4,47 (322-4,26)
33	H	NH ₂	—	—	—	—	—	—	(260-3,89)	(268,5-3,90) 277-3,91 (*)	317,5-4,49
34-35-36	H	NO ₂	222-4,61 249,5-4,23	276-4,02 (*) 291-4,10 (298-4,08)	339-4,02	244,5-4,18	271-4,13 (*)	306-4,32	226-4,15 245-4,00 (*)	—	347-4,23

- (15) HÜBNER, « A. », 208, 303 (1881); BAMEBERGER, BERLÈ, « A. », 273, 347 (1893): p. f. 287-288.
 (16) P. f. 246°.
 (17) HÜBNER, « A. », 208, 316 (1881): p. f. 240, 5-241°.
 (18) P. f. 227-228°.
 (19) HÜBNER, « A. », 208, 303 (1881); O. FISCHER, LIMMER, « J. pr. Chem. » [2], 74, 67 (1906): p. f. 208°.
 (20) P. f. 214-215°.
 (21) P. f. 218-219°.
 (22) P. f. 194-195°.
 (23) PINNOW, WISKOTT, « Ber. », 32, 900 (1899): p. f. 197-198°.
 (24) P. f. 220°.
 (25) P. f. 213, 5-214°.
 (26) HÜBNER, « A. », 210, 329 (1881): p. f. 269-270°.
 (27) P. f. 227-228°.
 (28) P. f. 230, 5-231°.
 (29) P. f. 285-286°.
 (30) P. f. 179-180°.
 (31) P. f. 205°.
 (32) WEIDENHAGEN, « Ber. », 69, 2270 (1936): p. f. 224°.
 (33) MIKLAZEWSKI, NIEMENTOWSKI, « Ber. », 34, 2959 (1901): p. f. 240°.
 (34) WEIDENHAGEN, « Ber. », 69, 2269 (1936): p. f. 192-193°.
 (35) PINNOW, WISKOTT, « Ber. », 32, 905 (1899); WEIDENHAGEN, « Ber. », 69, 2269 (1936): p. f. 204°.
 (36) HINSBERG, FUNCKE, « Ber. », 27, 2191 (1894); WEIDENHAGEN, « Ber. », 69, 2269 (1936): p. f. 309°.

Gli spettri dei prodotti nos. 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, sono stati anche registrati da WIEGAND e MERCKEL, ved. bibl. cui a (1).

Chimica organica. — *Ricerche sulle melanine.* — I. *Sulla melanina di seppia* (*). Nota di LUIGI PANIZZI e RODOLFO NICOLAUS, presentata (**) dal Socio F. GIORDANI.

La costituzione dei pigmenti bruni o neri, largamente diffusi nel regno animale, che vanno sotto il nome di « melanine », è stata oggetto di numerose ricerche, come risulta dalla copiosa letteratura in proposito (1). Lo studio chimico diretto di tali sostanze — che si presentano come corpi altomolecolari di natura colloidale, insolubili (2) e infusibili — rivolto ad ottenere, specialmente attraverso processi ossidativi, prodotti di demolizione che gettassero qualche luce sulla loro struttura, è stato in realtà assai povero di risultati, non ostante il lavoro dedicatovi.

Le melanine hanno mostrato infatti di possedere una costituzione poco favorevole all'indagine chimica, poichè tendono a demolirsi o troppo o troppo poco, in entrambi i casi fornendo prodotti di scarsa utilità ai fini strutturalistici, come i cosiddetti « acidi melaninici », sempre troppo complessi o come l'ammoniaca, l'anidride carbonica e gli acidi formico, acetico ed ossalico. Queste ultime semplici sostanze sono state in realtà le uniche ad essere isolate e sicuramente identificate come tali; di molte altre è stata asserita l'esistenza, ma solo sulla base di elementi di giudizio non sempre sicuri, come l'odore o certe reazioni cromatiche, e spesso in condizioni sperimentali non esenti da critiche (3). Il migliore risultato, in tal campo, fu conseguito da ANGELI, che riuscì ad isolare, tra i prodotti della ossidazione di sepio- o ippomelanina, una piccola quantità di un acido cristallino; non puro e su cui egli non indagò particolarmente, ma dal cui comportamento dedusse (a ragione) doversi trattare di un acido pirrolico (4).

(*) Lavoro eseguito, con il contributo del C.N.R., nell'Istituto di Chimica organica dell'Università di Napoli. Gli Autori si riservano di pubblicare, in altra sede, una Memoria più estesa con il corredo di una dettagliata parte sperimentale.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) La letteratura fino al 1934 è riportata nella bella monografia di A. QUILICO, *I pigmenti neri animali e vegetali*. Tip. Fusi, Pavia, 1937, che ci fu molto utile, anche sotto tale riguardo; ad essa pertanto rimandiamo.

(2) Quando non abbiano subito trattamenti energici, diverse melanine, tra cui quella di seppia, sono più o meno solubili (disperdibili) in alcali.

(3) Cfr., per la letteratura, la citata monografia di A. QUILICO.

(4) A. ANGELI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 30, I, 241 (1918), descrive brevemente l'ottenimento di « acido ossalico, misto ad un prodotto cristallino quasi incolore, che fonde verso i 200° in modo non netto e con sviluppo di gas e vapori che danno la reazione del fuscello di abete » e che copula coi diazo e con la fenilazossicarbonammide. Certamente, come risulterà chiaro più avanti, l'acido a p. f. 200° era acido ossammico (che allo stato puro fonde con dec. qualche grado oltre), misto all'acido pirrolico, infusibile e responsabile della reazione al fuscello, molto sensibile.

L'abbandono, ormai completo da parecchi anni, dello studio chimico diretto delle melanine è da ascriversi, in parte, alla infecondità osservata per tale via di indagine, in parte ai brillanti e più promettenti risultati conseguiti affrontando il problema della struttura di quei pigmenti dal punto di vista della loro genesi.

I lavori fondamentali di Raper e della sua scuola ⁽³⁾ ⁽⁵⁾ sulla ossidazione enzimatica della tirosina e corpi analoghi, conducente a pigmenti neri biosintetici, hanno permesso di individuare, tra i prodotti intermedi di ossidazione, sostanze ossindoliche; da queste, per un ulteriore processo ossidativo, si passa a pigmenti neri. È comunemente ammesso che sostanze ossindoliche siano quindi i precursori delle melanine naturali; la spesso notevole diversità di composizione e, come verrà mostrato più avanti, la diversità di comportamento rilevabili tra melanine naturali e biosintetiche, suggeriscono però molta cautela nella generalizzazione. In ogni caso, dato che il meccanismo secondo cui i pigmenti biosintetici si formano dai loro precursori è tuttora completamente oscuro, rimane sempre aperto il problema della struttura delle melanine sia naturali che sintetiche.

Ritenendo che, per la conoscenza di tale struttura, non si possa prescindere dallo studio chimico diretto dei pigmenti e che tale studio sia oggi per lo meno altrettanto necessario che in passato, abbiamo voluto portare il nostro contributo sull'argomento con questa prima Nota.

Abbiamo scelto, come materiale di studio, la melanina di seppia perchè a noi facilmente accessibile anche in grande quantità. Per la eliminazione delle impurezze sempre associate (costituite specialmente da sostanze di natura proteica e grassa), abbiamo adottato un metodo drastico di idrolisi: lunga ebollizione prima con HCl conc. e poi con NaOH 2 N, seguita da estrazione con alcool e con etere, allontanando naturalmente ad ogni operazione i prodotti solubilizzati. Si ottiene così una melanina che ha una composizione molto vicina a quella data da precedenti Autori ⁽³⁾ — i rapporti C/H e C/N sono rispettivamente di 1,65 e 6,35 — e risulta praticamente esente dalle impurezze che l'accompagnano alla origine.

Il trattamento energetico di purificazione adottato presenta il vantaggio di eliminare nel modo più sicuro le sostanze estranee comunemente associate alle melanine, ma espone ai pericoli di alterare contemporaneamente la struttura dei pigmenti e di crearne dei nuovi, le cosiddette « melanoidine » ⁽⁶⁾, di aspetto e comportamento molto affini a quelli delle melanine vere, in cui rimarrebbero pertanto occluse. Ciò creerebbe dei dubbi sulla reale origine

(5) Per i lavori più recenti, cfr. R. BEER, A. ROBERTSON e collaboratori, « J. Chem. Soc. », 1948, 2223; 1949, 2061; 1951, 2029, 2426. J. D. BU' LOCK e J. H. MASON, « J. Chem. Soc. », 1951, 703, 712; C. R. CLEMO e WEISS, « J. Ch. Soc. », 1945, 702. H. BURTON, « Chem. a. Ind. », 1947, 283. G. H. COHEN, « Bull. Soc. Ch. Biol. », 28, 104 (1946).

(6) Sono costituite da pigmenti neri, in parte insolubili, che si formano nella idrolisi acida delle proteine e la cui entità dipende dal contenuto di queste in amminoacidi « cromogeni » — specie triptofano e tirosina — e in carboidrati.

di prodotti di demolizione, strutturalmente interessanti, eventualmente isolati. Un tale serio inconveniente ci sembra sia da considerarsi superato, se questi composti possono venire riprodotti operando su campioni di melanina sia grezza che purificata in condizioni sfavorevoli alla formazione di melanoidine (idrolisi in ambiente riducente) ⁽³⁾.

Un altro inconveniente, presentato dal metodo di purificazione seguito, consiste nel fatto che le melanine, energeticamente trattate, perdono la loro capacità di disperdersi colloidalmente, assumendo uno stato eterogeneo e più compatto di suddivisione che ne rende molto malagevole una controllata demolizione ossidativa. Questo inconveniente è stato risolto traendo partito dalla osservazione che anche una sepiomelanina sottoposta a prolungati ed energici trattamenti fisici e chimici, facilmente si solubilizza in seguito ad un blando attacco con acqua ossigenata in presenza di carbonato sodico. Alla acidificazione, si ha un ricupero in pigmento del 60-70 %, sotto forma di *acidi sepiomelanici insolubili* (n. 1), che all'analisi (i rapporti C/H e C/N sono rispettivamente 1,62 e 6,3), all'aspetto e al comportamento chimico si mostrano molto simili alla melanina da cui provengono. Su questa presentano il grande vantaggio di una omogeneità fisica e di una facile solubilità in alcali anche deboli (ad esempio, bicarbonati alcalini), che ne permettono l'ulteriore attacco ossidativo in modo regolare, graduabile e riproducibile.

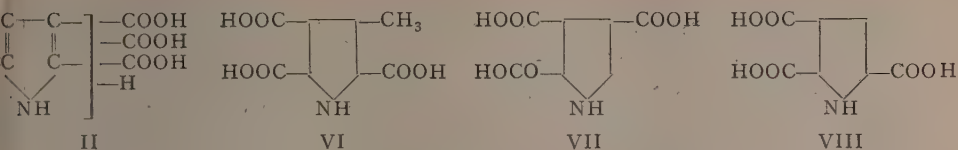
Tali acidi sepiomelanici furono pertanto sottoposti a tre tipi di demolizione ossidativa: con permanganato, con alogeni, con acqua ossigenata, sempre in ambiente alcalino.

Il trattamento degli acidi sepiomelanici con permanganato, fu condotto su loro soluzioni debolmente alcaline al 3-3,5 %, a temperatura ordinaria. Dopo l'allontanamento dell'acido ossalico, che si rinviene nella quantità di circa 1/4 del peso degli acidi sepiomelanici, l'estrazione con etere della miscela di ossidazione conduce all'isolamento di un materiale cristallino giallognolo che presenta intensa la reazione pirrolica del fuscello di abete; da esso, mediante caute e ripetute cristallizzazioni dall'acqua, è possibile separare una sostanza cristallina incolore, esente dalla suddetta reazione pirrolica ⁽⁷⁾ e che si identifica con l'*acido ossammico* $\text{NH}_2\text{—CO—COOH}$ (I).

Una prolungata idrolisi alcalina, a caldo, della soluzione contenente i prodotti di ossidazione, è indispensabile per eliminare da questa l'acido ossammico; in tali condizioni si ottiene, con una resa che si aggira sul 0,5 % degli acidi sepiomelanici, un prodotto cristallino, incolore, che si decompone senza fondere a partire da 290° e a cui l'analisi ed il comportamento chimico permettono di assegnare la struttura di *acido pirroltricarbonico* (II).

Una tale struttura è convalidata dall'ottenimento e dallo studio analitico dei suoi *esteri monometilico* (III), *dimetilico* (IV) e *trimetilico* (V); inoltre, dalla sua copulabilità con i diazo, dalle reazioni positive:

(7) Cfr. nota (4).



del fuscello di abete e di Ehrlich⁽⁸⁾ e dal confronto dello spettro di assorbimento nell'ultravioletto del suo estere trimetilico (V), che presenta due massimi a 224 e 270 $m\mu$, con quello dell'analogo estere dell'acido omologo 3-metilpirroltricarbonico⁽⁹⁾ (VI), i cui massimi giacciono a 230 e 277 $m\mu$. Come risulta nel diagramma della fig. 1, l'andamento delle curve, nella zona di assorbimento, è perfettamente corrispondente⁽¹⁰⁾.

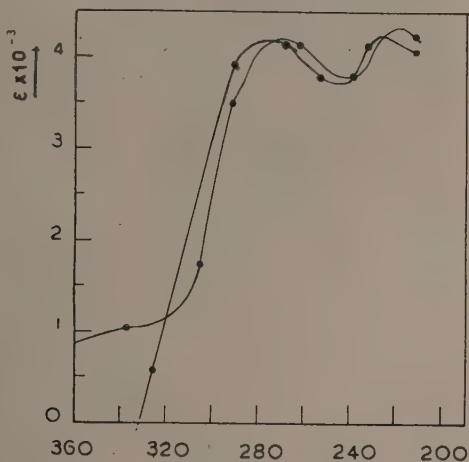


Fig. 1.

Rimane imprecisata quale, delle due possibili strutture isomere (VII) e (VIII) debba assegnarsi a (II); il comportamento dell'estere trimetilico (V) che non dà, anche a caldo, la reazione di Ehrlich, sta a favore della (VIII)⁽¹¹⁾. Una sicura scelta non è però possibile, date le scarse conoscenze che attualmente si hanno circa il comportamento degli acidi pirrolpolicarbos-

(8) Cfr. H. FISHER e H. ORTH, *Die Chemie des Pyrrols*, I, XI, 67, Leipzig, Ak. Verl., 1936.

(9) Tale acido fu recentemente preparato da A. H. CORWIN e J. L. STRAUGH, « J. Am. Chem. Soc. », 70, 1416 (1948); gli Autori descrivono però, come acido libero, una sostanza dotata di solubilità e p. f. molto diversi dal vero (VI) e che molto probabilmente è un sale sodico acido.

(10) Si nota un effetto batocromo, a seguito della introduzione di un $-\text{CH}_3$ in (II); cfr. R. N. JONES, « J. Am. Chem. Soc. », 67, 2127 (1945).

(11) Cfr. H. FISHER e H. ORTH, loc. cit., 67; date le proprietà e le condizioni dell'ottenimento di (II), si possono escludere gli isomeri N carbossilici. Cfr.: W. TSCHELINZEW e B. MAXOROW, « Ber. », 60, 194 (1927).

silici; l'incertezza potrà venire risolta con la sintesi dei due isomeri, non ancora noti ⁽¹²⁾, a cui ci siamo accinti.

La demolizione degli acidi sepiomelanici in soluzione al 4,5-5 %, alcalina per carbonato potassico, condotta con cloro, a temperatura ordinaria, ha permesso l'isolamento e la identificazione della *tricloroacetammide* (IX) e dell'*acido tricloroacetico* (X). Le sostanze estraibili di natura acida (costituenti 1/3-1/4 del peso degli acidi sepiomelanici ossidati) hanno fornito, alla riduzione catalitica su Ni-Raney, quasi esclusivamente acido acetico e una piccola quantità di *acido succinico* (XI) (0,6-0,9 % sugli acidi sepiomelanici).

L'ossidazione condotta con ipoclorito, in ambiente alcalino per NaOH, decorre più lenta della precedente e porta praticamente agli stessi risultati; è però più abbondante la formazione di (IX) (1,2 %) sugli acidi sepiomelanici, minore invece quella di (XI).

L'analoga demolizione con bromo ed alcali caustici, ha permesso l'isolamento e la identificazione di *bromoformio* CHBr_3 , *tetrabromometano* CBr_4 , *tribromoacetammide* $\text{CBr}_3\text{—CONH}_2$ (XII) (0,7 %) e *dibromoacetammide* $\text{CHBr}_2\text{—CONH}_2$ (XIII) (3,7 %); i prodotti di natura acida estraibili (16% circa) hanno fornito, alla riduzione catalitica, solo acido acetico, accanto a quantità molto piccole di acido succinico (XI).

L'ossidazione degli acidi sepiomelanici con acqua ossigenata, in ambiente alcalino per carbonato sodico, protratta per molte ore a caldo, produce sostanzialmente gli stessi composti ricavati dalla ossidazione permanganica (acidi ossammico, ossalico e pirroltricarbonico), così come si verifica nel primo blando trattamento con acqua ossigenata sulla melanina, nella preparazione degli acidi sepiomelanici n. 1.

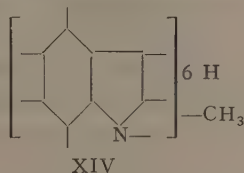
Sotto l'azione prolungata dell'acqua ossigenata, gli acidi sepiomelanici n. 1 si solubilizzano quasi integralmente; una piccola frazione resiste però all'ossidante e può venire precipitata per acidificazione. Questi *acidi sepiomelanici insolubili* n. 2, non differiscono sensibilmente dai precedenti, all'aspetto e al comportamento chimico; all'analisi, mostrano invece di possedere una composizione alquanto diversa, con un tenore in N nettamente inferiore (i rapporti C/H e C/N sono rispettivamente 1,56 e 12,4). Sottoposti alla ossidazione permanganica, come i precedenti, si comportano analogamente, fornendo l'acido pirroltricarbonico (II) con rese del 0,4 %.

Tra i prodotti ottenuti nella ossidazione con acqua ossigenata sia della melanina che degli acidi sepiomelanici, come pure in quella di questi ultimi con permanganato, una frazione notevole è costituita da una miscela di

(12) In realtà, è stato descritto, da F. P. MAZZA e G. STOLFI, « Arch. Sc. Biol. », 16, 183 (1931), un acido pirroltricarbonico, infusibile, ottenuto per ossidazione dell'Hallacromo (pigmento rosso contenuto nell'anellide *Halla partenopaea*) e che dovrebbe avere la struttura (VIII), a giudicare da quella, assegnata al pigmento, di acido 2,3 diidro, 5,6 dioxo 2 indolcarbonico. Recentemente, però, J. BU'LOCK e J. MASON, « Bioch. J. », 1950, 47, constatarono la non identità di tale composto, sostanza rossa di Raper, con l'hallacromo; rimane pertanto dubbia la natura dell'acido ottenuto da Mazza e Stolfi, che ci proponiamo di ripreparare, per il confronto con (II) non appena disporremo del pigmento di *Halla P.*

acidi, colorati dal giallo all'arancio-bruno, molto solubili in acqua e non estraibili con etere, precipitabili dalle loro soluzioni neutre sotto forma di *sali di bario* (14-20 % degli acidi sepiomelanici), in cui i rapporti C/H e C/N hanno rispettivamente i valori di 1 e 6 circa, mentre l'equivalente è di circa 155.

Sottoposti a distillazione secca, in presenza di barite anidra e a temperature di 300-350°, i suddetti sali di bario forniscono un olio a forte odore indolico, dalla cui frazione non basica può essere preparato, poco agevolmente ed in quantità molto piccola, un picrato cristallino, la cui composizione corrisponde molto bene a quella del *picrato* di un *monometilindolo* (XIV);



il suo p. di fusione e lo stato fisico (liquido a temperatura ambiente) dell'indolo da esso messo in libertà, lo farebbero identificare col picrato di uno dei tre isomeri (sui 7 possibili) aventi il gruppo —CH_3 rispettivamente nelle posizioni 1, 2, 6. Ai fini di una sua sicura identificazione, sono in corso esperienze per la preparazione sia dei suddetti isomeri che di maggiori quantità della sostanza.

Dai sali di bario, si possono agevolmente mettere in libertà i corrispondenti *acidi sepiomelanici solubili*. Come gli altri acidi sepiomelanici, anche questi forniscono, per ossidazione permanganica (in ambiente solforico a freddo), l'acido pirroltricarbonico (II), per quanto con un rendimento nettamente inferiore (0,04-0,065 %). Un loro esame preliminare ha mostrato che essi sono costituiti da una miscela di acidi, frazionabili in una certa misura e che reagiscono con le idrazine e con i diazo. È attualmente in corso un loro studio approfondito, nella speranza di potere tra essi isolare ed identificare sostanze che ci permettano di ottenere ulteriori informazioni sulla struttura dei pigmenti da cui derivano.

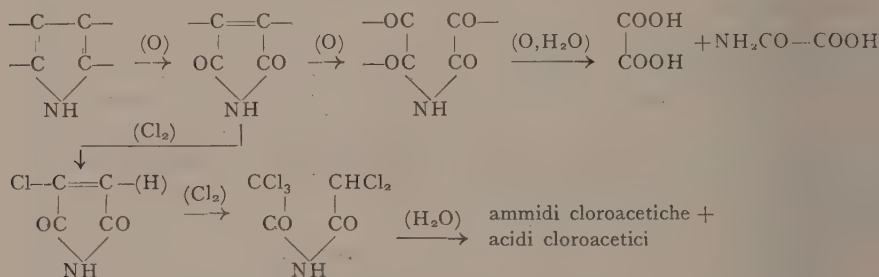
Tra i prodotti isolati nelle descritte ossidazioni, l'acido pirroltricarbonico (II) rappresenta certamente quello di maggior significato strutturistico. Per tale ragione, si volle controllarne la reale origine melaninica e si poté constatare che, sia la melanina grezza e fresca come pure quella purificata drasticamente per idrolisi con HCl in presenza di cloruro stannoso (per minimizzare la formazione di melanoidine), assoggettate agli stessi trattamenti ossidativi di cui sopra, forniscono lo stesso acido pirroltricarbonico (II).

Se ne deve quindi concludere che questo acido proviene realmente da sostanze che fanno parte integrante del pigmento naturale e che queste, considerate le condizioni varie e blande dell'ottenimento di (II), devono contenere preformato il nucleo pirrolico. Tutto ciò costituisce la prima esau-

riente prova della esistenza di strutture pirroliche in melanine naturali, desunta finora dallo studio chimico *diretto* delle melanine stesse.

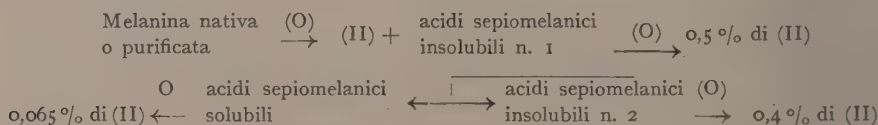
Per contro, la deduzione che, dall'ottenimento del metilindolo (XIV) per distillazione dei sali di bario, si può essere indotti a fare circa la preesistenza in questi di strutture indoliche vere e proprie (« aromatiche »), è da considerare con molte riserve, ove si tengano presenti le condizioni della reazione e la facilità con cui possono formarsi gli indoli, non richiedendo nemmeno, talvolta, la preesistenza di un anello benzenico ⁽¹³⁾.

Gli altri prodotti di demolizione individuati, appaiono in realtà troppo semplici per consentire, singolarmente, una valutazione strutturistica di rilievo. Il fatto però che la maggior parte di essi, in particolare le sostanze ammidiche e l'acido succinico, possano venire inseriti in un unico schema genetico da corpi contenenti una struttura pirrolica, costituisce una non trascurabile probabilità a favore di una loro comune origine. Si potrebbe avere, per esempio, la seguente schematica successione di reazioni:



La verosimiglianza dello schema su esposto riceve appoggio dai risultati delle ricerche di Ciamician ⁽¹⁴⁾ circa l'azione degli alogeni sul pirrolo, in ambiente alcalino; tale azione conduce infatti, in rapporti variabili a seconda delle condizioni sperimentali, a mono e dialogenomaleinimidi, acido acetico bialogenato e, accanto, acidi alogenomaleici, i quali ultimi si prestano ottimamente a spiegare l'ottenimento dell'acido succinico (XI) nelle riduzioni catalitiche accennate sopra.

Circa l'acido pirroltricarbonico (II) desideriamo rilevare il fatto del suo ottenimento costante, sia nella ossidazione della melanina che in quella di prodotti già in precedenza e sempre più ossidati, come si riassume qui appresso:



(13) Indoli si possono formare, ad esempio, da prodotti di polimerizzazione di pirroli, come di- e tripirroli, per distillazione secca o per fusione alcalina. Ved. ad esempio, M. DENNSTEDT e F. VOITGLAENDER, « Ber. », 27, 479 (1894) ecc.

(14) G. CIAMICIAN, « Gazz. Ch. It. », 16, 39 (1886).

Ciò potrebbe costituire un argomento, per quanto ovviamente di valore non conclusivo, a favore di una certa «periodicità» della struttura che, nella sepiomelanina, dà origine alla formazione di (II).

Per quanto riguarda la provenienza dell'acido pirroltricarbonico (II), potendosi soltanto affermare che i suoi carbossili rappresentano le posizioni ed i residui di catene carboniose (in senso lato) preesistenti alla ossidazione, l'ottenimento di (II) è evidentemente in accordo con la teoria della melanogenesi da ossindoli; i carbossili in 2 e in 3 possono infatti rappresentare i residui di quello che, all'origine, costituiva il nucleo benzenico dell'ossindolo.

Per tale ragione, abbiamo voluto esaminare, al confronto con la sepiomelanina, il comportamento di una tipica melanina biosintetica, che preparammo per azione dell'ossigeno, a temperatura, ordinaria, su di una soluzione di tirosina in tampone di borato a pH 8,1, in presenza della tirosinasi contenuta nel succo fresco e centrifugato delle buccie di patata⁽¹⁵⁾. Come per la sepiomelanina, la *tirosinomelanina* grezza ottenuta fu purificata con i soliti trattamenti idrolitici (30 % di resa sulla tirosina)⁽¹⁶⁾ e poi trasformata in *acidi tirosinomelanici*; infine questi vennero ossidati con permanganato alcalino. Non fu però possibile rilevare alcuna formazione di acido pirroltricarbonico⁽¹⁷⁾.

Non è quindi a quello stesso precursore conducente alla tirosinomelanina biosintetica, che la sepiomelanina deve la sua capacità di fornire l'acido (II); ciò, mentre non esclude una eventuale partecipazione di precursori ossindolici di costituzione diversa da quella del suddetto, rende ancor più evidenti le manchevolezze delle nostre conoscenze in questo campo e quindi la necessità di interpretare con molta cautela i troppo pochi dati sperimentali in nostro possesso. Per quanto ci riguarda, possiamo solo limitarci a sperare che le ricerche tuttora in corso – e specialmente quelle sugli acidi sepiomelanici solubili – aiutino a gettare qualche luce su questo oscuro problema strutturistico.

(15) Cfr. H. S. RAPER, « Bioch. J. », 17, 454 (1923); F. KUBOWITZ, « Bioch. Zeitschr. », 292, 224 (1937); 299, 36 (1938).

(16) In una prova parallela, condotta con il solo succo di patate diluito con tampone di borato, si ottenne pure un pigmento bruno, ma in una quantità del 3 % soltanto di quello ottenuto in presenza di tirosina.

(17) In tale esperienza, siano partiti da 5 g. di tirosinomelanina purificata; quantità non grande, ma più che sufficiente all'isolamento e alla identificazione dell'acido (II), del quale si sarebbero dovuti ottenere per lo meno 20-30 mmg.

Botanica. — *Determinazione dei coni e sessualità in « Pinus halepensis »* Mill^(*). Nota di ELEONORA FRANCINI, presentata^(**) dal Socio A. CHIARUGI.

In *Pinus halepensis* Mill. ⁽¹⁾ i primi anni di vita sono esclusivamente vegetativi; molto precocemente cominciano a comparire qua e là i coni femminili; in un alberello ancor giovane ma già di normale forma le pine si trovano per lo più sui rami vigorosi intermedi, mentre la parte più alta della chioma rimane vegetativa. In un secondo momento i rami più periferici, inferiori, cominciano a produrre conetti maschili. In seguito, mentre la sessualità femminile conquista l'apice della chioma, la sessualità maschile si porta sempre più in alto, e si hanno rami ♀ e ♂ gli uni accanto agli altri (fig. 1). Negli alberi vecchi, infine, la sessualità maschile tende ad invadere tutti i rami, anche quelli che avevano cominciato il loro sviluppo sul tipo femminile (Pratt) ⁽²⁾. Io stessa ho veduto in piante grandi, ma ancora in piena efficienza, che i rami bassi, penduli, sottili ed uniformi, molto ricurvi e con poche foglie di aspetto senescente, che spesso si trovano nelle piante adulte, sono maschili. Questi rami talvolta sembrano addirittura quasi secchi, portati da un ramo principale fortemente ricurvo sul tronco ed alla fine dell'inverno mostrano due annate di foglie, giallastre anche quelle più recenti; eppure su di essi sono abbondanti i coni maschili che daranno polline nella veniente primavera. Dunque possiamo dire che il pino, pianta monoica nell'età adulta, è femminile nella età giovanile e maschile in vecchiaia. Ciò equivale a dire che il sesso femminile corrisponde ad una fase vigorosa dell'albero, mentre con il decadimento della pianta si esalta il sesso maschile.

All'evoluzione della sessualità nel tempo corrisponde una simile evoluzione nello spazio. In un ramo vigoroso della fase pienamente adulta, che porti rami sia ♂ che ♀, si notano fra questi le seguenti differenze (fig. 1):

Portamento: rami ♂ meno diritti dei rami ♀.

Grandezza dell'accrescimento: minore e più uniforme nei diversi anni per i rami ♂ rispetto ai ♀; esempio: ramo di 10 anni ♂ cm. 35 di lunghezza, mm. 4,5 di diametro alla base, ramo di 10 anni ♀ cm. 50 di lunghezza, mm. 10 di diametro alla base.

Modalità di accrescimento: nei rami ♀ si ha una prima fase di allungamento dell'asse del macroclado, seguita da una seconda fase di sviluppo dei brachicladi, che risultano così distanziati fra loro; nei rami ♂ non si ha

(*) Dall'Istituto Botanico della Università di Bari.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) Osservazioni condotte su esemplari crescenti a Bari e soprattutto nella pineta litoranea di Patemisco Gallio, presso Taranto.

(2) H. PRATT, 1936. *Sur la correspondance entre la structure des pousses des pins et les cycles saisonniers*. Dal « Livre Jubilaire dédié au Professeur L. Dianiel ».

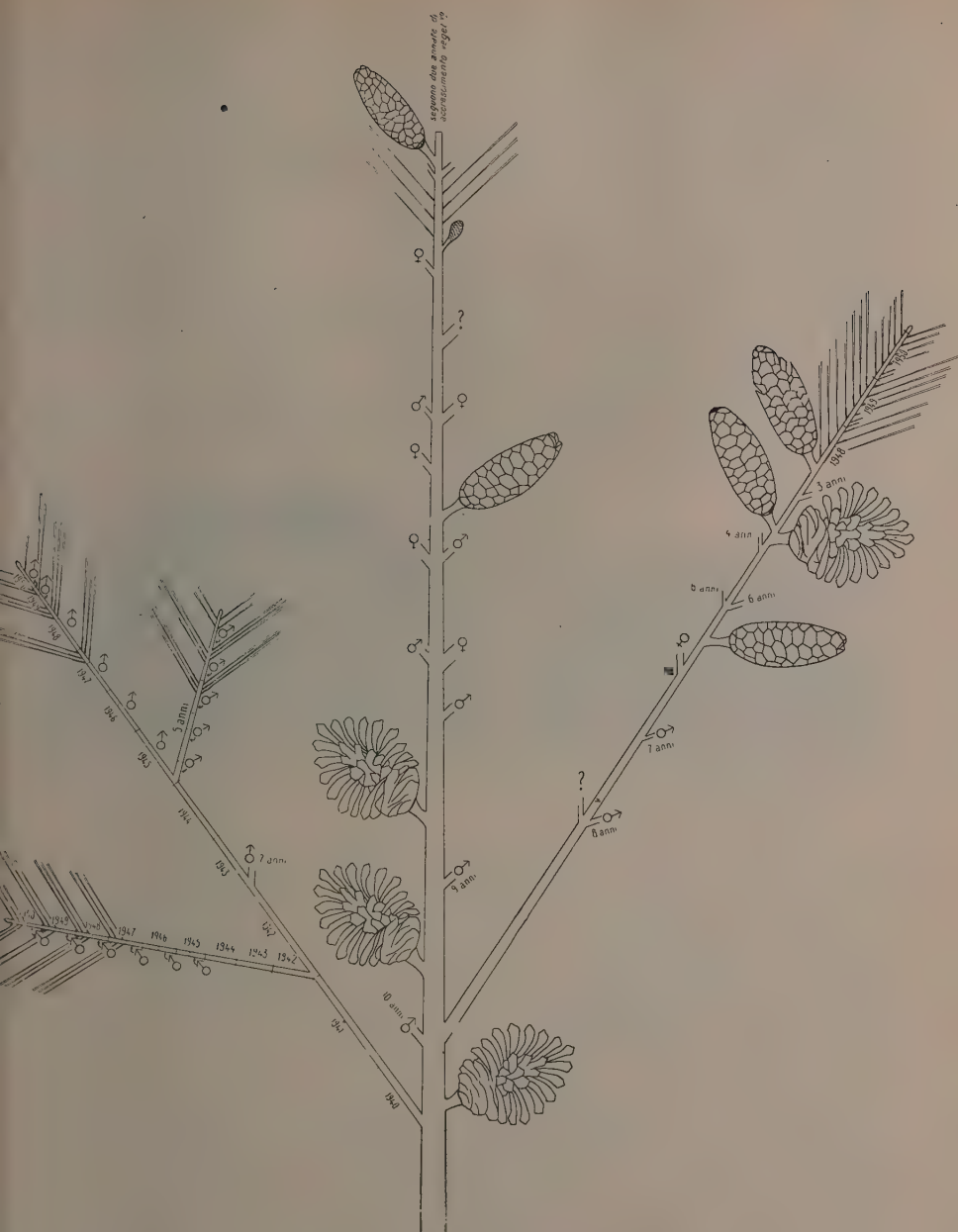


Fig. 1. - Ramo di Pino d'Aleppo di un individuo adulto, al 23 giugno 1950 ($\times 1/4$).

I rami ♀ portano altri rami ♀ e rami ♂. I rami ♂, gracili in partenza, producono solo altri rami ♂. Data la regolarità dell'accrescimento nel ramo ♂ e la sua conformazione quasi schematica (tratto nudo basale; tratto a conif. ♂; tratto a brachiocliadi) è relativamente facile seguire gli anni di un ramo. Più complesso è il ramo ♀, in cui l'accrescimento è meno regolare e la impalcatura più complessa anche nei tratti più semplici (tratto nudo basale; tratto a brachiocliadi; cono o conif. ♀ spesso accompagnati da macrocladi; tratto a brachiocliadi). I rami ♂ e ♀ con ? erano spezzati. Sui rami ♂ sono per lo più presenti quattro generazioni di foglie, mentre sui rami ♀ ne sono presenti tre. Il grande ramo ♂ a sinistra che conta 11 anni, la sessualità maschile è comparsa simultaneamente nell'asse principale e nei rami secondari nel 1945, cioè dopo sei anni da quando il ramo è sorto. Lo stesso dicasi per il secondo ramo ♂ a sinistra, che ha 10 anni di età (non è disegnato per mancanza di spazio). Nel terzo ramo ♂ (primo a destra) che ha 9 anni di età, la sessualità maschile fa la sua comparsa nel 1949. Nei rami ♂ successivi la sessualità maschile è apparsa solo nel 1950. Nel primo grande ramo ♀, che deve avere 10 anni di vita, la sessualità ♂ dei rametti secondari compare nel 1945.

una così netta contrapposizione delle due fasi ed i brachicliadi risultano più avvicinati.

Grandezza delle foglie: le foglie del ramo ♂ tendono ad essere più gracili di quelle del ramo ♀ (fig. 2), ed il loro accrescimento tende ad essere più lento.

Persistenza delle foglie: il ramo ♂ tende a portare per lo più le foglie quattro anni, mentre il ramo ♀ solo tre anni.

Colore delle foglie. Ho spesso notato, per quanto ci si può fidare di simili osservazioni ad occhio senza la possibilità di un controllo con appositi strumenti, una diversa tonalità di colore delle foglie, che nel ramo ♀ tendono ad essere lievemente più verdi (con sfumatura-gialla) e nel ramo ♂ lievemente più grigiastre (con sfumatura glauca).

Vi è poi una differenza fra rami ♀ e rami ♂ intrinseca alla loro stessa natura: i rami forti ♀ producono rami deboli ♂ ed altri forti ♀; i rami de-

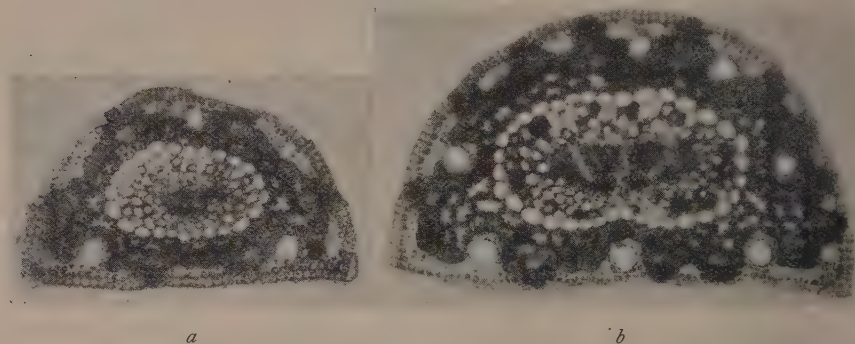


Fig. 2 *a* e *b*. - Sezione trasversale a due terzi della lunghezza di una foglia di ramo ♂ (*a*) e di una foglia di ramo ♀ (*b*) di uno stesso individuo, al 1° luglio 1950 ($\times 80$; ripr. 2/3).

Nel ramo ♂ le foglie erano rappresentate da sedici coppie di aghetti, di cm. 5,2 ca., verde tenero, ancora appressati gli uni agli altri; le foglie 1950 erano rappresentate da sedici coppie di aghetti, e cominciavano ad avere chiazze prive di clorofilla; le foglie 1949 erano rappresentate da quindici coppie di aghetti ed erano ancor più minutamente chiazzate di giallo, con le punte giallastre, qualcuna gialla addirittura; le foglie 1948 erano ancor più gialle, e ne restavano 12 coppie, essendo qualche coppia già caduta. Nel ramo ♀ si avevano 32 coppie di aghetti, lunghi cm. 8 ca., verde meno tenero, più distanziate ed aperte. Le foglie 1950, su per giù in egual numero, erano un po' gialle in punta, ma più verdi delle corrispondenti maschili; del 1949 erano rimaste solo 4 coppie.

boli ♂, per la loro stessa gracilità, non possono produrre che altri rami deboli ♂, in quanto la sessualità maschile non li invade fino a che non hanno raggiunto un certo grado di gracilità, che di per se stessa esclude la possibilità della sessualità femminile (cfr. spiegazione fig. 1).

La netta differenza del vigore dell'accrescimento nei due tipi di rami, si rivela ancor più che in un individuo adulto, come quello della fig. 1, in individui già ampiamente monoici, ma ancora in fase giovanile, come quello della fig. 3. Quivi i rami ♀ hanno la tendenza allo sviluppo multinodale (fig. 3), cioè all'aggiunta alla prima gettata primaverile (che rappresenta lo svolgimento delle strutture che erano preparate nella gemma l'autunno precedente) di una seconda ed anche di una terza gettata, che rappre-



Fig. 3. — Produzione del 1950 (al 23 giugno 1950) di un ramo ♀ di un individuo giovane
($\times 1/3$).

Nei tre rami basali sono rappresentate soltanto in parte le coppie di aghetti per mancanza di spazio; le altre coppie sono rappresentate dalle sole guaine basali. Le foglie di una gettata sono bruscamente più brevi di quelle della gettata precedente e più lunghe di quella della gettata successiva.

sentano intere neoformazioni, mentre nei rami ♂ tale tendenza è assolutamente ridottissima. In un albero giovane, i rami ♀ mostrano le diverse gettate che in uno stesso momento sono in fasi assai diverse di svolgimento, ciò che esclude nel clima pugliese una loro sincronizzazione con eventi stagionali, per esempio con periodi secchi (così invece interpreta il fenomeno il Doak)⁽³⁾. Anche in autunno i rami ♀ possono dimostrare, specialmente negli individui giovani, un maggior vigore. Per solito la stagione autunnale non è utilizzata per l'accrescimento (meno che negli individui molto giovani, specialmente nei rami vegetativi), bensì per la differenziazione delle gemme. Però nelle gemme apicali dei rami ♀ dei soggetti giovani si nota



Fig. 4 *a* e *b*. - Confronto fra una gettata primaverile da gemma normale (*a*), al 12 maggio ancora in fase di allungamento dell'asse del macroclado, ed una gettata a quattro nodi (*b*) da gemma che ha subito una notevole complicazione nel periodo autunnale precedente.

(*a* $\times 1/2$; *b* $\times 1/3$).

spesso un inizio di accrescimento con eventuale complicazione della parte superiore. Difficilmente si arriva fino allo svolgimento (incompleto) di qualche brachiclado basale; però la prima gettata della primavera successiva, che può essere anche l'unica, si presenta a più nodi con brachicladi, e pine coetanee (fig. 4 *b*).

L'epoca di differenziazione delle gemme specifiche, e cioè dei coni polliniferi nei rami ♂ e dei coni ovuliferi nei rami ♀, è più precoce, in autunno, per i coni ♂ che per i coni ♀. Vi è inoltre una differenza nel ritmo di sviluppo, se si fa il confronto con gli organi vegetativi omologhi agli uni e agli altri. Le pinette maschili rappresentano iniziali di brachicladi, che hanno

(3) C. C. DOAK, 1935. *Evolution of foliar types, dwarf shoots and cone scales of Pinus*. «University of Illinois Bull.», vol. 32, n. 49.

subito prima il viraggio verso l'organo maschile e poi un'accelerazione nello sviluppo rispetto agli altri brachicliadi. Le pine femminili rappresentano invece una iniziale di macroclado, che ha subito, oltre al viraggio verso l'organo femminile, una battuta di aspetto rispetto ai macrocladi suoi fratelli.

Nelle mie osservazioni, che si sono protratte dal 1947 ad oggi, non ho riscontrato nel pino d'Aleppo in Puglia altro periodo dell'anno per la differenziazione delle gemme a coni ♀ all'infuori di quello autunnale. Generalmente vi è nel getto dell'annata, preparato nell'autunno precedente, un solo nodo a pine (fig. 4 *a*); già però ho detto come vi possono essere più nodi (fig. 4 *b*), con pine tutte coetanee e brachicliadi pressochè delle stesse dimensioni: infatti, per lo speciale accrescimento del pino, che comporta prima l'allungamento del macroclado e poi l'accrescimento dei brachicliadi, la differenza fra gli aghetti basali e quelli apicali è poca. Le gettate successive, che possono esserci e che spesso ci sono negli individui giovani (fig. 3), non hanno mai portato pine, nei casi da me osservati. Al contrario di me, il Pratt (loc. cit.) ha osservato la deposizione successiva delle pine femminili ai nodi neoformati nel corso della primavera-estate, in diverse specie a crescita multinodale, fra cui anche *Pinus halepensis*. Ciò porta l'Autore a dire che « l'axe d'un rameau de Pin... comporte la répétition indéfinie d'étages tous construits sur le même type (par exemple, écailles stériles, pousses courtes, cônes femelles) chacun constituant un cycle morphogénétique dont la composition est commandée par des facteurs essentiellement internes... ». Quindi il meccanismo è indipendente dalle stagioni e la morfogenesi dei pini può aggiustarsi alle stagioni, soltanto in quanto il riposo invernale è, nei nostri climi, il grande regolatore dell'accrescimento: « Alors la période de repos interviendra, interrompant le développement du rameau après le déroulement d'un nombre entier de cycles morphogénétiques; ceci à la façon d'un échappement à ancre d'horloge, qui laisserait passer selon les cas 1, 2 ou 3 dents de la roue dentée ».

Sono d'accordo col Pratt che il fenomeno della formazione delle pine sia legato a cause interne; però non mi pare che gli si possa dare il valore di un « passo necessario o comunque regolare nelle crescite multinodali, indipendentemente dalla stagione ». Non per niente ho riscontrato frequentemente crescite multinodali, senza aver mai veduto in esse delle pine. La formazione di pine fuori della loro stagione mi sembra piuttosto un evento eccezionale e come tale lo segnala il Gates ⁽⁴⁾ per *Pinus banksiana* nel 1923; e poichè i coni ♂ si formano una sola volta (anche in *P. banksiana*, dove sono portati sullo stesso ramo dei ♀, lo spazio basale loro destinato di ogni gettata sovrannumeraria era vuoto) e spolverano il polline all'inizio della stagione vegetativa, la formazione successiva di coni ♀ è un fenomeno anormale nel ciclo annuale della specie.

(4) F. C. GATES, 1924. *Three sets of megasporangiate cones for year in Pinus*. « Bot. Gaz. », vol. 77, pp. 340-342.

Il rapporto fra differenziazione delle pine e stagione autunnale mi sembra molto importante, e lo prova il fatto che le eventuali gettate successive alla prima, che si abbozzano nella gemma apicale dei rami ♀, possono tutte portare pine. Tuttavia in questa corrispondenza non vedrai un rapporto diretto, bensì indiretto. Il differenziarsi delle pine è, a me pare, in relazione con il ciclo di differenziazione delle foglie. Esso avviene quando le foglie dell'annata hanno raggiunto una certa maturità; nel frattempo quelle del secondo anno hanno trascorso un certo periodo di completa maturità. Il pino porta le foglie più di due anni, e poi impiega a eliminarle ancora un anno o due. Questa lentezza del ciclo foliare è comprensibile in una pianta dal lento svolgersi di tutti i processi vitali e che, ad esempio, interpone più di un anno fra impollinazione e fecondazione; non può meravigliare in generale in una Gimnosperma. Un clima come quello pugliese con la sua siccità estiva che interviene molto precocemente, impone un notevole rallentamento e forse una stasi nella evoluzione della foglia durante l'estate e probabilmente per questo non ho mai trovato pine nelle gettate sovrannumerarie primaverili-estive.

Sul comportamento e sulla diversa composizione della chioma di *Pinus silvestris* fra luglio e settembre nei dintorni di Mosca si hanno dati assai interessanti di Chelyadinova e di Savina ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾:

	Luglio	Settembre
Aghi dell'anno in corso	11-18 %	33 %
Aghi del secondo anno	29-40 %	38 %
Aghi del terzo anno	29-40 %	23 %
Aghi del quarto anno	16-19 %	6 %

(Chelyadinova)

Il cambiamento della situazione prima e dopo l'estate, cioè prima e dopo il completo accrescimento delle foglie dell'annata, è molto evidente e può avere molto peso nella determinazione delle pine. L'importanza delle foglie adulte per la differenziazione dei fiori è stata messa in chiara evidenza per altre specie, come ad esempio l'olivo ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾.

Anche per quanto riguarda la sessualità nei rami in un individuo adulto, e nella intera pianta in un individuo molto giovane o molto vecchio, possono

(5) A. I. CHELYADINOVA, 1941. *Amount and character of development of needles in Pinus plantations*. Resoconto in « Forestry Abstracts », vol. VII, 1945-46, n. 619, p. 157 del lavoro pubblicato in russo in: « Trud. vsesoyuz. nauchnoissledov. Inst. lesnogo Khoz. 'VNIILKH' », n. 21, 1941 (30-50).

(6) A. V. SAVINA, 1941. *Research on the influence of thinnings on the light régime and rate of assimilation in a Pine plantation*. Resoconto in « Forestry Abstracts », vol. VII, 1945-1946, n. 750, p. 184 del lavoro pubblicato in russo in: « Trud. vsesoyuz. nauchnoissledov. Inst. lesnogo Khoz. 'VNIILKH' », n. 21, 1941 (5-29).

(7) A. MORETTINI, 1951. *Influenza della defoliazione anticipata su la fioritura e la fruttificazione dell'olivo*. « Ann. della Sperimentazione Agraria », n. s., vol. 5, n. 3.

(8) E. FRANCINI, 1952. *Influenza delle foglie sulla sessualità dei fiori di olivo*. « Acc. Naz. dei Lincei », Rendic. Cl. Sc. fis. mat. e nat., vol. 12.

farsi sull'equilibrio foliare considerazioni che richiamano quelle fatte dai russi. Le differenze fra un ramo ♂ e ♀ consistono essenzialmente: 1° in maggior superficie foliare, sia per numero di brachicliadi, sia per dimensioni di un singolo aghetto, del ramo ♀ in confronto a quello ♂; 2° in una percentuale diversa delle diverse generazioni di foglie; 3° forse in una lieve differenza della percentuale dei vari pigmenti del clorocroma (alla quale sarei portata a dare una maggiore importanza, se non dovessi basarmi esclusivamente su valutazioni ad occhio); 4° il tutto regolato da un vigore assai maggiore del ramo ♀, che porta ad un più rapido sviluppo, ad un più lungo protrarsi della maturità della foglia e ad una più pronta eliminazione delle foglie vecchie. Queste disparità dei rami ♀ e ♂ è osservazione antica e il Meehan ⁽⁹⁾ già nel 1896 propose una « legge della sessualità » per le Conifere, secondo la quale il sesso viene determinato dal vigore del ramo su cui i coni sono portati. Questo vigore, a mio avviso, ha importanza soprattutto per le conseguenze che porta sulla superficie e composizione foliare. Savina (loc. cit.) rileva che il fogliame di *Pinus silvestris* del secondo anno ha un ritmo di assimilazione più alto del fogliame del corrente anno, ciò che conferma la lentezza della maturazione delle foglie del pino che richiedono due anni per raggiungere la completa efficienza; che la quantità del fogliame per albero varia direttamente col diametro del fusto; che ha molta importanza per la quantità delle foglie la quantità della luce, in quanto rami bene illuminati hanno il 55 % del loro peso in fogliame, mentre i rami che crescono all'ombra ne hanno il 75 %. Chelyadinova (loc. cit.) riporta che il livello di altezza nella corona è il fattore determinante nello sviluppo degli aghi, che variano in grandezza secondo l'intensità della luce; e, osservazione che potrebbe essere molto importante per l'evoluzione della sessualità nel tempo; gli aghi del secondo anno nella corona di un pino di 14 anni hanno area media più piccola di quelli di un pino di 40 anni. Potrebbe avere importanza per la distribuzione della sessualità nello spazio l'osservazione che in una piantagione di 14 anni, come in una di 40, il rapporto fra il peso degli aghi ed il peso del ramo decresce con la maggiore età del ramo e l'altezza della corona.

In definitiva, la particolare conformazione del ramo, in rapporto alla sua posizione sull'albero e ad un fattore ambientale della massima importanza quale la luce, determinando una data configurazione foliare, determinerebbe non solo il viraggio degli apici vegetativi verso la formazione degli organi della riproduzione, ma anche il sesso di essi; ciò avrebbe una importanza così determinante, da sorpassare in molti casi le stesse leggi dell'omologia: non posso riportare qui per brevità la letteratura sugli aggruppamenti di numerosi coni femminili, di cui io stessa ho incontrato tre casi, nei quali è chiaro che sono state le iniziali dei brachicliadi a dare le pine e non le iniziali dei macrocladi; e neppure quelle dei casi di coni bisporangiatì dipendenti probabilmente dal fatto che si era al limite dell'equilibrio. La

(9) T. MEEHAN, 1896. *Sexual law in the Coniferae*. « Proceed. Acad. of Nat. Sci. of Philadelphia », May 1896.

valutazione dei caratteri somatici, che possono verificarsi in rapporto ad un dato sesso, non può quindi essere fatta nelle piante con i criteri che si adottano per gli animali, in cui le gonadi sono a determinazione precoce, ed i caratteri sessuali secondari o sono determinati dallo stesso meccanismo che determina le gonadi (come per gran parte di quelli degli Artropodi) oppure sono indotti dalle gonadi stesse (come per gran parte di quelli dei Vertebrati)⁽¹⁰⁾. Nelle piante gli organi sessuali, a comparsa tardiva ed eventualmente rinnovata anno per anno, ed i caratteri somatici che li accompagnano sembrano essere piuttosto i determinanti degli organi stessi che non a loro concomitanti e tanto meno conseguenti. In altri termini il genotipo controlla il sesso attraverso il controllo di questi caratteri, i quali d'altronde possono essere fortemente influenzati dall'ambiente, a cui essi sono tanto da vicino legati.

Fisiologia. — *Modificazioni del potenziale di lesione del miocardio sottoposto allo stiramento*^(*). Nota di XENIA MACHNE e GIUSEPPE TONINI, presentata^(**) dal Corrisp. G. C. PUPILLI.

Abbiamo creduto utile esaminare il comportamento della polarizzazione del miocardio sotto l'influenza dell'allungamento passivo. A questo riguardo si conoscono soltanto i dati ottenuti da Segers⁽¹⁾: la distensione delle pareti del cuore, ottenuta con l'aumento della pressione intracavitaria, provoca una diminuzione della polarizzazione del miocardio; se la distensione è progressiva, si nota che la polarizzazione diminuisce dapprima rapidamente e poi sempre più lentamente.

Le ricerche sono state eseguite sul ventricolo di *Emys orbicularis*. Lo stiramento del miocardio veniva effettuato col dispositivo già usato e secondo le norme seguite da Machne⁽²⁾ per lo studio delle modificazioni dell'eccitabilità del miocardio durante l'allungamento passivo.

La polarizzazione veniva misurata mediante il seguente dispositivo. Gli elettrodi erano collegati con un oscillografo elettromagnetico, a scrittura diretta; un altro collegamento permetteva di stabilire, mediante un tasto, il corto circuito tra i due elettrodi. Erano inoltre intercalati, tra elettrodi e oscillografo, un condensatore del valore di 5000 μF e una resistenza del valore di 1 M Ω : il primo, allo scopo di eliminare eventuali impulsi ad alta frequenza che si generano durante l'apertura e la chiusura del tasto; la seconda, per evitare la polarizzazione degli elettrodi allorché il fenomeno non veniva registrato. Per ridurre i potenziali del tessuto, è stata inserita

(10) Cfr. G. MONTALENTI, *Elementi di Genetica*. Cappelli, Bologna.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) M. SEGERS, « Acta biol. belg. », 1, 26 (1940).

(2) X. MACHNE, « Arch. Sci. biol. », 34, 1 (1950).

tra i due conduttori una resistenza del valore di 50000 Ω . Tale dispositivo rende agevole l'uso dell'oscillografo anche per la misurazione di potenziali stabili. Le misure della polarizzazione del tessuto venivano fatte chiudendo temporaneamente il tasto, vale a dire provocando il corto circuito all'ingresso: era registrata la rapida variazione di potenziale così generatasi; l'apice della curva registrata, segna il valore del potenziale del tessuto. Il metodo descritto è particolarmente utile, data la rapidità con cui permette di compiere le misure, per indagare la polarizzazione di un organo che, come il cuore, presenta un'attività ritmica che comporta variazioni della polarizzazione del tessuto. I valori assoluti dei potenziali si ricavano comparando l'ampiezza delle curve derivate dal miocardio con quelle registrate immettendo nell'oscillografo, attraverso il medesimo dispositivo, potenziali noti. La variazione minima valutabile era di 0,5 mV. Gli elettrodi erano in argento clorurato per elettrolisi; essi venivano posti a contatto con la parte marginale del ventricolo, ove le fibre sono orientate parallelamente [cfr. Machne ⁽²⁾]. L'elettrodo a polo negativo veniva applicato, più in basso e a distanza di 3-4 mm da quello positivo, sulla zona lesa; la lesione consisteva in una cauterizzazione del tessuto. Le misure venivano fatte durante la fase di riposo del cuore.

Ogni esperimento era eseguito a temperatura costante, tra 15° e 20° C; entro questi limiti, la temperatura non influisce in modo apprezzabile sull'andamento dei fenomeni. Si è dovuto tener conto del fatto che il potenziale di lesione decresce spontaneamente nel tempo: in esperimenti collaterali si è constatato che il decremento è rapido nei primi 20 minuti; poi, il valore del potenziale si abbassa lentamente, scendendo nei successivi 30 minuti a un massimo corrispondente al 10 % del valore ch'esso ha al 20° minuto dopo la lesione. L'esame delle variazioni del potenziale di lesione aveva inizio, nei nostri esperimenti, 20 minuti dopo aver praticato la lesione; la durata di ogni esperimento non superava mai 30 minuti.

In ogni singola esperienza si procedeva come segue: il preparato veniva sottoposto ad allungamenti progressivi (in numero da 5 a 10) fino a quello massimo, procedendosi ogni volta alla registrazione dell'effetto in esame.

L'allungamento passivo del miocardio fino al 50 % della sua lunghezza iniziale, ne abbassa il valore del potenziale di lesione. La discesa del potenziale di lesione per opera dello stiramento, è assai rapida in confronto con quella spontanea nel tempo. Per preparati diversi le variazioni della polarizzazione dipendono quantitativamente dai rispettivi valori iniziali.

La variazione della polarizzazione è massima per effetto degli stiramenti iniziali e decresce progressivamente coll'aumentare della lunghezza relativa assunta dal miocardio.

Prendiamo in esame il comportamento della polarizzazione del miocardio durante l'allungamento passivo, in relazione alle modificazioni che subisce la sua eccitabilità. Uno di noi [Machne ⁽²⁾] ha notato precedentemente che la variazione della cronassia è espressa da valori massimali per lunghezze relative assunte dal miocardio tra 1,19 e 1,30. Si rileva che la

relazione che intercorre tra le modificazioni della polarizzazione e le variazioni dell'eccitabilità del tessuto, è diversa nel miocardio e nel muscolo scheletrico. Infatti la influenza dello stiramento tanto sulla cronassia [Pupilli ⁽³⁾], quanto sul potenziale di polarizzazione [Jacob ⁽⁴⁾], come pure sui processi di termoelettricità [Meyer e Picken ⁽⁵⁾] e il pH cellulare [Dubuisson ⁽⁶⁾], è massima in corrispondenza della zona degli allungamenti intermedi, nella quale l'orientamento del sistema elastico del muscolo si realizza al massimo. I dati relativi all'orientamento del sistema elastico del muscolo scheletrico durante lo stiramento, sono stati dedotti da Meyer e Picken ⁽⁵⁾ dal comportamento dell'entropia del sistema durante l'allungamento isoterma del muscolo. Sul fondamento dell'analogia che vi ha tra la curva del pH cellulare e quella del potenziale di allungamento, Jacob ⁽⁴⁾ ha ritenuto che l'abbassamento del potenziale di polarizzazione del muscolo scheletrico sottoposto allo stiramento sia la conseguenza di una modificazione della struttura tessutale; esso esprimerebbe una diminuzione della selettività nel passaggio d'ioni attraverso le interfasi che limitano le parti elastiche e contrattili del tessuto. Tale diminuzione dovrebbe attribuirsi, secondo l'Autore, a una diminuzione nell'attività dei gruppi negativi della miosina, proteina che è ritenuta la struttura rappresentante il sistema elastico e quello contrattile del muscolo [Dubuisson ⁽⁶⁾].

Non ci è noto, per ora, in quale zona di allungamento si realizza al massimo l'orientamento del sistema elastico del miocardio. Risulta tuttavia, in modo palese, che la polarizzazione subisce la massima variazione in quella zona di lunghezze relative del miocardio, nella quale è minimo l'orientamento del suo sistema elastico. Lundin ⁽⁷⁾, confrontando l'andamento delle curve della tensione sviluppata dal miocardio e dal muscolo scheletrico in riposo, in funzione degli allungamenti ad essi imposti, ha osservato che per allungamenti fino al 20 % il valore della tensione aumenta più rapidamente nel miocardio che nel muscolo scheletrico; da questa constatazione egli ha dedotto che alla lunghezza di equilibrio (lunghezza alla quale la fibra comincia a sviluppare una tensione) la fibra miocardica dev'essere meno « preorientata » che la fibra del muscolo scheletrico. Se vogliamo ammettere che nel miocardio come nel muscolo scheletrico, l'abbassamento della polarizzazione esprima una modificazione strutturale, si può pensare che la variazione della polarizzazione dipenda, anzi che dal grado raggiunto dall'orientamento del sistema elastico, dall'ampiezza delle variazioni che subisce l'orientamento medesimo per effetto dello stiramento.

(3) G. C. PUPILLI, « Arch. Sci. biol. », 30, 282 (1944-45).

(4) J. JACOB, « Arch. int. Physiol. », 52, 417 (1942).

(5) K. H. MEYER a. L. E. R. PICKEN, « Proc. roy. Soc., London (B) », 124, 29 (1937).

(6) M. DUBUISSON, « Arch. int. Physiol. », 50, 203 (1940).

(7) G. LUNDIN, « Acta physiol. scand. », 7, Suppl. 20 (1944).

Fisiologia. — *Studio comparativo delle proteine del muscolo scheletrico di Coniglio nell'avitaminosi E e nell'inanizione cronica*^(*).
Nota di PAOLO CREPAX, presentata^(**) dal Corrisp. G. C. PUPILLI.

Aloisi e Collaboratori [1] hanno dimostrato che la distrofia muscolare da avitaminosi E si accompagna a modificazioni importanti delle proteine contrattili del tessuto⁽¹⁾. La quantità di actomiosina e di miosina, propriamente detta, estraibile dai muscoli distrofici diminuisce assai, fino ad aversi assenza completa di quest'ultima nei liquidi di estrazione; sia la miosina sia l'actina si presentano inoltre qualitativamente mutate. Tali costituenti sarebbero colpiti in modo relativamente elettivo in quanto le loro alterazioni sono ben manifeste quando ancora risultano immutati altri costituenti, come per esempio quello a birifrangenza negativa delle miofibrille.

Gli esperimenti elettroforetici che ho eseguito su estratti proteici totali ottenuti da muscoli di Coniglio in avitaminosi E, mi permettono di precisare certi aspetti dei fatti surriferiti: per questo ritengo opportuno di rendere noti alcuni dei miei risultati, sebbene vari lati della questione richiedano un ulteriore esame. Nel corso delle mie osservazioni avevo notato quale grave scadimento delle condizioni generali presentino gli animali sottoposti ad avitaminosi E; e mi proposi quindi di stabilire prima di tutto se e in quali limiti le alterazioni proteiche dei muscoli distrofici presentassero analogia con quelle di muscoli di animali sottoposti ad inanizione cronica. Di tali esperimenti riferisco nella presente Nota.

In una pubblicazione precedente ho descritto alcune alterazioni dei miogeni, che dipendono dallo stato di nutrizione (Crepax [2]). Al presente sto eseguendo ricerche sugli effetti della inanizione acuta, i cui risultati farò noti in una comunicazione ulteriore: per altro fin d'ora faccio presente che le modificazioni osservabili in tale condizione sperimentale differiscono in grado notevole da quelle proprie dei muscoli di animali in inanizione cronica, conformemente a quanto si osserva per altri effetti biochimici e fisiologici del digiuno (Gigante [3]; Famiani e Sediari [4]; Infantellina e Rubino [5]). La proprietà più caratteristica dei muscoli di Conigli sottoposti a inanizione acuta, è certamente rappresentata dalla rapidissima formazione di actomiosina: questo processo che richiede nel muscolo normale 16-24 h a temperatura di stanza (Banga e Szent-Györgyi [6]; Guba [7]; Crepax [8]), è praticamente istantaneo in tali muscoli a 20°C. Il fenomeno

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Biologia generale dell'Università di Liegi.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) È strano come lo studio di questo problema, il cui interesse appare a chiunque consideri l'importanza che hanno le alterazioni muscolari nel quadro dell'avitaminosi E e le proteine nel processo di contrazione, sia stato relativamente trascurato (Aloisi e Collaboratori [1]).

si spiegherebbe con l'idrolisi assai rapida dell'ATP, riferibile a sua volta all'impoverimento delle riserve glicidiche del muscolo [Kalckar [9]; Bate-Smith e Bendall [10]; Bate-Smith [11]; Crepax [12]]. La quantità di proteine estraibili non è diminuita in modo notevole e inoltre non si nota aumento della mioalbumina.

Ho eseguito le analisi elettroforetiche (in numero di 28), esaminando sistematicamente i diversi estratti di muscolo sia a forza ionica debole (0,15) sia a forza ionica elevata (0,35). I muscoli prelevati subito dopo l'uccisione degli animali venivano congelati, sezionati mediante microtomo e sottoposti a estrazione (per 1 h, a 20°C) con soluzioni contenenti Na_2HPO_4 , NaH_2PO_4 e NaCl, di pH 7,0 e di forza ionica 0,15 ovvero 0,35 aggiunte in ragione di 2 ml per g di muscolo. Dopo centrifugazione (10 min a 6000 giri per min) gli estratti venivano dializzati per 48 h a 20°C in tubi di cellophane. L'analisi era effettuata mediante un apparecchio di tipo Tiselius-Longsworth (Dubuisson, Distèche e Debot [13]), le misure di pH mediante un elettrodo di vetro del tipo di Mac Innes (Mac Innes e Belcher [14]) e dell'elettrometro a triodi di Dubuisson e Debot [15]. L'azoto proteico degli estratti veniva determinato con il metodo di Kjeldahl. L'avitaminosi E era ottenuta alimentando i Conigli con dieta 13 di Goettsch e Pappenheimer [16]. Gli animali vennero uccisi quando la sintomatologia miodistrofica era assai evidente: tranne uno, sacrificato quando i sintomi erano soltanto iniziali, tuttavia già in netta diminuzione del peso corporeo. Fuorché in quest'ultimo caso, in cui furono studiati partitamente estratti ottenuti da singoli gruppi di muscoli delle diverse regioni del corpo, ciascun estratto veniva allestito utilizzando muscoli scheletrici diversi. Negli esperimenti sulla inanizione cronica, gli animali venivano alimentati mediante crusca e verdura fresca, in quantità corrispondente all'incirca alla metà di quella consumata dagli animali di controllo: furono uccisi circa un mese dopo l'inizio dell'esperimento, quando il loro peso era il 55-60 per cento del peso iniziale.

I proteinogrammi di estratti ottenuti a μ 0,15 da muscoli in avitaminosi E, non presentano caratteri che si discostino sensibilmente da quelli normali (fig. 1 A), anche quando il processo distrofico è giunto alle sue fasi più evolute. In particolare è notevole il fatto che non risulta significativamente accresciuta l'ampiezza del gradiente h nè modificato il rapporto tra i gradienti l ed $m + n$: questi fatti, esaminati sul fondamento di osservazioni precedenti (Crepax [2]), portano a chiedersi se la minore quantità di mio geni presente negli estratti di muscoli distrofici (vedi figg. A e C) dipenda da una modificazione della composizione dei muscoli medesimi e non piuttosto dall'aumento relativo del tessuto collagene che accompagna l'atrofia parenchimale ⁽²⁾.

(2) Il procedimento suggerito da Hoagland [17] di valutare la quantità di tessuto contrattile presente nel tessuto in esame dalla percentuale di miosina, è inapplicabile al caso presente e a molti altri (Fischer e Ramsey [18]; Crepax [19]; Schapira e Dreyfus [20]). La determinazione del collagene andrebbe del resto integrata col dosaggio di altri costituenti, la cui quantità e ripartizione è soggetta a variazioni considerevoli, come i lipidi.

Gli estratti ottenuti a μ 0,35 da muscoli in distrofia iniziale (fig. 2 A) differiscono da quelli normali (fig. 2 D) sotto due aspetti. Innanzi tutto essi contengono in sensibile quantità la proteina Y, il cui passaggio in soluzione avviene nel muscolo scheletrico normale di Coniglio domestico solo a μ 0,50 (Dubuisson [21])⁽³⁾. Oltre a ciò nei proteinogrammi (fig. 2 A) si osserva la presenza di un gradiente indicato con la lettera α , che secondo Dubuisson [21, 23] corrisponderebbe ad actina depolimerizzata e che negli estratti di muscoli normali, sarebbe presente solo quando l'estrazione viene effettuata mediante ioduri (Dubuisson [23]), di cui è nota l'azione depolimerizzante sull'actina; esiste dunque nel muscolo distrofico un'alterazione qualitativa dell'actina, come ammettono anche Aloisi e Collaboratori [1].

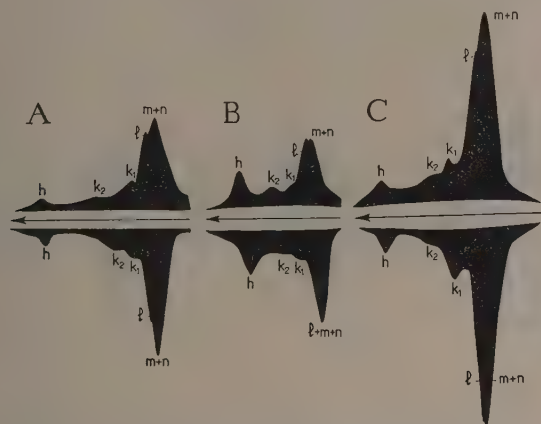


Fig. 1. — Proteinogrammi elettroforetici di estratti di muscoli scheletrici di Coniglio ottenuti a μ 0,15, pH 7,5; 1 h di estrazione con soluzione contenente Na_2HPO_4 0,048 e NaH_2PO_4 0,006 M aggiunta in ragione di 2 ml per g di polpa muscolare.

A: muscolo di animale in avitaminosi E progredita (Esp. 49: 359 min di elettroforesi a 3,1 V/cm; μ 0,15; pH 7,24; N proteico 2,9 mg/ml).

B: muscolo di animale sottoposto a inanizione cronica (Esp. 90: 205 min di elettroforesi a 3,0 V/cm; μ 0,10; pH 7,32; N proteico 2,20 mg/ml).

C: muscolo di animale normale (Esp. 4: 261 min di elettroforesi a 4 V/cm; μ 0,15; pH 7,26; N proteico 3,0 mg/ml).

Gli estratti ottenuti a μ 0,35 da muscoli nei quali il processo distrofico è giunto alle sue fasi estreme, oltre a presentare le particolarità sopra accennate, sono del tutto privi di miosina propriamente detta (fig. 2 B). Le proprietà elettrocinetiche dell'actomiosina sono normali; e lo sono anche quelle della miosina propriamente detta, fino a che essa è presente (fasi iniziali della distrofia).

Le modificazioni della costituzione proteica di muscoli di animali sottoposti a inanizione cronica hanno caratteri diversi da quelli ora descritti.

(3) Condizioni di solubilità analoghe a quelle osservabili nel muscolo distrofico si hanno nei muscoli di Coniglio selvatico (Crepax [22]).

I proteinogrammi di estratti ottenuti a μ 0,15 mostrano uno sviluppo particolarmente notevole del gradiente h (mioalbumina). Inoltre, alla riduzione quantitativa dei miogeni fa riscontro un aumento relativo di l nei confronti di m + n. Questo comportamento è conforme a quanto si osserva ogni qualvolta la quantità dei miogeni diminuisce (Crepax [2]). I costituenti situati in quella zona del proteinogramma che è interposta tra i miogeni e la mioalbumina, aumentano relativamente ai miogeni; tale fatto si osserva anche nel muscolo scheletrico di Coniglio in atrofia da denervazione (Crepax [24]).

Gli estratti ottenuti a μ 0,35 (fig. 2 C) contengono una quantità assai ridotta di actomiosina; il contenuto di miosina propriamente detta è rela-

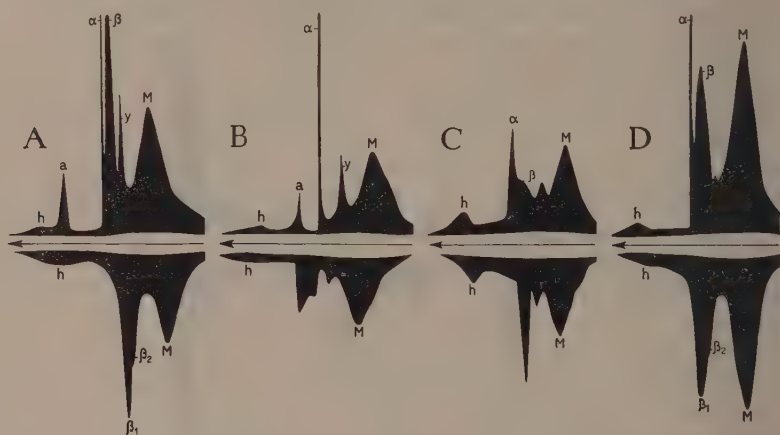


Fig. 2. - Proteinogrammi elettroforetici di muscoli scheletrici di Coniglio ottenuti a μ 0,35, pH 7,5; 1 h di estrazione con una soluzione contenente Na_2HPO_4 0,048 M, NaH_2PO_4 0,006 M; NaCl 0,2 M aggiunta in ragione di 2 ml per g di polpa muscolare.

A: muscolo di animale in avitaminosi E iniziale (Esp. 59: 954 min di elettroforesi a 1,7 V/cm; μ 0,35; pH 6,92; N proteico 4,52 mg/ml).

B: muscolo di animale in avitaminosi E progredita (Esp. 48: 922 min di elettroforesi a 1,90 V/cm; μ 0,35; pH 7,02; N proteico 3,67 mg/ml).

C: muscolo di animale sottoposto a inanizione cronica (Esp. 88: 797 min di elettroforesi a 1,7 V/cm; μ 0,35; pH 7,0; N proteico 2,97 mg/ml).

D: muscolo di animale normale (Esp. 58: 853 min di elettroforesi a 1,7 V/cm; μ 0,35; pH 6,88; N proteico 4,38 mg/ml).

tivamente ancor più ridotto. Le proprietà elettrocinetiche del gradiente interposto tra miosina e miogeni ($-2,0 \times 10^{-5}$ V/cm) non consentono d'identificare tale gradiente con la proteina Y, sebbene la diversa velocità di migrazione del gradiente rispetto a quella della proteina possa dipendere dalla diversa composizione proteica (quantitativa ovvero qualitativa) del mezzo in cui la migrazione avviene. È difficile fare una valutazione precisa della riduzione quantitativa a cui vanno incontro miosine e miogeni, per il fatto che i muscoli atrofici presentano un aumento considerevole del tessuto collagene (vedi nota di p. 440).

Considerate nel loro insieme, le osservazioni descritte dimostrano come la carenza di vitamina E importi alterazioni relativamente specifiche delle

proteine contrattili. Questa conclusione si accorda sostanzialmente coi risultati ottenuti da Aloisi e Collaboratori [1]: il fatto che le proprietà elettrocinetiche dell'actomiosina e della miosina propriamente detta non sono modificate rispetto a quelle delle proteine estraibili dal muscolo normale, non può considerarsi un dato contrario all'esistenza di alterazioni di carattere qualitativo di tali costituenti, dimostrate da tali Autori. In diversi casi, infatti, ho avuto occasione di riscontrare un eguale comportamento elettroforetico di campioni di actomiosina differenziabili tra loro per le caratteristiche di solubilità. Medesimamente, come ho appreso da una comunicazione personale, Hamoir ha riscontrato più volte nel corso delle sue ricerche sulle miosine di Carpa (Hamoir [25, 26 e 27]) un diverso comportamento alla ultracentrifugazione di campioni di actomiosina aventi identiche proprietà elettroforetiche. E la teoria del movimento elettrocinetico rende perfettamente ragione di risultati così fatti (Abramson, Moyer e Gorin [28]; Luetscher [29]).

Le osservazioni circa alla costituzione di muscoli di animali sottoposti a inanizione cronica, dimostrano il carattere singolare delle modificazioni prodotte dalla carenza di vitamina. Resta a vedere se le modificazioni della composizione degli estratti corrispondano a intrinseche alterazioni della costituzione proteica del tessuto ovvero siano dovute, in tutto o in parte, a modificazioni delle condizioni di solubilità e di estraibilità. È questo un problema di ordine affatto generale, che va posto per tutti i risultati ottenuti con lo studio di proteine estratte dai tessuti. Nel caso specifico, Aloisi e Collaboratori [1] propendono a credere che l'assenza di miosina e la presenza di una scarsa quantità di actomiosina negli estratti dipendano da variazioni del loro contenuto nella fibra muscolare; e gli argomenti addotti sono pienamente convincenti. Del resto è da notare che le modificazioni di estraibilità delle proteine osservabili in diversi altri casi (Deuticke [30]; Crepax, Jacob e Seldeslachts [31]) sono relative, cioè a dire non si osservano che con l'impiego di alcuni liquidi di estrazione (Hensay [32]): così la miosina di muscoli contratturati non è estraibile mediante KCl, mentre lo è impiegando LiCl (Bate-Smith [33, 34 e 35], KJ (Dubuisson [21]), $\text{Na}_4\text{P}_2\text{O}_7$, ovvero KCl addizionato di ATP [Crepax [12]). Pertanto il sussistere dell'inestraibilità della miosina nei confronti dell'intera gamma di tali solventi, induce ad ammettere che essa corrisponde realmente alla mancanza del costituente in questione nella fibrocellula.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] M. ALOISI, E. BONETTI, A. ASCENZI, F. MERUCCI e R. FRONTALI-TOSCHI, « Atti Soc. it. Pat. », II, 412 (1951).
- [2] P. CREPAX, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVII, 7 (1951).
- [3] D. GIGANTE, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », XXVII, 311 (1938).
- [4] V. FAMIANI e F. SEDIARI, « Problema alim. », VI, 124 (1943).
- [5] F. INFANTELLINA e F. RUBINO, « Arch. Sci. biol. », XXXV, 26 (1951).

- [6] J. BANGA u. A. SZENT-GYÖRGYI, « Stud. Inst. Med. Chem. Univ. Szeged », I, 5 (1941).
- [7] F. GUBA, « Stud. Inst. med. Chem. Univ. Szeged », II, 3 (1942).
- [8] P. CREPAX, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVI, 1487 (1950).
- [9] H. M. KALCKAR, « J. biol. Chem. », CLIV, 267 (1944).
- [10] E. C. BATE-SMITH a. J. R. BENDALL, « J. Physiol. », CX, 47 (1949).
- [11] E. C. BATE-SMITH, « Adv. Food Res. », I, 1 (1950).
- [12] P. CREPAX, « Biochim. biophys. Acta », VII, 87 (1951).
- [13] M. DUBUISSON, A. DISTÈCHE e A. DEBOT, « Arch. Sci. biol. », XXXV, 251 (1951).
- [14] D. MAC INNES a. D. BELCHER, « J. amer. chem. Soc. », LIII, 3315 (1931).
- [15] M. DUBUISSON et A. DEBOT, « Arch. int. Physiol. », L, 54 (1940).
- [16] M. GOETTSCHE A. A. M. PAPPENHEIMER, « J. exp. Med. », LIV, 145 (1931).
- [17] C. L. HOAGLAND, « Adv. Enzymol. », VI, 193 (1946).
- [18] E. FISCHER a. V. W. RAMSEY, « Amer. J. Physiol. », CXLV, 571 e 583 (1946).
- [19] P. CREPAX, « Arch. Sci. biol. », XXXIII, 362 (1949).
- [20] G. SCHAPIRA et J. C. DREYFUS, *Exposés annuels de Biochimie médicale*, XII sér., p. 303. Paris, Masson et C.^{ie} (1951).
- [21] M. DUBUISSON, « Biochim. biophys. Acta », V, 489 (1950).
- [22] P. CREPAX, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVI, 1490 (1950).
- [23] M. DUBUISSON, « Biochim. biophys. Acta », V, 426 (1950).
- [24] P. CREPAX, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVII, 10 (1951).
- [25] G. HAMOIR, « Bull. Soc. Chim. biol. », XXXI, 118 (1949).
- [26] G. HAMOIR, « Biochem. J. », XLVIII, 146 (1951).
- [27] G. HAMOIR, « Biochem. J. », L, 140 (1951).
- [28] H. A. ABRAMSON, L. S. MOYER a. M. H. GORIN, *Electrophoresis of proteins and the chemistry of cell surfaces*. New York, Reinhold (1942).
- [29] J. A. LUETSCHER, « Physiol. Rev. », XXVII, 621 (1947).
- [30] H. J. DEUTICKE, « Arch. ges. Physiol. », CCXXIV, 1 (1930).
- [31] P. CREPAX, J. JACOB et J. SELDESCHLACHTS, « Biochim. biophys. Acta », IV, 410 (1950).
- [32] J. HENSAY, « Arch. ges. Physiol. », CCXXIV, 44 (1930).
- [33] Cit. da K. BAILEY, « Adv. Prot. Chem. », I, 289 (1944).
- [34] E. C. BATE-SMITH, « J. Soc. Chem. Ind. », LIII, 351 T (1934).
- [35] E. C. BATE-SMITH, « Proc. Roy. Soc. London B. », CX XIV, 136 (1937).

Fisiologia. — *Inibizione della lattazione per opera del p-ossipropiofenone*^(*). Nota di GIOVANNI MANUNTA, presentata^(**) dal Socio G. LEVI.

Negli ultimi anni è stato osservato che la funzione del lobo anteriore dell'ipofisi può essere influenzata non solo dalla concentrazione ematica degli ormoni, la cui produzione è regolata dall'ipofisi anteriore, ma anche da sostanze diverse. La produzione di ormone corticotrofo e quindi di cortisone sarebbe stimolata per esempio dai salicilati (Van Cauwenberge 1951, Muratori e Ramunni 1951) e la secrezione dell'ormone follicolostimolante verrebbe influenzata nella coniglia dall'iniezione di acetato di rame che, come è noto, provoca l'ovulazione (Brooks e coll. 1940, Emmens 1940). Più recentemente

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale e Speciale degli animali domestici e di Chimica Biologica dell'Università di Sassari.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

è stata anche osservata l'azione antigonadotrofa di alcune piante e specie del *Lithospermum Ruderale* che dalle popolazioni indigene dell'America Settentrionale veniva usato per limitare le nascite (Noble e coll. 1950, Plankett e Noble 1951). Per opera specialmente di AA. francesi è stata affermata l'azione « ipofisofrenatrice » del p-ossipropiofenone (P.O.P.F.) (Perrault 1950, 1951). Gli effetti di questa sostanza (non sempre confermati (Paulsen e coll. 1951, Vecchiati e Bertelli 1951)) si avvicinano molto a quelli del *Lithospermum Ruderale* per cui non è escluso che esista una somiglianza tra il P.O.P.F. ed il principio attivo di tale pianta. L'azione più saliente del P.O.P.F. è quella d'inibire la formazione dell'ormone follicolostimolante e di quello tireotrofo, mentre l'ormone corticotrofo e quello luteinizzante non verrebbero influenzati. L'ormone dell'accrescimento verrebbe inibito soltanto a forti dosi e ben poco si sa sull'influenza del P.O.P.F. sulla secrezione lattea. Nella donna Perrault (1951, loc. cit.) ha osservato in alcuni casi tumefazione delle mammelle con accenno alla secrezione lattea che accompagna lo stato pseudogravidico provocato dalla sostanza. Non risulta però che sia stata studiata sperimentalmente l'azione del P.O.P.F. sulla lattazione. La possibile presenza di sostanze anti-ipofisarie nell'alimentazione del bestiame interessa per l'influenza che tali sostanze potrebbero avere non solo sulla sterilità, ma anche sulla produzione lattea.

L'azione del P.O.P.F. sull'ipofisi e sulla lattazione potrebbe dipendere dalla debole azione estrogena del farmaco che secondo i vari Autori è almeno 1.000 volte inferiore a quella del benzoato di estradiolo (Hertz e Tullner 1951, Perrault 1950). Secondo Dodds e collaboratori (1938) 10 mg di P.O.P.F. sono estrogeni per un ratto di 200 gr. Poichè in queste ricerche si sono usate quantità superiori era necessario confrontare l'attività antigalattogenica del P.O.P.F. con quella di una sostanza estrogena con azione corrispondente a quella del P.O.P.F. iniettato.

MATERIALE E TECNICA. — Sono state impiegate n. 6 ratte bianche del peso medio di gr. 170 con rispettive figliate (il numero dei piccoli variava da un minimo di 7 ad un massimo di 10). Dopo due giorni dalla nascita le figliate sono state pesate una volta al giorno sempre alla stessa ora (11). L'iniezione del farmaco veniva praticata sottocute (alle madri) subito dopo la pesata: il P.O.P.F. ⁽¹⁾ veniva somministrato in una dose unica di 50 mg (solo in alcuni casi sono state usate dosi di 25 mg). Il benzoato di estradiolo ⁽²⁾ è stato iniettato in una dose unica di 165 γ , quantità che avrebbe la stessa azione estrogena di 50 mg di P.O.P.F. qualora si assuma per questa ultima sostanza un'azione estrogena 1.000 volte inferiore (100 mg di P.O.P.F. = 100 γ di esestrol = 333 γ di estradiolo benzoato).

L'iniezione del P.O.P.F. è stata ripetuta più volte a distanza di 4-5 giorni mentre l'estradiolo è stato iniettato una sola volta in quattro delle madri.

(1) È stato usato il « Possipione » e l'« Estrofol » gentilmente messi a disposizione dalla Ditta Recordati.

La dieta delle puerpere, per tutta la durata dell'esperimento, era composta di orzo, avena, pane secco, erba fresca, fieno *ad libitum* più piccoli quantitativi di carne bollita.

Affinchè i piccoli durante le manipolazioni conservassero il loro caratteristico odore (dal quale si crede che le madri riconoscano i propri nati che altrimenti vengono uccisi) essi venivano pesati su un foglio di carta tenuto costantemente sotto il rispettivo nido.

RISULTATI. - Poichè gli esperimenti erano fra loro molto simili si riporta, per brevità, in due grafici il comportamento della curva di crescita di due figliate sotto l'azione del P.O.P.F. e dell'estrogeno. Sull'ascissa sono riportati i giorni dalla nascita, sull'ordinata l'incremento ponderale in grammi. Le linee verticali sull'ascissa rappresentano l'entità dell'incremento giornaliero.

Il primo grafico si riferisce ai piccoli (in numero di otto) di una ratte che è stata trattata per tre volte con P.O.P.F. (freccie) nella dose di 50 mg.

Dalla curva di crescita risulta che si può avere dopo 24 ore o una diminuzione del peso della figliata (prima prova) od un rallentamento marcatissimo del ritmo di crescita (seconda e terza prova). Dopo 48 ore la curva riprende il suo andamento normale. La somministrazione di 25 mg del farmaco è senza effetto.

Il secondo grafico si riferisce ai nati (in numero di nove) di una ratte trattata per una volta con 50 mg di P.O.P.F. (prima freccia) ed una volta con 165 γ di benzoato di estradiolo (seconda freccia). Dalla curva di crescita risulta che il P.O.P.F. provoca un rallentamento brusco dell'incremento ponderale analogo a quello di cui al grafico precedente, mentre la somministrazione dell'estradiolo ha avuto sulla curva di crescita soltanto una leggerissima azione depressiva non paragonabile a quella del P.O.P.F.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. - Dagli esperimenti risulta che la lattazione viene inibita dalla somministrazione di 50 mg di P.O.P.F. L'inibizione è di vario grado: infatti in alcuni casi si ha la diminuzione del peso dei poppanti, nella maggior parte dei casi però si nota soltanto un rallentamento abbastanza marcato dell'accrescimento. In rari casi l'iniezione di 50 mg di P.O.P.F. non ha avuto effetto, come è stato sempre senza effetto l'iniezione di 25 mg. Probabilmente la dose di 50 mg rappresenta per un animale di 170 gr. la dose soglia.

L'inibizione della lattazione non è sicuramente dovuta all'azione estrogena del P.O.P.F. in quanto la dose di benzoato di estradiolo avente almeno la stessa azione estrogena ha avuto sull'accrescimento un effetto del tutto differente. Si deve probabilmente anche escludere che il farmaco abbia agito per mezzo della sua azione antitireotrofa in quanto l'effetto sembra troppo rapido ed è noto che nel ratto vi sono delle riserve di ormone tiroideo per cui i sintomi conseguenti alla tiroidectomia compaiono solo dopo un mese dall'intervento. L'ormone corticotrofo non dovrebbe essere interessato come risulta dai dati bibliografici. L'inibizione della secrezione dell'ormone somatotrofo

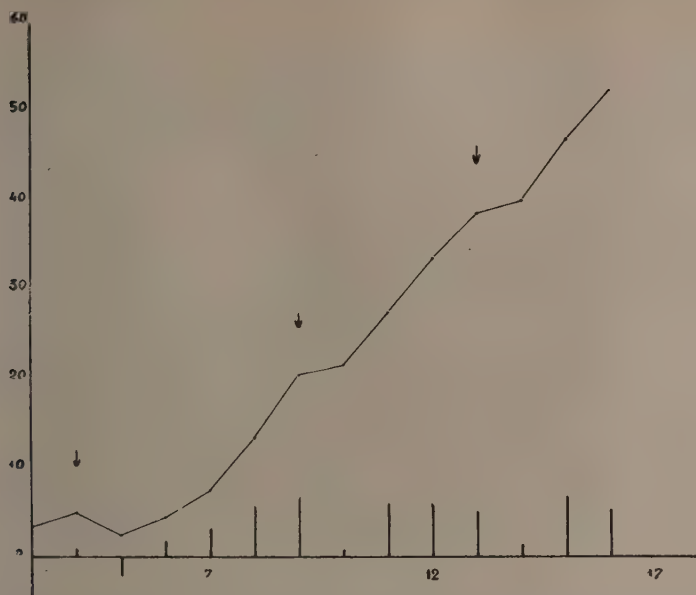


Fig. 1. - Curva di accrescimento ed accrescimento giornaliero (verticali) di una figliata. Freccie: iniezione di 50 mg di p-ossipropiofenone. Ordinata grammi, ascissa giorni dalla nascita.

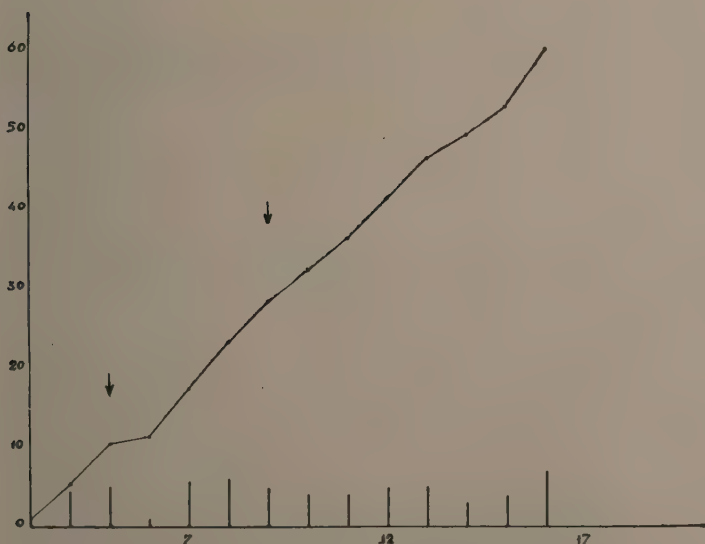


Fig. 2. - Curva di accrescimento ed accrescimento giornaliero (verticali) di una figliata. 1ª freccia: iniezione di 50 mg. di p-ossipropiofenone. 2ª freccia: iniezione di 165 γ di estradiolo benzoato. Ordinata grammi, ascissa giorni dalla nascita.

dei neonati (ammesso che il P.O.P.F. passi nel latte) non può essere invocata come fattore determinante il comportamento della curva di crescita. Questa spiegazione infatti potrebbe essere giustificata nei casi di rallentamento della crescita, ma è insufficiente nei casi di diminuzione di peso dei piccoli. Probabilmente dunque il P.O.P.F. deve aver agito inibendo la secrezione della prolactina materna nonostante che la secrezione di quest'ormone fosse stimolata maggiormente dalla più intensa e continua eccitazione dei recettori del capezzolo, poichè le cure della madre per i piccoli non erano diminuite. La prolactina può forse essere identificata con l'ormone somatotrofo in quanto è noto che l'azione somatotrofa e lattopoietica degli estratti ipofisari non possono essere scisse (Cotes e collaboratori 1949).

Sebbene il P.O.P.F. sia una sostanza poco tossica, in quanto la dose letale per i ratti è di 500 mg per 100 gr di peso vivo (secondo le indicazioni della Ditta Recordati), la dose efficace per inibire la lattazione è abbastanza alta per cui non si può escludere che l'azione non sia specifica, ma dovuta a fenomeni tossici imprecisati. Che si tratti di un fenomeno passeggero è dimostrato dalla ripresa dell'accrescimento normale già dopo 48 ore dall'iniezione. L'azione sull'inturgidimento delle mammelle descritta da Perrault (loc. cit.) per somministrazione prolungata, con un dosaggio relativamente molto più basso di quello usato per questi esperimenti, o è in rapporto ad un'azione diversa della sostanza a differente concentrazione, o si spiega con uno stato luteoide conseguente all'iniezione ripetuta del P.O.P.F. sufficiente da solo a spiegare tale osservazione.

CONCLUSIONI. - Nei ratti l'iniezione di 50 mg di p-ossipropiofenone inibisce transitoriamente la lattazione. Questo effetto non è in funzione dell'azione estrogena del farmaco.

BIBLIOGRAFIA.

- BROOKS C. M., BEADENKOPF e BOJAR, « Amer. J. of Physiol. », 129, 320 (1940).
COTES P. M., GRICHTON J. A., FOLLEY S. Y. e YOUNG F. G., « Nature », 164, 992 (1949).
DODDS E. C., GOLDBERG L., LAWSON W. e ROBINSON R., « Nature », 141, 247 (1938).
EMMENS C. W., « J. Endocrinology », 2, 63 (1940).
HERTZ R. e TULLNER W. W., « Endocrinology », 49, 424 (1951).
MURATORI F. e RAMUNNI M., « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 27, 933 (1951).
NOBLE R. L., PLANKETT E. R. e TAYLOR N. D. G., « Recent Progress in Hormone Research », 5, 263 (1950).
PAULSEN C. A., MORTIMORE G. E. e HELLER C. G., « J. Clin. Endocrinol. », 11, 892 (1951).
PERRAULT M., « La Presse Medicale », 58, 1010 (1950); 59, 353 (1951).
PLANKETT E. R. e NOBLE R. L., « Endocrinology », 49, 1 (1951).
VAN CAUWENBERGE H., « Lancet », 2, 374 (1951).
VECCHIATI R. e BERTELLI R., « Boll. Soc. Lomb. Sci. Med. Biol. », 9, 13 (1951).

Biologia. — *Ricerche per uno studio della determinazione embrionale al livello molecolare.* Nota di SILVIO RANZI, presentata (*) dal Socio S. TONZIG.

Lo studio della Morfologia si è esteso, col progredire dei mezzi di indagine, dalle strutture macroscopiche alle strutture microscopiche quando il microscopio fu introdotto nei Laboratori di Biologia. Oggi un ulteriore passo è in atto con le possibilità di studio della ultrastruttura, delle strutture cioè di dimensioni molecolari che possono essere analizzate coi metodi della chimico-fisica e della microscopia elettronica. È per questo che, dopo aver costruito una morfologia basata sulla struttura delle cellule, oggi i Morfologi tentano di fare una morfologia basata sulle strutture al livello molecolare e, forti dei dati della chimico-fisica che hanno permesso di dare alla molecola una struttura spaziale, prospettano una anatomia su base molecolare.

È pertanto ovvio che la determinazione embrionale, le trasformazioni cioè che subiscono le cellule embrionali per cui si orientano a svilupparsi in un senso piuttosto che in un altro, deve essere posta sulla base delle trasformazioni che avvengono nelle molecole che costituiscono le cellule dell'embrione.

D'altra parte un mezzo per analizzare le forze in atto nel corso dei fenomeni di determinazione embrionale è quello di saggiare i cambiamenti che alcune sostanze, aggiunte ai liquidi di cultura, sono in grado di produrre in questi fenomeni di determinazione. È infatti ben noto che ci sono due gruppi di sostanze che nell'embrione di riccio di mare agiscono le une (la più attiva di tutte è LiCl) inducendo formazione di entoderma a spese di ectoderma presuntivo (vegetativizzazione); le altre (la più attiva è NaSCN) inducendo formazione di ectoderma a spese di entoderma presuntivo (animalizzazione) (1). È possibile ottenere azioni analoghe nello sviluppo dei Vertebrati, così le sostanze vegetativizzanti inducono riduzione della corda dorsale (2) che a sua volta induce ciclopia (3), mentre le sostanze animalizzanti inducono ipersviluppo della corda dorsale che induce ipersviluppo del rombencefalo con formazioni abnormi in questo (4). Alterazioni corrispondenti in altri animali sono state poste in evidenza da parecchi autori (5).

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) P. E. LINDAHL, « Naturwiss. », 29, 673 (1941); E. TAMINI, « Monit. Zool. Ital. », 52, 81 (1941); « Rend. R. Ist. Lombardo (Cl. Sc.) », 76, 363 (1943).

(2) F. E. LEHMANN, « Roux' Arch. », 138, 106 (1938).

(3) G. COTRONEI, « Arch. ital. Biol. », 71, 83 (1922).

(4) S. RANZI u. E. TAMINI, « Naturwiss. », 27, 566 (1939); S. RANZI, E. TAMINI e E. STORARI OFFER, « Rend. Ist. Lombardo (Cl. Sc.) », 79, 161 (1946).

(5) S. RANZI, « Conferenze Centro Biol. Napoli CNR », 47 (1947).

In varie ricerche ⁽⁶⁾ io e i miei Collaboratori abbiamo cercato di vedere quali siano le cause della determinazione embrionale. Abbiamo così posto in evidenza che vi sono differenze del valore dell' rH che seguono i cambiamenti di determinazione ⁽⁷⁾. L'esame della serie delle sostanze animalizzanti e di quelle vegetativizzanti mi fecero però pensare ad un'azione sul grado di dispersione dei colloidi ⁽⁸⁾. Stabilimmo pertanto di studiare come al $LiCl$, al $NaSCN$ e alle sostanze che agiscono come queste reagissero gli estratti embrionali.

Estraemmo pertanto embrioni di Anfibi e di ricci di mare agli stadi nei quali possono venir indotte alterazioni di determinazione e riprendemmo le sostanze estratte in 1 mol. KCl . A questi estratti aggiungevamo $LiCl$, $NaSCN$ e le altre sostanze che agiscono come questi sali fino a portarle a quelle concentrazioni che inducono i cambiamenti di determinazione le cui cause volevamo studiare. Leggevamo poi al viscosimetro i cambiamenti che subiva a viscosità degli estratti per azione delle sostanze che venivano aggiunte.

Queste esperienze dimostrarono che il $LiCl$ e le altre sostanze vegetativizzanti producono un aumento di viscosità degli estratti fino alla concentrazione attiva nel determinare cambiamenti della determinazione e che invece $NaSCN$ e le altre sostanze animalizzanti producono diminuzione di viscosità dei medesimi estratti fino alla concentrazione attiva nell'indurre i cambiamenti di determinazione.

Provvedemmo allora ad un frazionamento degli estratti per isolare le frazioni che presentano queste variazioni di viscosità e, frazionando secondo Lawrence, Miall, Needham e Shen ⁽⁹⁾, trovammo che le frazioni che presentano queste variazioni di viscosità sono l'euglobulina a , l'euglobulina b e la pseudoglobulina, ma non l'euglobulina c la cui viscosità aumenta sia in presenza di $NaSCN$, sia in presenza di $LiCl$. Frazionammo poi secondo Banga e Szent-Györgyi ⁽¹⁰⁾ e vedemmo che la proteina di struttura I e la proteina di struttura II reagiscono: al $LiCl$ aumentando la viscosità, al $NaSCN$ diminuendola, mentre con le proteine solubili la viscosità aumenta con ogni trattamento.

Abbiamo quindi creduto poter individuare in questa diversa reazione delle soluzioni di euglobulina a e b , di pseudoglobulina, di proteine di struttura I e II alle sostanze tipo $LiCl$ e tipo $NaSCN$, una reazione su piano molecolare che avviene durante la determinazione embrionale ⁽¹¹⁾.

(6) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia dell'Università statale di Milano e per la parte di microscopia elettronica presso l'Istituto Superiore di Sanità, condotte con sussidi della Rockefeller Foundation e del CNR e con apparecchi provenienti da fondi ERP.

(7) S. RANZI e M. FALKENHEIM, «Pubb. Staz. Zool. Napoli», **16**, 436 (1937); S. RANZI, «Arch. zool. ital.», **26**, 427 (1939).

(8) S. RANZI, «Boll. Soc. Ital. Biol. sper.», **18**, 218, 314 (1943).

(9) A. S. C. LAWRENCE, M. MIALL, J. NEEDHAM and S. C. SHEN, «J. gen. Physiol.», **27**, 233 (1944).

(10) I. BANGA u. A. SZENT-GYÖRGYI, «Enzymologia», **9**, III (1940).

(11) R. AROSIO, P. CITTERIO, P. MENOTTI, S. RANZI e F. SEMENZA, «Riv. di Biol.», **38**, 153 (1946); R. AROSIO, P. CITTERIO, S. RANZI e L. TOSI, «Rend. Ist. Lombardo (Cl. Sc.)», **82**, 143 (1949).

Per chiarire la natura di queste reazioni, partimmo dalla considerazione che proteine di struttura I e II sono note come proteine a particella filamentosa e che euglobulina *a* e *b* e pseudoglobulina sono proteine a particella filamentosa ripiegata, mentre euglobulina *c* e proteine solubili sono a particella globulare. Poichè le frazioni che risentono dell'inversa azione del LiCl e del NaSCN sono le proteine a particella filamentosa e filamentosa ripiegata, mentre sia LiCl che NaSCN determinano ambedue aumento di viscosità delle proteine a particella globulare, pensammo di vedere se questa diversa reazione dipende dalla forma della particella in soluzione. Saggiammo così l'effetto del LiCl, del NaSCN e di altre sostanze su proteine la cui forma di particella in soluzione è ben nota dalla chimico-fisica (proteine globulari quali l'emoglobina, la seroalbumina, la globulina X della muscolatura, l'actina depolimerizzata e proteine filamentose quali l'actomiosina, la miosina, l'actina polimerizzata, il timonucleoistone rotto) ⁽¹²⁾. In queste ricerche precisammo che per il LiCl è attivo lo ione Li⁺; per il NaSCN è attivo lo ione SCN⁻ e che le soluzioni di tutte le proteine filamentose studiate presentano aumento di viscosità con Li⁺, diminuzione con SCN⁻, mentre questi ioni determinano ambedue aumento di viscosità di proteine a particella globulare. Di qui la conclusione che *sono le proteine a particella filamentosa o filamentosa ripiegata quelle che presiedono alla determinazione embrionale* ⁽¹³⁾.

Poichè, in presenza di sostanze animalizzanti, le soluzioni di proteine filamentose presentano diminuzione di viscosità mentre quelle di proteine globulari presentano un aumento e poichè è noto che variazioni di visco-

(12) P. CITTERIO e S. RANZI, « Rend. Acc. Naz. Lincei (Sc. fis.) » (8), 3, 150 (1947); M. CIGADA, P. CITTERIO, A. ORLANDI, S. RANZI e L. TOSI, « Rend. Ist. Lombardo (Cl. Sc.) », 82, 341 (1949).

(13) Dal punto di vista chimico-fisico queste ricerche mettevano nelle nostre mani un metodo molto semplice per il riconoscimento qualitativo della forma della molecola proteica in soluzione. Con aggiunta di SCN⁻ le soluzioni di proteine a particella filamentosa presentano una diminuzione di viscosità, mentre quelle a particella globulare l'aumentano. Questo metodo fu utile per ricerche sulla forma delle proteine embrionali e ci spinse ad intraprendere altre ricerche cui qui sommariamente accenno: 1° tentammo uno studio dell'anatomia comparata delle proteine del tessuto muscolare, in base al quale concludemmo che l'actina è molto meno specifica della miosina (M. CIGADA, P. CITTERIO, S. RANZI e L. TOSI, « Experientia », 4, 480 (1948)) fatto che fu confermato su basi immunologiche da Kestzyùs, Nicodemusz e Szilagyi (« Experientia », 6, 342 (1950)). Si arrivò anche alla scoperta che nelle proteine dell'organo elettrico della Torpedine esistono una proteina simile all'actomiosina e due frazioni, una miosinosimile, l'altra actinosimile. È stato cioè trovato, nell'ultrastruttura dell'organo elettrico, quello che la filogenesi e l'embriogenesi di quest'organo possono spiegare tenendo conto della sua derivazione dal tessuto muscolare striato (R. AROSIO e A. ORLANDI, « Rend. Acc. Naz. Lincei (Sc. fis.) » (8), 10, 422 (1951)); 2° iniziammo lo studio delle ultrastrutture citoplasmatiche (S. RANZI, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 23 suppl., 19 (1951)) anche per risolvere alcuni problemi connessi alla determinazione embrionale secondo quanto esporrò; 3° tentammo un primo approccio per lo studio della particella proteica in soluzione (S. RANZI, op. cit.); 4° venne iniziato lo studio delle trasformazioni che subiscono le proteine durante l'accrescimento embrionale (M. CIGADA, « Boll. Zoologia », 17, 491 (1950)).

sità in queste direzioni avvengono nei fenomeni di denaturazione proteica ⁽¹⁴⁾, abbiamo cercato di vedere se la formazione dell'ectoderma dei ricci di mare e della corda dorsale dei Vertebrati avesse per base una denaturazione delle proteine filamentose. Poichè la denaturazione ha la sua espressione, per le proteine filamentose, in formazione di particelle meno anisodiametriche a più basso peso molecolare, abbiamo studiato al microscopio elettronico, coi metodi della birifrangenza di flusso e coi metodi viscosimetrici le variazioni determinate dagli agenti che sullo sviluppo agiscono come il SCN'. Ricontrammo che le *particelle in soluzione, trattate con agenti animalizzanti, sono meno anisodiametriche e concludemmo per una denaturazione* che, per le proteine filamentose, si esplica con una depolimerizzazione ⁽¹⁵⁾.

D'altra parte poichè è noto che il classico agente denaturante le proteine è l'urea, allestimmo ricerche per vedere se l'urea è in grado di indurre le stesse alterazioni del NaSCN nello sviluppo embrionale e i dati raccolti permettono un parallelo tra le due azioni. A quanto era già noto circa l'aumento delle dimensioni della corda determinato da urea si sono aggiunte: la possibilità di induzione di tessuto cordale a spese di banali cellule mesodermiche e l'evocazione di tessuto nervoso ⁽¹⁶⁾, che è una delle azioni caratteristiche delle sostanze animalizzanti e che tra breve discuterò.

Se l'azione di SCN' è denaturazione delle proteine, si poneva il problema di quale fosse l'azione del Li⁺ sulle proteine, visto che la chimico-fisica conosce una denaturazione, ma non una reazione inversa alla denaturazione. Abbiamo trattato actomiosina e varie frazioni di proteine filamentose ripiegate estratte da uova e da embrioni con LiCl a concentrazione attiva nel determinare alterazioni dello sviluppo embrionale e poi abbiamo aggiunto alla soluzione di proteina, così trattata, SCN' alle concentrazioni attive nello sviluppo embrionale, ovvero urea. Abbiamo visto che SCN' non riesce più a produrre diminuzione di viscosità e che l'abbassamento di viscosità determinato da aggiunta di urea è notevolmente minore che nei controlli senza LiCl (fig. 1). *Il LiCl dando alla molecola proteica filamentosa una maggiore stabilità impedisce la depolimerizzazione* e pertanto agisce in senso inverso al NaSCN.

Quando le ricerche erano a questo punto ci siamo preoccupati di quali fossero le proteine filamentose o filamentose ripiegate che realmente sono nel citoplasma. Abbiamo visto che le proteine di struttura I di Szent-Györgyi debbono la loro birifrangenza negativa ad impurità di timonucleoistone di origine nucleare e che dopo purificazione dell'acido timonucleico possono venir estratte in forma filamentosa ripiegata ⁽¹⁷⁾. Abbiamo poi rivolto il nostro studio al frazionamento del protoplasma seguendo il

(14) H. NEURATH, J. P. GREENSTEIN, F. W. PUTNAM and J. P. ERICKSON, « Chem. Rev. », 34, 157 (1944).

(15) S. RANZI, « Nature », 160, 712 (1947); « Rend. Ist. Sup. Sanità », 13, 811 (1950).

(16) V. LEONE, « Rend. Acc. Naz. Lincei (Rend. Sc.) » (8), in stampa.

(17) S. RANZI, 1951, op. cit.

metodo che comunemente si usa per l'estrazione dei mitocondri ⁽¹⁸⁾. Il materiale fresco viene omogeneizzato in saccarosio 0,88 mol. e centrifugato a 600 volte la gravità per 10 minuti. Si ripete questa centrifugazione tre volte accantonando il centrifugato costituito da cellule e nuclei non rotti e detriti di nuclei e citoplasma non omogeneizzato. Il supernatante residuo viene centrifugato per 20 minuti a 22.000 volte la gravità. Si ha un supernatante che contiene la sostanza fondamentale del citoplasma e un centrifugato che contiene mitocondri grandi e piccoli, che possono essere ulteriormente frazionati. Se tutte le operazioni si sono svolte in camera fredda a 0°, si può porre in evidenza

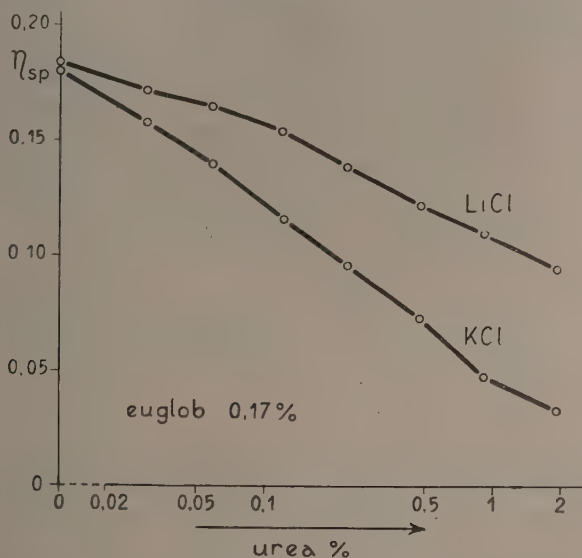


Fig. 1. — A due campioni di una soluzione di euglobulina *a + b* di uovo di riccio di mare, delipidata a -77° con alcool ed etere e sciolta in 1 mol. KCl, viene aggiunto, ad uno LiCl fino alla concentrazione di 0,14 mol. nel tutto, all'altro, controllo, una stessa quantità di KCl. Dopo maturazione di una notte a 0° viene aggiunta urea alla concentrazione indicata sulle ascisse (in scala logaritmica) e letta la viscosità (col viscosimetro di Ostwald a 14°), che è riportata sulle ordinate come viscosità specifica.

che nella frazione, che contiene la sostanza fondamentale del citoplasma, si osserva *euglobulina a* ed *euglobulina b* e che cioè, almeno queste due frazioni filamentose ripiegate, sono realmente nella sostanza fondamentale del citoplasma e sono pertanto quelle impegnate nei processi di determinazione embrionale.

Un altro fenomeno di determinazione che risente l'azione delle sostanze animalizzanti, urea compresa, è il fenomeno dell'evocazione nell'embrione di Anfib. Queste sostanze sono infatti in grado di determinare formazione

(18) G. H. HOGEBOOM, W. C. SCHNEIDER and G. E. PALLADE, « J. Biol. Chem. », 172, 619 (1948).

di abbozzi nervosi a spese di epidermide presuntiva ⁽¹⁹⁾. Azione identica hanno pH estremi (superiori a 9,2 e inferiori a 5,0) ⁽²⁰⁾. In ricerche, a questo fine allestite, siamo riusciti a dimostrare che i pH estremi trasformano le particelle di euglobulina a e b, in soluzione, da filamentose ripiegate in globulari e cioè le denaturano ⁽²¹⁾.

Riassumendo quanto da noi osservato sulle basi della determinazione embrionale: nel citoplasma indifferenziato esistono delle frazioni proteiche che in soluzione hanno molecola filamentosa ripiegata. Queste frazioni proteiche vengono depolimerizzate per azione degli agenti che inducono animalizzazione nei ricci di mare, ipersviluppo della corda dei Vertebrati, evocazione di sistema nervoso in questi animali, subiscono invece una trasformazione per cui divengono più resistenti alla depolimerizzazione se trattate con gli agenti che inducono vegetativizzazione degli embrioni dei ricci di mare e assenza di corda nei Vertebrati. Possiamo quindi ritenere che nell'abbozzo presuntivo dell'ectoderma del riccio di mare e della corda del Vertebrato esistano condizioni depolimerizzanti le proteine filamentose ⁽²²⁾ e che durante l'evocazione del sistema nervoso l'azione del principio organizzante determini un analogo fenomeno.

Biologia (Medicina). — *Relazione tra pressione osmotica del sangue e sudorazione nel coma insulinico* ^(*). Nota di PAOLO BUFFA, presentata ^(**) dal Socio G. VERNONI.

In uno studio precedente ⁽¹⁾ è stato dimostrato che la secrezione del sudore, nella fase critica dell'accesso febbrile malarico da *Pl. vivax*, coincide, di norma, con un abbassamento della pressione osmotica del sangue, cioè con una diluizione plasmatica, similmente a ciò che avviene nel gatto riscaldato artificialmente, come fu chiaramente dimostrato da Montuori ⁽²⁾.

(19) S. RANZI e E. TAMINI, « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett. (Rend. sc.) », 73, 525 (1940); V. LEONE, op. cit.

(20) J. HOLTFRETER, « J. exp. Zool. », 106, 197 (1947).

(21) P. CITTERIO e S. RANZI, « Rend. Acc. Naz. Lincei (Sc. fis.) » (8), 7, 254 (1949).

(22) Quando giungemmo a questa conclusione ci preoccupammo di quale poteva essere il rapporto tra i fenomeni di trasformazione dell'ultrastruttura del citoplasma da noi invocati e le conclusioni della scuola svedese (LINDAHL, op. cit.) che lo sviluppo in senso ectodermico dell'embrione di riccio di mare si accompagna a metabolismo idrocarbonato, mentre lo sviluppo in senso entodermico a un altro tipo di metabolismo. In base a varie considerazioni (AROSIO, CITTERIO, RANZI e TOSI, op. cit.) venimmo alla conclusione che prima tappa della determinazione dovessero essere le trasformazioni delle proteine da noi osservate e che solo secondariamente entrassero in scena le differenze di metabolismo. Questa nostra conclusione è oggi accettata dagli esponenti della Scuola svedese (J. RUNNSTRÖM and T. GUSTAFSON, « Ann. Rev. Physiol. », 13, 57 (1951)).

(*) Dal Centro di studio per la fisiopatologia del C.N.R. presso l'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) P. BUFFA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol XI, fasc. 1-2, p. 122 (1951).

(2) A. MONTUORI, « Arch. Fisiol. », 9, 439 (1911).

Allo scopo di ottenere ulteriori informazioni sulle relazioni esistenti tra la pressione osmotica del sangue ed il fenomeno, così complesso nella sua genesi, della sudorazione, si è misurata la pressione osmotica del sangue durante il coma insulinico che, come è noto, è caratterizzato tra l'altro da una sudorazione talmente profusa da venir chiamato anche « coma umido ».

METODI E TECNICA. — Si sono usate pazienti affette da psicosi e sottoposte a insulino-shock-terapia, la quale consiste nel provocare quotidianamente un coma insulinico per un periodo di molte settimane. Per ciascuna prova si prelevavano tre campioni di circa 15 ml di sangue venoso: il primo (a) precedentemente alla iniezione di insulina; il secondo (b) nella fase precomatosata, ai primissimi segni di sudorazione; il terzo (c) durante la sudorazione, in genere nella fase profonda del coma. Per l'ulteriore trattamento dei campioni e la determinazione del punto crioscopico del siero si è seguito esattamente il metodo già descritto (1).

RISULTATI. — Nella tabella I sono esposti i risultati ottenuti da sette determinazioni eseguite su sieri provenienti da cinque pazienti di età variabile dai 25 ai 36 anni, a stadi diversi della shock-terapia insulinica e ricevuti dosi di insulina da 80 a 400 U al giorno.

TABELLA I.

Caso	Coma	U insulina	Δt (a)	Δt (b)	Δt (c)	sudorazione
I	39°	200	0,579	0,553	0,568	+++
I ₂	42°	200	0,562	0,554	0,554	++++
II	13°	80	0,554	0,540	0,546	++++
II ₂	18°	80	0,551	0,556	0,555	++++
III	31°	120	0,558	0,554	0,555	+++
IV	45°	280	0,555	0,562	0,556	+++
V	19°	400	0,589	0,573	0,567	++++
VALORI MEDI . . .			0,564	0,556	0,557	

Δt (a): campione prelevato prima dell'iniezione di insulina; Δt (b): campione prelevato ai primissimi segni della sudorazione, in genere dopo un'ora dall'iniezione di insulina (nei casi II₂ e IV la p. era ancora completamente asciutta); Δt (c): campione prelevato durante la sudorazione, in genere nel corso del coma profondo. Sudorazione al momento dell'ultimo prelievo: +++ abbondante, ++++ molto abbondante. Ciascun valore è la media di due determinazioni.

Da essi risulta che in conseguenza della iniezione di insulina la pressione osmotica del sangue, inizialmente perfettamente normale (Δt medio 0,564), subisce di regola un lieve abbassamento statisticamente significativo ($P^{(3)} < 0,001$) prima che inizi la secrezione del sudore e che poi essa rimane invariata (le differenze riscontrate non sono significative, $P^{(3)} \sim 0,8$ malgrado la profusa e prolungata sudorazione.

(3) P desunta dal t di Fischer.

L'abbassamento della pressione osmotica che si verifica dopo circa un'ora dalla iniezione di insulina prima che il paziente cada in coma è sicuramente dovuto, almeno in parte, alla ipoglicemia.

Infatti ad una diminuzione del tasso glicemico da 1 a 0,5 per mille (che è quella che avviene dopo un'ora dalla somministrazione della insulina) corrisponde, secondo i valori riportati da Claude e Rubenovitch ⁽⁴⁾, una diminuzione del Δt di 0,0051 (calcolato per 0,5 grammi di glucosio).

Sia le esperienze di Montuori ⁽²⁾ sul gatto riscaldato; sia le nostre ⁽¹⁾ sull'uomo febbricitante, ci autorizzano ad escludere che la diminuzione della pressione osmotica del sangue concomitante alla sudorazione possa compensarsi così rapidamente da sfuggire alla osservazione; pertanto si ritiene di poter concludere che la secrezione del sudore nel coma insulinico si attui senza una partecipazione ematica diretta e immediata.

Come è stato dimostrato nello studio già citato ⁽¹⁾, la secrezione del sudore nella ipertermia febbrile da accesso malarico da *Pl. vivax* è generalmente associata con un abbassamento della pressione osmotica del sangue misurabile crioscopicamente. Ora il fatto che la sudorazione nel coma insulinico non coincida con una diminuzione della pressione osmotica ematica indica che in queste due condizioni morbose la genesi del fenomeno è diversa. Infatti nell'ipertermia febbrile la secrezione del sudore appare associata ad un fattore umorale, la concentrazione delle piccole molecole e degli ioni nel sangue, mentre nel coma insulinico la sudorazione non si dimostra legata alla pressione osmotica del sangue, ma dipendente direttamente dalla stimolazione neurovegetativa conseguente alla perturbazione metabolica indotta dall'insulina iniettata.

Sono molto grato al prof. F. Bonfiglio, Direttore dell'Ospedale Provinciale di S. Maria della Pietà per malattie mentali, Roma, per il gentile consenso di usare i pazienti di quell'ospedale; inoltre ringrazio vivamente il dott. C. Massenti e le infermiere del reparto I.S.T. per la collaborazione e l'aiuto.

Biochimica. — *La riduzione polarografica dell'acido fumarico* ^(*). - Nota di ANTONIO PITTONI e VITTORIO MORET, presentata ^(**) dal Corrisp. A. RONCATO.

INTRODUZIONE. — Data l'importanza fondamentale dei processi ossidativi e riduttivi legati rispettivamente a deidrogenazione e ad idrogenazione delle varie sostanze che compaiono nel metabolismo intermedio, si è creduto opportuno studiare come avvengono i processi di riduzione di alcuni di questi metaboliti col metodo polarografico. La presente Nota si riferisce alla riduzione polarografica dell'acido fumarico ad acido succinico.

(4) H. CLAUDE e P. RUBENOVITCH, *Thérapeutiques biologiques des affections mentales*, p. 184 (1940).

(*) Eseguito presso l'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Padova ed in parte presso il Centro di Polarografia del C. N. R.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1952.

Si potrà obiettare che le condizioni nelle quali avviene la riduzione polarografica non sono quelle che si verificano, quando la riduzione si effettua negli organismi e che quindi i risultati vanno presi con una certa cautela, ma questa obiezione in realtà si può applicare a qualunque processo che noi studiamo al di fuori dell'organismo in quanto non possiamo sperimentalmente riprodurre l'ambiente cellulare in tutte le sue complesse modalità.

In ogni modo anche lo studio della riduzione polarografica di metaboliti di indiscussa importanza biochimica ci potrà fornire, e lo vedremo nella discussione e nella elencazione dei risultati della presente ricerca, dei dati i quali serviranno a completare sotto altri punti di vista uno stesso problema biochimico di riduzione.

Esiste una estesa letteratura polarografica sull'acido fumarico [1-9]. Però la diversità di modalità sperimentali impiegate dai diversi Autori (diversità di elettrolita base, differenza di pH, ecc.) rendono i risultati ottenuti non coordinabili tra loro e non utilizzabili dal punto di vista biologico in quanto l'elettroreduzione dell'acido fumarico è stata operata a pH non immediatamente vicini a quello fisiologico. Per questo motivo abbiamo ritenuto opportuno cominciare con lo studio di tale riduzione a pH = 7,3.

La comparsa a tale pH di due onde di riduzione ci insospettì e ci fece allargare il campo della ricerca ad altri pH relativamente vicini. Abbiamo così osservato un comportamento dell'acido fumarico che non risultava dalla letteratura da noi consultata.

PARTE SPERIMENTALE. — La tecnica polarografica da noi seguita è quella comune ⁽¹⁾. La temperatura di esperienza = 20°C. La sensibilità galvanometrica = 1/50, corrispondente a $6,27 \cdot 10^{-8}$ A/mm/m. — La f. e. m. degli accumulatori = 2 volts, per cui la distanza tra due ascisse nei polarogrammi corrisponde a 0,1 volts. Abbiamo eseguito le nostre curve ai pH seguenti: 4,78; 5,20; 5,54; 5,80; 6,20; 6,40; 6,80; 7,30; 8,20. I pH da 4,78 a 6,40 furono ottenuti con una soluzione molare di NaOAc a cui si aggiungevano volumi variabili di HOAc glaciale; i pH da 6,80 a 8,20 con una soluzione molare di NH_4Cl a cui si aggiungevano volumi variabili di NH_3 conc.

I pH sono stati misurati col potenziometro Beckman mod. G-pH meter. La soluzione di acido fumarico era $2 \cdot 10^{-3}$ M e neutralizzata con NaOH diluita. Nella cella di misura polarografica con E.C.S. si mettevano 4 ml del tampone ad un dato pH e 2 ml della soluzione del sale sodico dell'acido fumarico. Si controllava ogni volta la stabilità del pH. L'O₂ dalla soluzione veniva allontanato facendo gorgogliare per tempo sufficiente dell'H₂ prodotto elettroliticamente. Tutte le curve hanno inizio al potenziale negativo di -0,8 volts.

(1) Per quanto riguarda tale tecnica e le nozioni fondamentali attinenti alla polarografia rimandiamo alla monografia di HEYROVSKÝ [10], di KOLTHOFF [9] ed a quella di MÜLLER [11].

RISULTATI. — L'acido fumarico dà tre onde polarografiche di riduzione a seconda del pH del mezzo. Come si vede distintamente dai polarogrammi di fig. 1.

A $\text{pH} = 4,78$ l'acido fumarico presenta un'unica onda la quale, aumentando il pH verso valori più alcalini, si suddivide in due, la seconda (2) delle quali ha un potenziale circa 300 mv più negativo della prima (1).

Con la progressiva diminuzione dell'altezza della prima onda (1), l'altezza della seconda (2) aumenta. A $\text{pH} = 6,40$ la prima onda è praticamente

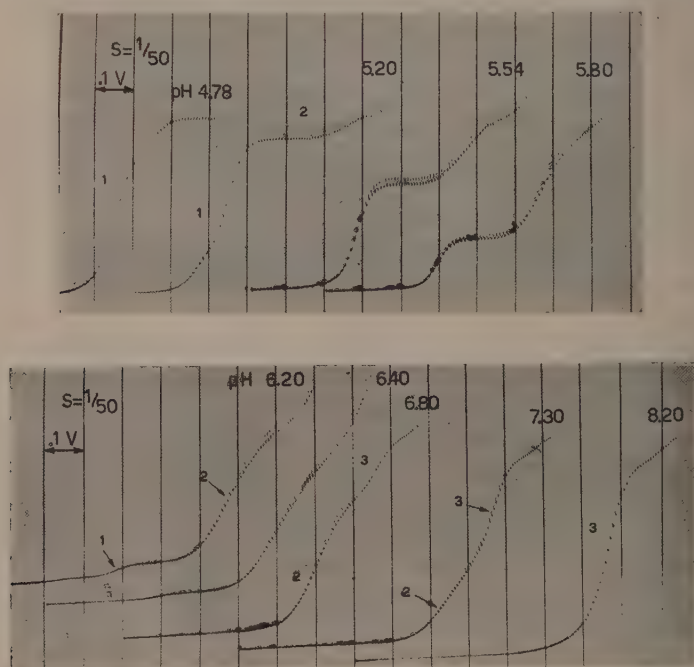


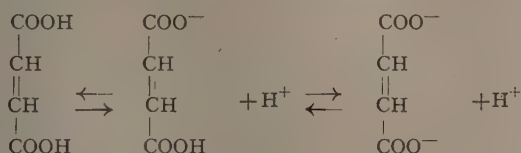
Fig. 1. — Curve polarografiche di riduzione dell'acido fumarico in funzione del pH. Tutte le curve hanno inizio al potenziale $-0,8$ volts.

scomparsa. A pH più alcalini (6,80) la seconda onda a sua volta si sdoppia in due a potenziali questa volta molto più vicini: diversificano di circa 100-150 mV.

Aumentando sempre il pH, anche questa volta l'altezza della seconda onda (3) aumenta via via che quella della prima (2) diminuisce, finchè a $\text{pH} = 8,2$ rimane solo la seconda onda (3). A $\text{pH} = 7,3$ le altezze delle due onde sono circa eguali.

DISCUSSIONE. — La interpretazione più verosimile di tali risultati ci sembra esser quella di ammettere che le tre onde della curva polarografica che successivamente compaiono all'aumentare del pH da 4,78 a 8,20 siano

dovute rispettivamente: la prima (1), quella a potenziale più positivo, alla forma indissociata, la seconda (2) alla forma monodissociata e la terza (3), quella a potenziale più negativo, alla forma bidissociata, tra loro in equilibrio:



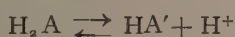
Ci sembra che solo con questa ipotesi sia possibile spiegare:

I) come a pH acido (4,78), essendo l'equilibrio del tutto spostato verso sinistra, cioè a favore della forma indissociata, compaia solo un'onda (1) dovuta alla riduzione di tale forma;

II) come quest'onda vada gradatamente diminuendo, coll'aumentare del pH, a favore della seconda (2), a cui corrisponde la forma monodissociata;

III) come a pH = 8,2 compaia di nuovo un'unica onda (3) dovuta alla riduzione della forma bidissociata verso la quale a tale pH verosimilmente l'equilibrio è del tutto spostato.

A favore della nostra ipotesi sta il fatto che la dipendenza dal pH dell'altezza delle due prime onde della curva polarografica, che noi abbiamo attribuito rispettivamente alla riduzione della forma indissociata e monodissociata, segue la legge dell'azione di massa applicata al primo stadio della dissociazione di un acido bivalente:



da cui:

$$1) \quad K = \frac{[\text{H}^+] \cdot [\text{HA}']}{[\text{H}_2\text{A}]} \quad \text{pH} = \text{pK} + \log \frac{[\text{HA}']}{[\text{H}_2\text{A}]}.$$

Accettando la proporzionalità diretta, nota nell'analisi polarografica, tra l'altezza di un'onda e la concentrazione della sostanza elettroreducibile corrispondente dalla relazione 1) si deduce che, se è vera la nostra ipotesi, deve sussistere una relazione lineare tra il pH ed il logaritmo del rapporto $\frac{[\text{HA}']}{[\text{H}_2\text{A}]}$ dove: $[\text{H}_2\text{A}]$ è la concentrazione della forma indissociata che nel nostro caso è data dall'altezza della prima onda (quella a potenziale più positivo); $[\text{HA}']$ è la concentrazione della forma monodissociata che nel nostro caso è data dall'altezza della seconda onda.

Infatti, misurate con la solita tecnica le altezze delle due prime onde, abbiamo per i diversi pH i seguenti dati:

pH	$\log \frac{[\text{HA}']}{[\text{H}_2\text{A}]}$
5,20	$\bar{1},2116$
5,54	$\bar{1},7810$
5,80	0,3200
6,20	1,0000
6,40	1,3598

Riportando tali valori in un sistema di assi cartesiani, si è costruito il diagramma di fig. 2 da cui risulta che sussiste una relazione perfettamente lineare tra il pH ed il $\log \frac{[HA']}{[H_2A]}$ e che quindi la prima e la seconda onda corrispondono rispettivamente alla forma indissociata e monodissociata.

La possibilità che la forma indissociata e quella dissociata di un acido diano due onde polarografiche di riduzione a potenziali diversi era già stata osservata da Schwaer [2] nel caso dell'acido mesaconico, da Furman e Bricker [12] nel caso dell'acido o-ftalico, e da Brdicka [13] nel caso dell'acido piruvico.

È noto che di solito il pH al quale le due onde si presentano della stessa altezza è spostato verso valori più alti a causa della ricombinazione, all'in-

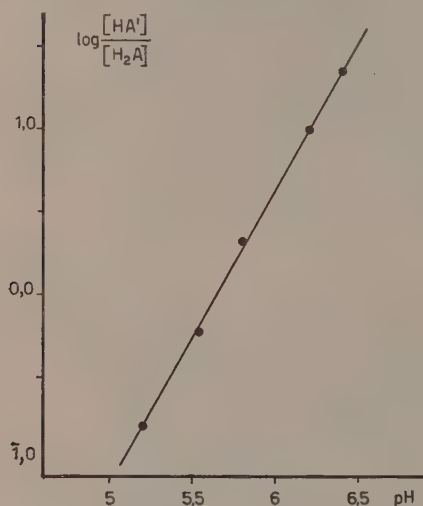


Fig. 2. - Logaritmo del rapporto dell'altezza delle due prime onde di riduzione dell'acido fumarico in funzione del pH.

terfase, dell'anione con l'ione idrogenico per dare molecole indissociate dell'acido. Lo stesso effetto si osserva anche in questo caso perchè di fronte ad un $pK = 3$ dell'acido fumarico ($K_1 = 1 \cdot 10^{-3}$) [8] si trova l'eguaglianza delle due onde ad un $pH = 5,64$. Quindi la relazione lineare dimostrata dalla fig. 2 può essere considerata una prova dell'esistenza dell'equilibrio di dissociazione sopraricordato ma ha bisogno di una indagine ulteriore per essere valorizzata agli effetti dello studio dell'equilibrio tra la forma mono- ed indissociata.

Il sistema Redox succinato-fumarato in presenza di succinodeidasi è stato studiato da Thunberg [14] con la tecnica del bleu di metilene in tubi a vuoto, dal Lehmann [15] potenzio-

metricamente in presenza di indicatori di ossido-riduzione e da molti altri Autori. A conclusione di tutte queste ricerche si ammette che la ossidazione dell'acido succinico ad acido fumarico in presenza dell'enzima succinodeidasi è un processo reversibile e che il potenziale di tale sistema redox succinato-fumarato-succinodeidasi è circa $+0,005$ volts: ne deriva che il solo citocromo tra tutti i trasportatori di idrogeno biologici intermedi conosciuti è termodinamicamente capace di riduzione da parte del sistema succinato-fumarato-succinodeidasi. La elettroriduzione polarografica dell'acido fumarico sarebbe invece un processo irreversibile. Infatti, se il processo fosse reversibile, dovrebbe essere soddisfatta la relazione, nota in polarografia:

$$\pi = \pi_{1/2} - \frac{0,059}{n} \log \frac{i}{i_d - i}$$

dove: $\pi_{1/2}$ è il potenziale di semigradino; i_d è l'intensità della corrente di diffusione limite; π ed i sono rispettivamente il potenziale e l'intensità

della corrente relativi ad un determinato punto della curva polarografica. Come ben si vede dalla relazione suesposta, se il processo di elettroreduzione è reversibile, il $\log \frac{i}{i_d - i}$ deve essere una funzione lineare del potenziale.

La curva del diagramma di fig. 3, in cui sono riportati i valori dedotti dalle nostre curve polarografiche, non essendo una retta dimostrerebbe che il processo di elettroreduzione è irreversibile.

Dai polarogrammi di fig. 1 si vede anche come il potenziale di riduzione dell'acido fumarico diventi sempre più negativo coll'aumentare del pH. Ciò è in accordo con l'ipotesi della partecipazione diretta dell'ione idrogenico al processo di depolarizzazione dell'elettrodo operata dall'acido fumarico. Per decidere se gli spostamenti del potenziale di riduzione osservati si accordino con la variazione del pH operata, sarebbe occorso uno studio particolare della deposizione dell'ione idrogenico nelle stesse condizioni di pH, studio però che abbiamo tralasciato perchè trascende i limiti del nostro compito.

A pH = 7,3 il potenziale di semigradino della forma monodissociata a noi risulta di circa $-1,35$ V e quello della forma bidissociata $-1,45$ volts rispetto all'elettrodo a calomelano saturo (E.C.S.), cioè rispettivamente di circa $-1,10$ e $-1,20$ rispetto all'elettrodo normale di idrogeno (E.H.N.).

Risulta quindi che a pH 7,3 i $\pi 1/2$ delle due onde di riduzione polarografica dell'acido fumarico sono notevolmente più negativi del potenziale di ossido-riduzione dell'acido fumarico misurato potenziometricamente in presenza dell'enzima, la succinodeidrogenasi. Che i $\pi 1/2$ delle due onde di riduzione polarografica dell'acido fumarico fossero diversi dal potenziale di riduzione fisiologica dell'acido fumarico era già da aspettarsi considerando che questa, come è stato dimostrato da Thunberg, Lehmann ed altri Autori, è un processo reversibile, mentre le riduzioni polarografiche, come abbiamo già detto, sarebbe un processo irreversibile. Infatti il $\pi 1/2$ di un'onda di riduzione polarografica di una determinata sostanza corrisponde al potenziale di ossido-riduzione di questa solo se anche polarograficamente il processo di riduzione è reversibile.

Nonostante questo, siamo però rimasti sorpresi che tra il potenziale di ossido-riduzione fisiologico dell'acido fumarico e quello della sua riduzione polarografica vi fosse tanta differenza, cioè superiore ad 1 V. Questa consta-

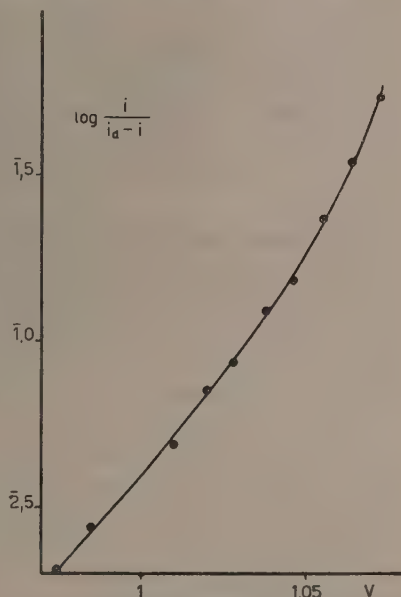


Fig. 3. - Irreversibilità del processo di riduzione dell'acido fumarico.

tazione ci porta necessariamente a pensare che gli enzimi oltre che influire sulla velocità di una reazione termodinamicamente possibile, ed oltre ad avvicinarla alle condizioni di reversibilità, possono anche influire mediante la formazione di composti intermedi non ancora nei singoli casi decifrati, ma che sono in grado, abbassando l'energia di attivazione dei singoli stadi, di rendere determinanti processi parziali cui corrispondono potenziali di ossido-riduzione più vicini a quelli reversibili fisiologici.

CONCLUSIONI. - Si è dimostrato ancora una volta, e con un metodo in generale scarsamente applicato in biochimica, che permette mediante il rilevamento di un grafico la visione comprensiva dei fenomeni, la grande importanza che il pH esercita sul potenziale di riduzione dell'acido fumarico.

Si è constatato, inoltre, che l'acido fumarico subisce il processo di riduzione nelle tre forme in cui esso si presenta in soluzione (forma bi-, mono-, in-dissociata);

nel passare dalla forma indissociata all'anione mono- e a quello bivalente, il potenziale di riduzione diventa man mano più negativo;

al pH dell'organismo, l'acido fumarico si trova in prevalenza nella forma mono- e bi-dissociata in equilibrio tra loro a concentrazioni pressochè uguali;

nel processo di riduzione all'elettrodo a goccia di mercurio, si fanno sentire effetti cinetici di rigenerazione del depolarizzatore all'interfase mercurio/soluzione.

Pure non potendo considerare come strettamente confrontabili le condizioni nelle quali si compie la riduzione dell'acido fumarico nell'organismo e all'elettrodo a goccia di mercurio, i risultati su riportati possono essere considerati di notevole utilità per la spiegazione dei processi biologici, data la stretta analogia riscontrata in altre occasioni tra il modello dei processi polarografici e quelli biologici.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] HERASYMENKO P., « Elektrochem. », 34, 74 (1928).
- [2] SCHWAER L., « Coll. Czechoslov. Chem. Commun. », 7, 326 (1935).
- [3] VOPIČKA E., « Coll. Czechoslov. Chem. Commun. », 8, 349 (1936).
- [4] SEMERANO G. e BETTINELLI G., « Gazz. Chim. Ital. », 66, 744 (1936).
- [5] HERASYMENKO P., « Coll. Czechoslov. Chem. Commun. », 9, 104 (1937).
- [6] SEMERANO G. e BETTINELLI G., « Gazz. Chim. Ital. », 8, 255 (1937).
- [7] WARSHOWSKY B., ELVING P. J. e MANDEL J., « Anal. Chem. », 19, 161 (1947).
- [8] ELVING P. J. e TEITELBAUM C., « J. Am. Chem. Soc. », 71, 3916 (1949).
- [9] KOLTHOFF I. M. e LINGANE J. J., *Polarography*, Interscience Publishers, inc.: New York, N. Y., (1946).
- [10] HEYROVSKÝ J., *Polarographie*, Springer-Verlag, Wien (1941).
- [11] MÜLLER O. H., *The polarographic method of analysis*, n. 2, Chem. Education Publishing Co., Easton, Pa. (1951).
- [12] FURMAN N. H. e BRICKER C. E., « J. Am. Chem. Soc. », 64, 660 (1942).
- [13] BRDIČKA R., « Coll. Czechoslov. Chem. Commun. », 12, 212 (1947).
- [14] THUNBERG T., « Skand. Arch. Physiol. », 46, 339 (1925).
- [15] LEHMANN J., « Skand. Arch. Physiol. », 58, 173 (1930).

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Ugo Bordoni

Letta (*) dal Socio GIANCARLO VALLAURI

Il 17 gennaio si è spento il nostro Collega UGO BORDONI, Socio nazionale della Classe di scienze fisiche, cui apparteneva dal 1928.

Nato a Roma il 27 settembre 1884 da una semplice e buona famiglia romana, UGO BORDONI trascorse qui tutta intera la sua vita di lavoro e di studio, anch'essa semplice, raccolta, modesta, pur attraverso i meritati riconoscimenti che gli furono tributati.

Conseguita nel 1906, con piena lode, la laurea in ingegneria, risentì subito la potente attrazione della vita di laboratorio e divenne assistente di Moisè Ascoli nell'Istituto di Fisica tecnica. Due anni dopo compariva negli atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana una sua Nota sul calcolo della illuminazione, primo anello di una lunga catena, composta di un centinaio di lavori, che sono veramente, per più aspetti, esemplari.

Già nel 1912, passato l'Ascoli alla cattedra di Elettrotecnica, veniva affidato al Nostro l'insegnamento della Fisica tecnica, che egli tenne ininterrottamente, con impegno e con onore, per quasi un quarantennio, cioè fino a quando, dopo aver cercato di superare con ogni sforzo gli effetti della penosa infermità, dovette rassegnarsi a non tornare più dinanzi ai suoi discepoli.

Egli amava veramente la scuola. A chi si è dedicato con animo fervido e sincero a questa nostra missione, appare strano e quasi inesplicabile, che vi siano studiosi, così delle nostre, come forse di altre scienze, per i quali è opprimente e molesto il tornare su la cattedra con scrupolosa assiduità per anni, e lustri, e decenni. È vero: lo studio delle così dette scienze tecniche dev'essere avere anche — ma, sia detto ben chiaro, non esclusivamente — uno scopo di preparazione professionale, e deve quindi trattare determinati argomenti e determinati aspetti applicativi, che non possono essere tralasciati. Essi ricompaiono perciò necessariamente ogni anno nello svolgimento dei nostri corsi. Ma chi ha appreso ad amare veramente il compito che ci è affidato, sa bene per esperienza, che di anno in anno, fino all'ultimo, egli si accorgerà di avere in qualche modo progredito nel penetrare l'essenza di più d'una delle questioni che deve trattare, di essere perciò in grado di esporla con maggiore chiarezza e con maggiore efficacia di quanto non fece l'anno innanzi, e di poter rendere così più intima quella comunione intellettuale con i discepoli, che è anche comunione spirituale, e costituisce il

(*) Nella seduta del 19 aprile 1952.

nostro privilegio più bello e più grande. E sa di quale pena acuta e invincibile sia motivo il pensiero di dover cessare un giorno dall'adempimento di quello che, soltanto per chi non ne ha compreso la ineguagliabile nobiltà, può apparire un monotono mestiere.

Sembra lecito affermare, che tutta l'ingegneria è fisica tecnica. La scienza delle costruzioni, la meccanica applicata alle macchine, l'idraulica, l'elettrotecnica e via dicendo, son tutte applicazioni della fisica. Nel campo degli studi di ingegneria, quelle fra codeste applicazioni che si sono sviluppate ed affermate per prime, e per prime sono giunte a maturità, hanno raccolto intorno a sè i propri cultori e si sono attrezzate con istituti e laboratori propri. In un certo senso si può dire che, nel campo della particolare disciplina, accademicamente chiamata Fisica tecnica, sono rimaste alcune fra le più moderne applicazioni della fisica, destinate anch'esse, quando saran giunte a piena maturità ed a più ampio sviluppo, a distaccarsi dal ceppo ed a formare oggetto di discipline separate. È ciò che tipicamente è accaduto, or è un mezzo secolo, per l'Elettrotecnica.

Quando essa si separò, sopra tutto per merito di Galileo Ferraris, dalla Fisica tecnica, contenuto fondamentale ed essenziale di quest'ultima restò la termodinamica, con la sua profonda ed universale portata di scienza della energia e con le sue sempre più vaste applicazioni, anche se il grandioso campo di studio, dedicato alle macchine termiche, formò anch'esso ben presto un settore a sè stante. Nel dominio della termotecnica i contributi di UGO BORDONI ebbero inizio fin dal 1908 con uno studio su la misura delle temperature ed uno sui motori a combustione interna, i quali ultimi costituivano allora una novità tecnica piena di promesse. Seguirono decine di lavori, sia essenzialmente scientifici, quali le Note pubblicate nei nostri «Rendiconti» su trasformazioni isoentropiche (1920), su trasmissione di calore per irradiazione (1926) e su misure di conduttività termica (1929), sia su questioni aventi importanza anche tecnica, quali le misure di velocità dei fluidi, di temperatura, di conduttività termica, il tracciamento e l'uso dei diagrammi di termodinamica applicata, la produzione termica di energia elettrica e le applicazioni di quest'ultima, anche a servizio dell'industria del freddo.

Ma, accanto al campo della termodinamica e della termotecnica, un altro fu degnamente coltivato dal Nostro, che seppe svolgervi attività di pioniere: quello della teoria e della tecnica dell'illuminazione. Ad esso fu rivolto il primo studio, da lui pubblicato nel 1908 negli Atti dell'A.E.I., su l'illuminazione prodotta da superficie diffondenti. Seguirono ricerche su le lampade, gli obiettivi, la definizione e la misura della nitidezza delle immagini, i proiettori, l'invecchiamento delle sorgenti luminose, i fondamenti della fotometria, il così detto occhio normale, il calcolo della illuminazione, il baricentro luminoso, l'unità fotometrica campione e le unità derivate, il fenomeno dell'abbagliamento, ed altri problemi ancora, collegati con i quesiti di cui ebbe ad occuparsi quale presidente dell'Istituto nazionale di ottica.

I due vasti campi di studio ora accennati — da un lato termotecnica, termodinamica e loro applicazioni, dall'altro energia raggiante, fotometria e illuminazione — costituirono fin da principio il contenuto essenziale del corso di Fisica tecnica, che fu pubblicato la prima volta nel 1911 e rinnovato in sei successive edizioni, fino a comparire nel 1932 in veste di ampio trattato su i « *Fondamenti di Fisica tecnica* ». L'opera ha avuto meritato successo e costituisce una guida sicura ed una fonte preziosa, non soltanto per i giovani, sì anche per quanti debbono affrontare problemi scientifici o tecnici in quel vasto campo di studio e di lavoro.

Anche ad altri settori della fisica l'attività dell'acuto ricercatore seppe rivolgersi, e in particolare a varie indagini sul comportamento dei materiali ferromagnetici, in relazione con la loro conducibilità termica, con i fenomeni termoelettrici e con il grado di rinvenimento degli acciai. Nè si può dimenticare un contributo allo studio dei fenomeni elettrici dell'atmosfera e alla protezione contro le scariche temporalesche.

Speciale rilievo meritano poi le trattazioni in materia di acustica applicata, nuovo settore della fisica tecnica, che assume ogni giorno maggiore importanza ed in cui il Nostro può essere meritamente considerato un precursore. È già trascorso un quarto di secolo dalla comparsa dei suoi scritti su la struttura dei suoni e la loro percezione e su l'acustica architettonica, argomenti di cui continuò ad occuparsi con vivo interesse fino alla pubblicazione di un breve testo di principii, che si consulta anche oggi con profitto.

La vasta produzione, qui appena ricordata, è frutto di una vita ininterrottamente e intensamente dedicata alla scuola ed al laboratorio. La scuola fu sempre il suo primo pensiero. Intere generazioni di ingegneri serberanno per lunghi anni vivo il ricordo del maestro, della sua lucida esposizione dalla cattedra, della sua attitudine a dare davvero una visione stereoscopica della materia trattata, della guida da lui fornita a chi si cimentava con la ricerca sperimentale, forse anche del suo modo di porre i quesiti e di stimolarne lo sviluppo nelle prove d'esame e nelle discussioni scientifiche o tecniche.

Quanto più la scienza, specie nei nostri settori, progredisce e si sviluppa, tanto più il lavoro di ricerca, riservando pur sempre le più salienti conquiste all'opera geniale di singoli privilegiati, tende a diventare gradualmente frutto di opera collegiale ed anonima, e però anche di abile guida organizzatrice. E il maestro può trarre a buon diritto motivo di intima compiacenza dal lavoro che la schiera di suoi discepoli continua a svolgere, e vedervi il frutto della sua onesta fatica, anche se quel frutto non porta più alcun segno esteriore della personalità di lui; il che, del resto, ne rende ancor più pura la bellezza.

Ma un uomo di così alte doti come UGO BORDONI, non soltanto nel campo del sapere, sì anche in quello del carattere e della umana esperienza, non poteva non essere chiamato a contribuire anche per altra via al bene comune, sia pure in forma subordinata di fronte alla sua opera di maestro.

Così, mentre da un lato, ancora nel campo scientifico, oltre ad esser designato a far parte della nostra Accademia e della Società dei XL, egli ebbe compiti altamente direttivi nel Consiglio delle Ricerche e fu a capo del Comitato Italiano di Illuminazione, d'altro lato partecipò come membro assai autorevole all'opera del Consiglio delle Ferrovie e di quello dei Lavori pubblici, ed in particolare, quando, dopo la crisi del 1932, lo Stato dovette intervenire per il risanamento di talune grandi industrie, vitali per il nostro paese, egli fu messo a capo di un vasto gruppo di società telefoniche e seppe svolgervi tenacemente ed ininterrottamente, fino al declino delle sue forze, un'opera di notevole rilievo.

Sia qui concesso di dare ancora un cenno di quanto egli seppe compiere nell'orbita dell'Associazione Elettrotecnica Italiana, il grande organismo che, fondato nel lontano 1897 da Galileo Ferraris, tiene degno posto fra gli enti consimili delle più grandi nazioni ed ha reso e rende preziosi servizi all'Italia, così nel campo scientifico, come nel campo industriale. Durante il triennio dal 1930 al 1932 il Nostro ne ebbe la presidenza generale e, prima ancora, fu membro, fin dall'inizio, della redazione de «L'Elettrotecnica». Nel 1913 Ferdinando Lori aveva saggiamente voluto, che gli Atti dell'A.E.I. si trasformassero in un grande periodico, capace di reggere il confronto con le maggiori riviste straniere e di contribuire ad un sempre più largo sviluppo dei nostri studi. Egli affidò il compito ad un triumvirato di colleghi, fra i quali scelse UGO BORDONI.

Non si può dimenticare con quale entusiasmo e con quanta passione fu condotto il lavoro preparatorio e fu svolta l'opera iniziale, mai più abbandonata dai primi artefici e dagli altri che ad essi si unirono, e che restarono poi sempre tutti affettuosamente legati alla loro creatura. Quei tre, che già erano amici, tennero a Firenze la loro prima riunione - rimasta poi sempre particolarmente viva nei loro ricordi - e vollero che il periodico assumesse, fin dal suo sorgere, alcune caratteristiche particolari, fra cui la presentazione di ogni fascicolo con acconce note di redazione: compito delicato ed impegnativo, e forse perciò assai poco seguito, ma indubbiamente utile ed efficace.

Da poco più di un anno era cominciata l'impresa, quando scoppiò la prima guerra mondiale. La redazione fu scompigliata: il Nostro vestì la divisa di tenente del genio e, come tale, vide subito l'opera sua messa a profitto nel campo tecnico, così da meritarsi la promozione a capitano e la nomina a membro del Comitato di Mobilitazione industriale e da esser poi trattenuto in servizio fino al 1920. Ma anche in tutto quel periodo il contatto fra i redattori fu assiduo ed operoso ed egli, allora e poi, riservò a «L'Elettrotecnica» anche vari interessanti contributi originali. L'autorità, di cui giustamente godeva in quel campo di studi, fu del resto riconosciuta anche in altra sede, poichè gli furono affidati per un certo tempo, sia il corso superiore di Telegrafia e Telefonia per gli ingegneri del Ministero delle Poste e Telegrafi, sia il corso di Misure elettriche presso la Scuola di

Ingegneria di Roma, in aggiunta all'insegnamento, per lui sempre fondamentale e preminente, della Fisica tecnica.

In ogni aspetto dell'attività di ricercatore e di maestro si rivela la mirabile limpidezza della sua mente elevata, l'invidiabile attitudine ad inquadrare il particolare nel generale ed a risalire da quello a questo, la privilegiata ed acuta intuizione delle possibilità di sviluppo, derivanti da nuovi concetti scientifici, e dei tentativi da compiere per tradurli in esperienze concrete e in applicazioni tecnicamente importanti. A conferma di ciò basti rammentare quanto si è detto a proposito degli studi su l'acustica tecnica ed architettonica e, in tempo più remoto e in campi diversi, le pubblicazioni su la fotometria eterocromatica e sui motori Diesel e su le loro possibilità.

Ma alle doti di cui — pur troppo inadeguatamente — si è qui fatto cenno, altre se ne aggiungevano, che appaiono ancor più preziose a chi poté godere dell'amicizia di lui fin dai tempi giovanili, lontani ormai di un quarantennio; a chi conobbe la sua buona mamma e ricorda le nozze che lo unirono con la dolce compagna, e la nascita del figliuolo, che ha procurato poi al babbo il compiacimento di vederlo avviarsi ed affermarsi su la sua medesima strada e la gioia di festeggiarne ancora la giovane sposa. Doti di semplicità, di perfetta naturalezza, di intima e generosa bontà, quasi mascherata da una riservatezza riguardosa, che a volte dava l'impressione di un animo un poco chiuso e quasi restio ad ogni forma di confidente abbandono. Ma ciò era soltanto apparenza.

Nè si può dimenticare, che il gusto per il bello nell'arte, in ogni sua forma, era in lui fine e profondo. Ad un amico, che gli aveva confidato di considerare un certo « tempo » di una celebre sinfonia di Beethoven come « leit-motiv » della propria vita, egli seppe più volte, delicatamente ed inaspettatamente, ricordare proprio quel motivo. Il tornare nella sua casa, il ritrovarsi con lui e con i suoi cari, il godere della loro ospitalità nobile e cordiale fu sempre — per chi ne ebbe il privilegio — motivo di conforto e di gioia. E ciò fino a quando il male non lo colse, costringendolo a sempre maggiori e più amare rinunce nel campo del suo prediletto lavoro di studioso e di maestro. Ancora poco tempo prima del doloroso epilogo lo si ritrovava seduto allo scrittoio, dove si sforzava di continuare la sua fatica; lo si vedeva con commozione atteggiare le labbra al consueto sorriso; non si poteva non pensare ai suoi ravvivati contatti con la bella chiesa vicina. Non una parola di rammarico o di rimpianto; bensì la rassegnazione di un animo forte, rassegnazione che non v'era bisogno di ascoltare espressa in parole, perchè la si leggeva negli occhi.

Già altri ha ricordato in suo onore alcune frasi ch'egli pronunciò nel discorso tenuto a Pisa (1934) in memoria del Pacinotti; ma nessun'altra chiusa parrebbe più acconcia a questa povera, ma affettuosa e fraterna rievocazione. « Per chi sappia intendere, v'è più arte nella scienza e più « scienza nell'arte, di quanto spesso non si creda; chè entrambe queste manifestazioni dell'intelletto hanno in comune talune origini; hanno in comune,

« almeno, la smania insopprimibile di attingere a piene mani nella Natura, « esterna a noi, od interna, il bisogno dell'armonia e delle proporzioni, e « quell'aspirazione alla perfezione, a salire sempre, che è forse il certificato « più autentico della nobiltà delle origini di questo piccolo essere di cui il « mondo è popolato; di questo essere che affonda il suo sguardo nell'infinitamente piccolo del mondo interatomico e nell'infinitamente grande « degli astri, e che tanto chiede alle cose che lo circondano, dal segreto delle « loro sinfonie estetiche alla chiave dei misteriosi fenomeni che reggono lo « Universo ».

Nota. — L'elenco delle pubblicazioni di Ugo Bordoni è stato riportato da G. PAROLINI ne « La Ricerca Scientifica », febbraio 1952, anno XXII, p. 177.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà la parola al Socio Vallauri che pronuncia l'orazione commemorativa del compianto Collega Ugo Bordoni ricordandone le grandi doti di mente e di cuore.

Il Presidente ringrazia l'oratore per le sue elevate parole e, interpretando l'unanime sentimento dei Colleghi, si associa al tributo di omaggio reso oggi dall'Accademia alla memoria dell'illustre Consocio scomparso.

Il Presidente dà notizia, con vivo dolore, della morte del Socio Nazionale Ugo Lombroso, avvenuta il 10 corrente mese, ricordando come il compianto Collega, figlio di Cesare Lombroso, che lasciò tracce così profonde nella medicina e nel diritto penale, abbia iniziato la sua carriera scientifica come allievo di Luigi Luciani e abbia poi ricoperto le cattedre di Messina, Palermo e Genova, segnalandosi per la genialità e profondità dei suoi studi. Circa quarant'anni or sono egli scoprì che il pancreas produce un ormone di straordinaria importanza per il metabolismo dei lipidi e la fondatezza di tale sua tesi, accolta nei primi tempi con molto scetticismo, è stata ora pienamente riconosciuta e accettata. In questi ultimi tempi Egli era in procinto di raccogliere i frutti di alcuni importanti suoi studi che avrebbero determinato una scoperta sensazionale e purtroppo la morte ha troncato prematuramente la sua fervida e geniale attività.

Il Presidente, dopo aver assicurato che il compianto Collega sarà degnamente commemorato dall'Accademia, invia un reverente e commosso pensiero alla Sua memoria e sospende la seduta per un minuto in segno di lutto.

Ripresi i lavori, il Presidente comunica alla Classe la notizia, solo ora conosciuta dall'Accademia, della morte del Socio Straniero Charles S. Sherrington, deceduto all'età di 96 anni alcuni mesi or sono e ricorda che il compianto scienziato è stato il più grande fisiologo della seconda metà del secolo scorso e ha dato agli studi fisiologici importantissimi contributi con le sue classiche ricerche sui riflessi del midollo spinale e sulla eccitabilità dei centri corticali. L'Accademia prende viva parte al grave lutto che la morte del prof. Sherrington costituisce per la scienza.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che è uscito il fascicolo n. 3 (marzo 1951) dei « Rendiconti ».

Il Presidente riferisce brevemente intorno alla celebrazione svoltasi il 21 marzo a Liegi e promossa da quella Università in occasione del centenario della nascita dell'illustre fisiologo Léon Fredericq che fu Socio Straniero dell'Accademia. Il prof. Levi, per incarico del Senatore Castelnuevo, è intervenuto in rappresentanza dell'Accademia a detta cerimonia, alla quale hanno partecipato illustri studiosi nonchè rappresentanti dell'Accademia delle Scienze di Francia e dell'Università di Liegi e che ha costituito un degno tributo alla memoria del grande scienziato.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato, consegnato all'Accademia dal dott. Umberto Bellotta, contenente, come da annotazione sulla relativa busta, una Nota di biologia del predetto dottore e del dott. Salvatore Onorato. Come da altra annotazione sulla stessa busta, firmata dal dott. Umberto Bellotta, il plico di cui trattasi potrà essere aperto a richiesta del predetto dott. Bellotta e del dott. Salvatore Onorato, sia unitamente che disgiuntamente.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia conservato nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Tenani offre in omaggio una sua pubblicazione dal titolo: « Nozioni teoriche fondamentali sulla formazione e trasformazione delle onde », edita a cura dell'Istituto Idrografico della Marina, e la illustra brevemente, mettendo in evidenza che gli studi teorici e sperimentali sulla formazione e propagazione delle onde marine ebbero notevole impulso durante la recente guerra e conseguirono grandi progressi che furono continuati anche in questi anni per l'importanza che detti studi presentano in relazione ai problemi concernenti la costruzione delle opere portuali e la conservazione delle spiagge.

Il Socio Boaga offre in omaggio la sua « Bibliografia geodetica italiana » (1941-1950), estratto da « Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali » (Nuova Serie, Anno VI, nn. 1, 2, 3, 4, 5, 1951),* e ricorda che detta opera comprende circa seicento lavori per ognuno dei quali viene data completa referenza bibliografica e un riassunto sufficientemente esteso atto a indicare il rispettivo contenuto.

Il Socio Dore, a nome dei Colleghi presenti e assenti, desidera manifestare al prof. Boaga la più viva gratitudine per l'opera veramente meritoria da lui compiuta con la citata Bibliografia.

Il Presidente presenta le opere inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza il volume, edito a cura della Camera di Commercio, Industria e Agricoltura di Rieti, contenente gli «Atti del Convegno di Genetica agraria», svoltosi a Rieti e a Roma dal 30 maggio al 3 giugno 1950, il fascicolo I del volume II (Zoology) e il fascicolo I del volume III (Physics and Chemistry) dell'opera in cinque volumi «Reports of the swedish deep-sea expedition 1947-1948», pubblicata dal Direttore scientifico della spedizione prof. Hans Pettersson, sotto gli auspici della Reale Società di Arti e di Scienze di Göteborg, un estratto dagli «Annali di Botanica», (vol. XXIII, fascicolo II, 1950) contenente la necrologia del Socio Biagio Longo, a cura del prof. Rivera, alcuni studi botanici del predetto Professore e alcuni lavori del Socio Straniero Gutenberg.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note, per la pubblicazione nei «Rendiconti», i Soci: Beccari, Abetti, Dore, Gola (a nome del Socio Roncato), Vernoni, Giuseppe Levi, Ferretti, Persico e Signorini.

Il Presidente dà lettura dell'elenco delle Note inviate alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

FERRETTI B. - Su di una classe di equazioni operatoriali.

FINZI B. - Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono. Nota II.

CHIORBOLI P. - Considerazioni comparative sugli spettri Raman dell'*N*-acetilpirrolo e dell' α -acetilpirrolo (pres. dal Socio G. B. BONINO).

CHIORBOLI P. - Considerazioni quantomeccaniche intorno ad alcuni derivati carbonilici del pirrolo (pres. dal Socio G. B. BONINO).

COLACEVICH A. - Risultati preliminari relativi allo spettro della corona esterna ottenuti nell'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952 (pres. dal Socio G. ABETTI).

DE GIORGI E. - Sulla sommabilità delle funzioni assolutamente integrabili (pres. dal Socio M. PICONE).

DIMAGGIO F., GOMZA A., THOMAS W. E. e SALVADORI M. G. - Instabilità laterale di travi inflesse e compresse (pres. dal Socio M. PICONE).

FANTAPPIÈ L. - Determinazione di tutte le grandezze fisiche possibili in un universo quantico (pres. dal Socio A. SIGNORINI).

GALLI M. - Le deformazioni relativistiche di un cilindro rotante. Nota II (pres. dal Corresp. L. TIERI).

FILOGAMO G. e VIGLIANI F. - Numero e spessore delle fibre mieliniche destinate a muscoli resi funzionalmente inattivi (pres. dal Socio G. LEVI).

MARUSSI A. – Determinazione dell'angolo fra la tangente in un estremo e la corrispondente sezione normale contenente l'altro estremo, per un arco finito di geodetica su di una superficie qualunque (pres. dal Socio P. DORE).

MAZZI V. – Rilievi e considerazioni sugli effetti della interruzione dei rapporti vascolari e nervosi fra l'ipotalamo ed ipofisi nel maschio del Tritone cretato (pres. dal Socio N. BECCARI).

MUSCIA C. – Studio di una lente elettronica con il metodo W. K. B. (pres. dal Corrisp. E. PERSICO).

RIGHINI G. – Lo spettro di una protuberanza quiescente (pres. dal Socio G. ABETTI).

RIGHINI G. – Lo spettro della corona solare nell'eclissi del 25 febbraio 1952 (pres. dal Socio G. ABETTI).

VIOLA T. – Su una classe di problemi non regolari di calcolo delle variazioni, attinenti all'equazione $\Delta_2^* u = 0$ (pres. dal Socio P. PICONE).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Gola, anche a nome del Collega Chiarugi, legge la relazione sulla Memoria di F. M. Gerola dal titolo: «Determinazioni cariometriche e citochimiche durante la profase della mitosi e della meiosi nelle angiosperme». Detta relazione, che conclude proponendo la stampa del citato lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti e approvata dalla Classe con le solite riserve di carattere finanziario.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 19 aprile 1952

- BENIOFF H., GUTENBERG B. and RICHTER C. F. — *Progress report, seismological Laboratory, California Institute of technology, 1950*. Estr. da «Transactions of the America Geophysical Union», volume XXXII, 1951, n. 5.
- BOAGA Giovanni. — *Bibliografia geodetica italiana (1941-1950)*. Estr. da «Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali», n. s., 1951, nn. 1-5.
- CONVEGNO DI GENETICA AGRARIA. — *Atti*. Rieti, 30 maggio-2 giugno, Roma 3 giugno 1950. Pavia, Tip. del Libro, 1951. Pp. XIII, 592, in-8° (Camera di Commercio, Industria e Agricoltura di Rieti).
- CONVEGNO (XXV) NAZIONALE DEI TECNICI AGRICOLI. *Atti*. Roma, 10-11 novembre 1951. Roma, Castaldi, 1951. Pp. 181, in-8° (Federazione Nazionale dei dottori in scienze agrarie - Federazione Nazionali periti agrari).
- GUTENBERG Beno. — *Earthquakes in North America*. Estr. da «The Smithsonian Report», 1950.
- *Observations and theory of microseisms*. Estr. da «Compendium of Meteorology».
- *Sound propagation in the atmosphere*. Estr. da «Compendium of Meteorology».
- GUTENBERG Beno. — Vedi: BENIOFF H., GUTENBERG B. and RICHTER C. F.
- NORDQUIST J. M. — Vedi: RICHTER C. F. and NORDQUIST J. M.
- PETTERSSON Hans. — *Reports of the Swedish Deep-Sea Expedition 1947-1948*. Vol. II, *Zoology*, fasc. 1°; vol. III, *Physics and Chemistry*, fasc. 1°. Göteborg, Elanders Boktryckeri Aktiebolag, 1951 (Göteborgs Kungl. Vetenskaps- och Vitterhetssamhälle).
- RICHTER C. F. — Vedi: BENIOFF H., GUTENBERG B. and RICHTER C. F.
- RICHTER C. F. and NORDQUIST J. M. — *Instrumental study of the Manix earthquakes*. Estr. da «Bulletin of the Seismological Society of America», vol. XLI, 1951, n. 4.
- RIVERA Vincenzo. — *Biagio Longo*. Estr. da «Annali di Botanica», vol. XXIII, 1950, fasc. 2.
- *La botanica primo fondamento degli studi biologici*. Estr. da «Annali di Botanica», vol. XXIII, 1947, fasc. 1.
- *Catalizzatori fisici nella vita vegetale*. Estr. da «Annali di Botanica», volume XXIII, 1950, fasc. 2.
- *Influenza della «carica metallica» della soluzione sull'attività metabolica di alcuni vegetali*. Estr. da «Annali di Botanica», vol. XXIII, 1949, fasc. 1.
- *Ricerche preliminari sulla costituzione dei pascoli italiani*. Estr. da «Annali di Botanica», vol. XXIII, 1949, fasc. 1.
- TENANI M. — *Nozioni teoriche fondamentali sulla formazione e trasformazione delle onde. Nuovi metodi grafici di calcolo e di previsione*. Genova, Istituto Idrografico della Marina, 1952. Pp. 126 in-8°.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 maggio 1952

Presiede il Socio anziano G. LEVI

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Su di una classe di equazioni operatoriali.* Nota^(*) del Corrisp. BRUNO FERRETTI.

Alcune indagini tuttora in corso sulle teorie quantistiche dei campi mi hanno condotto a considerare un certo tipo di equazioni operatoriali e certi concetti che possono essere utilizzati per trattare di tali equazioni, la cui conoscenza potrebbe forse essere opportuna anche a chi non interessi in modo particolare l'indagine fisica che li ha suggeriti.

Scopo di questa Nota è appunto dare una informazione su tali equazioni e su tali concetti, prescindendo dalle questioni di fisica nelle quali sto cercando di utilizzarli.

1. DEFINIZIONI. — In quello che segue indicheremo con ψ, φ ecc. vettori appartenenti a una certa varietà lineare hilbertiana, e con $|\psi|, |\varphi|$, ecc. le loro norme definite nel modo solito.

Diremo brevemente « operatore hermitiano » per intendere un operatore hermitiano (definito da una matrice hermitiana) che goda delle seguenti proprietà:

a) Sia definito in una varietà V lineare completa nel senso di Neumann. (Ciò significa che se $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ è una successione di vettori appartenenti alla varietà V , tale che per ogni ϵ positivo è possibile scegliere un \bar{n} per cui qualunque siano n, m , maggiori di \bar{n} , $|\psi_n - \psi_m| < \epsilon$, la successione $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ ammette un vettore limite appartenente alla varietà. Brevemente, valga un criterio analogo a quello di Cauchy).

* (*) Presentata nella seduta del 19 aprile 1952.

b) I vettori risultanti dalla applicazione dell'operatore in questione ai vettori di V appartengono a una varietà lineare completa nel senso predetto.

c) Ammetta soltanto uno spettro puntuale $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ di autovalori (e non spettro continuo)

d) Sia tale che i suoi assi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ formino un sistema ortogonale normale e completo.

Definizione I. - Sia A un operatore hermitiano (nel senso precisato sopra); diremo che A è limitato se l'insieme dei valori assoluti $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, \dots$ dei suoi autovalori ammette un limite superiore $L(A)$.

Definizione II. - Sia $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ una successione di operatori hermitiani limitati, definiti nella stessa varietà lineare. Se esiste un operatore tale che per ogni ϵ positivo è possibile trovare un \bar{n} per cui, qualunque sia n maggiore di \bar{n} , $L(A - A_n)$ è minore di ϵ , dicesi che A è il limite della successione suddetta. (L'unicità del limite così definito si verifica facilmente).

Definizione III. - Siano A e B due operatori hermitiani limitati. Chiameremo rapporto L degli operatori A e B , e indicheremo con $R(A/B)$ il rapporto $L(A)/L(B)$.

Definizione IV. - Sia un insieme Ω di operatori hermitiani limitati. Se per ogni operatore A appartenente a Ω è definito un operatore $F(A)$ hermitiano e limitato, e se $L(F)$ è limitato superiormente in Ω , diremo che F è una funzione hermitiana limitata di A definita in Ω .

Definizione V. - Se $F(A)$ è una funzione hermitiana limitata di A definita in Ω , e se qualunque siano A_1 ed A_2 appartenenti ad Ω , $R((F(A_1) - F(A_2))/(A_1 - A_2))$ è limitato superiormente, dicesi che $F(A)$ è a rapporto incrementale L limitato in Ω .

Definizione VI. - Sia un operatore A i cui elementi matrice siano funzioni derivabili (integrabili) di un parametro λ , definiti in un certo intervallo $\Delta\lambda$. Diremo che A è funzione derivabile (integrabile) di λ definita in $\Delta\lambda$, e chiameremo derivata (primitiva) di A l'operatore avente come elementi matrice le derivate (primitive) dei corrispondenti elementi matrice di A .

Alcuni dei concetti definiti negli enunciati precedenti sono ben noti. Si sono tuttavia richiamati per chiarezza.

2. LEMMA. - Premettiamo al teorema che forma l'oggetto principale di questa Nota un lemma.

Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ è una successione di operatori hermitiani limitati, definiti nella stessa varietà lineare V , tali che per ogni ϵ positivo è possibile scegliere un \bar{n} per cui qualunque siano n, m , maggiori di \bar{n} , $L(A_n - A_m)$ è minore di ϵ , essa ammette un limite A secondo la definizione II (vale cioè un criterio analogo a quello di Cauchy).

Infatti sia φ un qualunque vettore (normalizzato), appartenente a V . Si consideri la successione di vettori

$$\psi_1 = A_1 \varphi, \psi_2 = A_2 \varphi, \dots, \psi_n = A_n \varphi, \dots$$

Intanto si verifica subito che, se $L(A_n - A_m)$ è minore di ε , $|\psi_n - \psi_m|$ è minore di ε . Segue (per la proprietà δ) degli operatori A) che la successione $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ ammette un limite ψ .

Quindi per ogni φ è definito un vettore ψ , ossia un operatore A che fa corrispondere ψ a φ . Si verifica immediatamente che l'operatore A è lineare ed hermitiano, ed è il limite della successione considerata.

3. - TEOREMA. - Possiamo ora enunciare e dimostrare il seguente teorema:

Sia $F(A, \lambda)$ un operatore hermitiano, funzione del parametro λ e dell'operatore hermitiano A , definito se λ appartiene ad un certo intervallo $\Delta_0 \lambda$ e se contemporaneamente $L(A)$ appartiene ad un certo intervallo $\Delta_0(A)$. Supponiamo che F goda nella suddetta regione di definizione delle seguenti proprietà:

1^a *Sia limitato.*

2^a *Se A è funzione di λ primitiva di un operatore limitato (o in particolare costante) sia integrabile, rispetto a λ .*

3^a *Sia a rapporto incrementale L limitato.*

Si consideri allora la seguente equazione operatoriale (equivalente a un sistema di infinite equazioni alle derivate ordinarie):

$$(1) \quad \frac{dA}{d\lambda} = F(A, \lambda).$$

Dico che, se $L(A_0)$ è interno a $\Delta_0(A)$ e se λ_0 è interno a $\Delta_0 \lambda$, l'equazione precedente ammette in un certo intorno $\Delta \lambda$ una soluzione tale che $A(\lambda_0) = A_0$.

Dimostrazione. - Premettiamo alcune osservazioni: se A_1, \dots, A_n sono operatori hermitiani limitati, $\sum_1^n c_i A_i$, dove i c_i sono numeri reali, è un operatore hermitiano limitato; inoltre

$$L\left(\sum_1^n c_i A_i\right) \leq \sum_1^n |c_i| L(A_i).$$

Analogamente, se $B(\lambda)$ è un operatore hermitiano limitato, definito in un certo intervallo $\Delta \lambda$ e integrabile, e se $M(B)$ è il limite superiore di $L(B)$ in $\Delta \lambda$, si ha

$$L\left(\int_{\Delta \lambda} B(\lambda) d\lambda\right) \leq M(B) \text{mis}(\Delta \lambda).$$

Queste proprietà si verificano facilmente in base alle definizioni che abbiamo dato.

Ciò posto si costruisca la successione

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 + \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} F(A_0, \lambda) d\lambda \\ A_2 &= A_0 + \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} F(A_1, \lambda) d\lambda \\ &\dots\dots\dots \\ A_n &= A_0 + \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} F(A_{n-1}, \lambda) d\lambda \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

dico che esiste un intervallo $\Delta\lambda$ tale che valgono le seguenti proprietà:

se $L(A_{n-1})$ appartiene a $\Delta_0(A)$ vi appartiene anche $L(A_n)$; la successione $A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ tende ad un limite, il quale per il modo con cui la successione è costruita soddisfa all'equazione in istudio.

Infatti, sia $M(F)$ il limite superiore di $L(F)$ nel dominio che si considera. Possiamo sempre scegliere intanto $\Delta\lambda$ in modo che $L(A_0) + M(F)\Delta\lambda$ sia interno a $\Delta_0(A)$. Allora per una osservazione già fatta segue appunto che se $L(A_{n-1})$ appartiene a $\Delta_0(A)$ vi appartiene pure $L(A_n)$. Segue che per ogni n $L(A_n)$ appartiene a $\Delta_0(A)$. Ciò posto, in virtù del lemma premesso, basterà dimostrare che, dato un ε positivo, si può sempre trovare un \bar{n} tale che qualunque siano n, m , maggiori di \bar{n} , $L(A_m - A_n)$ è minore di ε .

Sia infatti \bar{R} il limite superiore del rapporto incrementale L di F nella regione di definizione che consideriamo. Si ha allora

$$L(F(A_n, \lambda) - F(A_{n-1}, \lambda)) \leq \bar{R}L(A_n - A_{n-1}).$$

Segue che

$$L(A_{n+1} - A_n) \leq \bar{R}L(A_n - A_{n-1})\Delta\lambda.$$

Se ora noi scegliamo $\Delta\lambda < 1/\bar{R}$ (oltre che soddisfacente alla precedente condizione) segue immediatamente l'asserto.

Una generalizzazione e alcune applicazioni di questo teorema si troveranno in uno o più lavori di meccanica quantistica che conto di pubblicare; risultati preliminari relativi a tali lavori, per ottenere i quali sono stati utilizzati i concetti esposti in questa Nota, sono già stati pubblicati sul « Nuovo Cimento » (« Nuovo Cimento », VII, 899, 1950).

Fisica matematica. — *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono.* Nota II ^(*) del Corrisp. BRUNO FINZI.

4. In una precedente Nota I ⁽¹⁰⁾ (della quale proseguo la numerazione dei paragrafi e delle formule) ho dedotto entrambe le equazioni tensoriali del campo elettromagnetico maxwelliano nello spazio-tempo da un unico principio di minima azione $\delta \int_{\omega} l d\omega = 0$.

Con lo stesso procedimento si ottengono entrambe le equazioni elettromagnetiche relative a campi più generali dei campi maxwelliani, pur di generalizzare l'espressione dell'azione e quindi di l .

Ora, prendendo norma dalla (5), l è una densità d'energia, combinazione lineare di invarianti quadratici formati con gli elementi che caratterizzano il campo, la distribuzione elettrica, i potenziali.

Nel vuoto tali elementi sono i seguenti: $F_{\alpha\beta}$, j_{α} , Φ_{α} , Ψ_{α} . Gli invarianti quadratici indipendenti che con essi si costruiscono sono:

$$(14) \quad \begin{cases} a = F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} & , & b = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} & , & c = j_{\alpha} \Phi^{\alpha} & , & d = j_{\alpha} \Psi^{\alpha}, \\ e = j_{\alpha} j^{\alpha} & , & f = \Phi_{\alpha} \Phi^{\alpha} & , & g = \Psi_{\alpha} \Psi^{\alpha} & , & h = \Phi_{\alpha} \Psi^{\alpha}. \end{cases}$$

Col solo invariante a si costruisce l'azione di puro campo, che dà luogo alle equazioni maxwelliane relative ai campi neutri nel vuoto; coi due invarianti a e c si costruisce l'azione che dà luogo alle equazioni maxwelliane relative ai campi non neutri nel vuoto; con l'aggiunta dell'invariante f si ha l'azione che dà luogo alle equazioni di Proca-Yukawa. Tenendo conto anche degli altri invarianti (meno l'invariante e che è inefficace, perchè invariabile, a parità di distribuzione elettrica) si ottengono azioni più generali, le quali danno luogo alle equazioni differenziali che reggono nuovi campi più generali, che non mi risulta siano stati finora considerati.

In virtù di quanto è stato detto al n. 2,

$$(15) \quad \delta \int_{\omega} a d\omega = 4 \int_{\omega} \left\{ \operatorname{div} F_{\alpha\beta} \delta \Phi^{\alpha} + \frac{1}{2} \operatorname{rot} F_{\alpha\beta} \delta \Psi^{\gamma} \right\} d\omega;$$

in virtù di quanto è stato detto al n. 3,

$$(16) \quad \delta \int_{\omega} c d\omega = \int_{\omega} j_{\alpha} \delta \Phi^{\alpha} d\omega.$$

(*) Presentata nella seduta del 19 aprile 1952.

(10) Questi « Rendiconti ». vol. XII, fasc. 4, pp. 378-382 (1952).

Si ha pure in corrispondenza all'invariante b ⁽¹¹⁾:

$$\begin{aligned} \delta \int_{\omega} b d\omega &= 2 \int_{\omega} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varrho} F_{\alpha\beta} \delta F_{\gamma\varrho} d\omega = 2 \int_{\omega} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varrho} F_{\alpha\beta} (\delta\Phi_{\varrho/\gamma} - \delta\Phi_{\gamma/\varrho}) d\omega + \\ &+ 2 \int_{\omega} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varrho} \varepsilon_{\gamma\varrho\mu\nu} F_{\alpha\beta} \delta\Psi^{\mu/\nu} d\omega = 4 \int_{\omega} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varrho} F_{\alpha\beta} \delta\Phi_{\varrho/\gamma} d\omega + \\ &+ 8 \int_{\omega} F_{\mu\nu} \delta\Psi^{\mu/\nu} d\omega = 4 \int_{\omega} (\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varrho} F_{\alpha\beta} \delta\Phi_{\varrho})_{/\gamma} d\omega - 4 \int_{\omega} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varrho} F_{\alpha\beta/\gamma} \delta\Phi_{\varrho} d\omega + \\ &+ 8 \int_{\omega} (F_{\mu\nu} \delta\Psi^{\mu})_{/\nu} d\omega - 8 \int_{\omega} F_{\mu\nu}^{/\nu} \delta\Psi^{\mu} d\omega = -4 \int_{\tau} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varrho} F_{\alpha\beta} n_{\gamma} \delta\Phi_{\varrho} d\tau - \\ &- 8 \int_{\tau} F_{\mu\nu} n^{\nu} \delta\Psi^{\mu} d\tau - 4 \int_{\omega} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varrho} F_{\alpha\beta/\gamma} \delta\Phi_{\varrho} d\omega - 8 \int_{\omega} F_{\mu\nu}^{/\nu} \delta\Psi^{\mu} d\omega, \end{aligned}$$

e se sul contorno τ di ω è $\delta\Phi_{\varrho} = 0$, $\delta\Psi^{\mu} = 0$, risulta:

$$(17) \quad \delta \int_{\omega} b d\omega = -4 \int_{\omega} \{ \text{rot } F_{\alpha\beta} \delta\Phi_{\varrho} + 2 \text{div } F_{\alpha\beta} \delta\Psi^{\alpha} \} d\omega.$$

Si ha infine:

$$(18) \quad \delta \int_{\omega} d d\omega = \int_{\omega} j_{\alpha} \delta\Psi^{\alpha} d\omega,$$

$$(19) \quad \delta \int_{\omega} f d\omega = 2 \int_{\omega} \Phi_{\alpha} \delta\Phi^{\alpha} d\omega,$$

$$(20) \quad \delta \int_{\omega} g d\omega = 2 \int_{\omega} \Psi_{\alpha} \delta\Psi^{\alpha} d\omega,$$

$$(21) \quad \delta \int_{\omega} h d\omega = \int_{\omega} (\Phi_{\alpha} \delta\Psi^{\alpha} + \Psi_{\alpha} \delta\Phi^{\alpha}) d\omega.$$

Prendiamo per l la seguente generica combinazione lineare di invarianti quadratici:

$$(22) \quad l = \frac{a}{4} + \frac{\kappa}{4} b - c - \chi d - \frac{1}{2\lambda^2} (f + \mu g + \nu h),$$

dove $\kappa, \chi, \lambda, \mu, \nu$ sono costanti universali: κ, χ, μ, ν sono puri numeri

(11) Se \mathbf{E} ed \mathbf{H} sono i due vettori dello spazio geometrico tridimensionale che individuano rispettivamente il campo elettrico e quello magnetico, si può rilevare che mentre l'invariante a è il quadruplo della differenza fra la densità d'energia magnetica e quella di energia elettrica, $a = 4 \frac{H^2 - E^2}{2}$, l'invariante b è proporzionale al prodotto scalare $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$.

e λ è una lunghezza ⁽¹²⁾. In corrispondenza le equazioni del campo elettromagnetico, ricordando le (15) (21), si presentano così:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } F_{\alpha\beta} - \kappa \text{rot } F_{\sigma\beta} - j_\alpha - \frac{1}{\lambda^2} \Phi_\alpha - \frac{\nu}{2\lambda^2} \Psi_\alpha = 0 \\ \frac{1}{2} \text{rot } F_{\sigma\beta} - 2\kappa \text{div } F_{\alpha\beta} - \chi j_\alpha - \frac{\mu}{\lambda^2} \Psi_\alpha - \frac{\nu}{2\lambda^2} \Phi_\alpha = 0, \end{array} \right.$$

ossia:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } F_{\sigma\beta} = 4\kappa \text{div } F_{\sigma\beta} + 2\chi j_\alpha + \frac{\nu}{\lambda^2} \Phi_\alpha + \frac{2\mu}{\lambda^2} \Psi_\alpha \\ \text{div } F_{\alpha\beta} = \kappa \text{rot } F_{\sigma\beta} + j_\alpha + \frac{1}{\lambda^2} \Phi_\alpha + \frac{\nu}{2\lambda^2} \Psi_\alpha. \end{array} \right.$$

Queste equazioni, per $\kappa, \chi, \mu, \nu, 1/\lambda^2$ nulli, si riducono alle (1) e (2); per κ, χ, μ, ν nulli e $1/\lambda^2$ non nullo, si riducono alle equazioni del campo di Yukawa.

Dalle (23) si deduce, prendendo la divergenza d'ambo i membri e ricordando che i vettori Φ_α e Ψ_α sono solenoidali:

$$(24) \quad \text{div } j_\alpha \equiv j_\alpha' = 0.$$

Il vettore distribuzione elettrica risulta dunque solenoidale anche quando le equazioni del campo elettromagnetico sono le generiche (23), cioè vige anche in questo caso il principio di conservazione dell'elettricità, tradotto appunto dalla (24).

5. Nella teoria di Mie gli elementi del campo elettromagnetico sono i due tensori $F_{\alpha\beta}$ e $f_{\sigma\beta}$, i relativi potenziali Φ_α, Ψ_α e $\varphi_\alpha, \psi_\alpha$, nonché la distribuzione elettrica j_α . Con questi elementi è facile generalizzare l'invariante costituito dall'espressione differenziale (8), e trarre dal corrispondente principio di minima azione delle equazioni più generali di quelle di Mie. Fra queste rientrano in particolare quelle di Bopp che sono costruite sovrapponendo al campo di Maxwell il campo di Yukawa, ma molte altre se ne possono facilmente costruire.

Nel principio di minima azione

$$(25) \quad \delta \int l d\omega = \int \delta l d\omega = 0,$$

poniamo genericamente

$$(26) \quad \delta l = \frac{1}{2} \delta (f_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) + \frac{\kappa}{2} \delta (\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}) - j_\alpha \delta (\Phi^\alpha + \chi \Psi^\alpha + \chi' \varphi^\alpha + \chi'' \psi^\alpha) - \\ - \frac{1}{\lambda^2} (\varphi_\alpha + \nu \psi_\alpha + \nu' \Phi_\alpha + \nu'' \Psi_\alpha) \delta (\varphi^\alpha + \mu \psi^\alpha + \mu' \Phi^\alpha + \mu'' \Psi_\alpha),$$

dove κ , le χ , λ , le μ , le ν sono costanti universali: κ , le χ , le μ , le ν , sono puri numeri e λ è una lunghezza.

(12) Nella (22) il coefficiente dell'invariante ε è unitario perchè si presume un'opportuna scelta delle unità di misura: quella stessa scelta che permette di scrivere la (2) senza che j_α sia affetto da un coefficiente rappresentante una costante universale.

Ritenendo la (25) valida qualunque siano le variazioni date ai potenziali in ω , purchè nulle sul contorno τ , si ottengono le seguenti equazioni:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} f_{\alpha\beta} - \kappa \operatorname{rot} f_{\alpha\beta} - j_{\alpha} - \frac{\mu'}{\lambda^2} (\varphi_{\alpha} + v\psi_{\alpha} + v'\Phi_{\alpha} + v''\Psi_{\alpha}) = 0 \\ \frac{1}{2} \operatorname{rot} f_{\alpha\beta} - 2\kappa \operatorname{div} f_{\alpha\beta} - \chi j_{\alpha} - \frac{\mu''}{\lambda^2} (\varphi_{\alpha} + v\psi_{\alpha} + v'\Phi_{\alpha} + v''\Psi_{\alpha}) = 0 \\ \operatorname{div} F_{\alpha\beta} - \kappa \operatorname{rot} F_{\alpha\beta} - \chi' j_{\alpha} - \frac{1}{\lambda^2} (\varphi_{\alpha} + v\psi_{\alpha} + v'\Phi_{\alpha} + v''\Psi_{\alpha}) = 0 \\ \frac{1}{2} \operatorname{rot} F_{\alpha\beta} - 2\kappa \operatorname{div} F_{\alpha\beta} - \chi'' j_{\alpha} - \frac{\mu}{\lambda^2} (\varphi_{\alpha} + v\psi_{\alpha} + v'\Phi_{\alpha} + v''\Psi_{\alpha}) = 0. \end{array} \right.$$

Da queste equazioni, prendendo la divergenza d'ambo i membri, discende ancora la (24) che, affermando la solenoidalità di j_{α} , traduce il principio di conservazione dell'elettricità.

Un notevole caso particolare è quello in cui $\kappa = \chi = \chi' = \chi'' = \mu = \mu' = \mu'' = 0$, $v = v' = 0$, mentre $v'' = -1$. Le (27) diventano:

$$(28) \quad \operatorname{div} f_{\alpha\beta} = j_{\alpha}, \quad \operatorname{rot} f_{\alpha\beta} = 0, \quad \operatorname{div} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda^2} (\varphi_{\alpha} - \Phi_{\alpha}), \quad \operatorname{rot} F_{\alpha\beta} = 0.$$

Le (28) mostrano che il campo $f_{\alpha\beta}$ è maxwelliano, e si verifica facilmente che il campo di polarizzazione

$$(29) \quad U_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta}$$

è un campo di Yukawa, perchè dalle (28) e dalla (29) si deduce:

$$(30) \quad \operatorname{rot} U_{\alpha\beta} = 0, \quad \operatorname{div} U_{\alpha\beta} = j_{\alpha} - \frac{1}{\lambda^2} (\varphi_{\alpha} - \Phi_{\alpha}).$$

Se allora ζ_{α} è il potenziale del tensore irrotazionale $\frac{1}{\lambda} U_{\alpha\beta}$, se cioè

$$\frac{1}{\lambda} U_{\alpha\beta} = \zeta_{\beta/\alpha} - \zeta_{\alpha/\beta},$$

si ha:

$$\varphi_{\alpha} - \Phi_{\alpha} = \lambda \zeta_{\alpha},$$

e quindi la seconda delle (30) diviene:

$$(31) \quad \operatorname{div} U_{\alpha\beta} = j_{\alpha} - \frac{1}{\lambda} \zeta_{\alpha}.$$

come è proprio del campo di Yukawa.

Il campo $F_{\alpha\beta}$ retto dalle equazioni (28) si ottiene dunque componendo il campo maxwelliano $f_{\alpha\beta}$ col campo di Yukawa $U_{\alpha\beta}$: esso è dunque un campo di Bopp ⁽¹³⁾.

(13) F. BOPP, loc. cit., p. 349. Cfr. P. CALDIROLA, « Rend. Seminario mat. e fis. di Milano », XXII, 1951.

Fisica. — *Spazio e tempo*. Nota (*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

In una serie di Note presentate negli ultimi anni, ho esposto molteplici argomenti che, nel loro complesso, mostrano la infondatezza della teoria speciale della relatività. Ho anche riferito su ricerche tendenti a ribadire sperimentalmente tale conclusione. Salvo qualche rilievo di lieve entità, da parte di altri, che è stato poi da me preso in esame, le mie Note non hanno dato luogo a discussione, da parte dei sostenitori di quella teoria. Ora, poichè essa, per reggersi, vorrebbe modificare profondamente, sia pure nel caso di grandissime velocità, le classiche proprietà dello spazio e del tempo, ritengo opportuno, in questa Nota, far vedere come un tentativo del genere sia del tutto inaccettabile.

La concezione spazio-temporale è fondamentale, nell'osservazione del mondo esteriore. Lo spazio ed il tempo, nella natura, sono illimitati. È possibile supporre, per il primo, a partire dal punto, in cui l'osservatore si trova, il susseguirsi di misurazioni rettilinee indefinite, eseguite in modo identico, seguendo le tre dimensioni spaziali, e servendosi di prestabilita unità di lunghezza. Con tali misure, vengono definite le posizioni euclidee degli infiniti punti dello spazio. Così pure, il procedere del tempo è indefinito nel futuro, come lo fu, riandando con la mente verso il passato. Tra tali epoche, si trova l'istantaneo presente. La qualifica di istantaneo corrisponde ad una durata estremamente ridotta, e del tutto trascurabile, di fronte a qualsiasi avvenimento temporale, constatabile. Anche la misura del tempo vien fatta servendosi di unità opportune, come anno, giorno, ora, minuto, secondo, vibrazioni meccaniche od ottiche, ecc.

Con tali avvertenze, è chiaro che gli enti spazio e tempo vengono, in certo modo, legati al detto punto-origine, in cui si trova l'osservatore. Lo spazio, così precisato, può non essere vuoto; ossia può contenere materia continua o discontinua, corpuscoli, energia di forma qualsiasi. Si tratta cioè di enti che l'osservatore stesso può però considerare in quiete, per lui, od in moto. Nel primo caso, il trascorrere del tempo corrisponde ad una fase statica, ed esso non provoca alcuna variazione nelle condizioni spaziali. Nel secondo caso, occorre prendere in considerazione, per quanto concerne qualche parte dello spazio, velocità, che qui vogliamo supporre soltanto rettilinee ed uniformi. Intendiamo, cioè, prescindere dai moti accelerati o di rotazione.

Così inteso, lo spazio, riferito ad un certo suo punto (scelto come origine), non ha alcun significato assoluto, a differenza di quanto avveniva quando si ammetteva l'esistenza dell'etere cosmico, per la necessità di spiegare la trasmissione a distanza, dell'energia raggiante. Le considerazioni fatte possono ripetersi per un punto qualsiasi dello spazio, preso come origine delle misurazioni lineari e, per comodità, anche di quelle temporali,

(*) Presentata nella seduta del 10 maggio 1952.

Per quanto concerne queste ultime, considerando il tempo, riferito ad un'origine temporale, e supponendo che lo spazio sia occupato da un sistema immobile ed indeformabile, il suo trascorrere si svolge in modo identico, in tutti i punti dello spazio. Si tratta, cioè del tempo unico, detto anche nella meccanica classica, universale, da non confondersi col cosiddetto tempo assoluto che non ha alcun significato, non potendosi scegliere un'origine assoluta dei tempi. Il tempo unico, nel caso di un sistema indeformabile, è ammesso anche dalla relatività di Einstein.

La concezione euclidea dello spazio è qualcosa che si inquadra in noi, in modo del tutto intuitivo. Possiamo pensare che le misurazioni rettilinee, lungo tre assi coordinati, avvengano sempre allo stesso modo, ancorchè lo spazio abbia particolari contingenze fisiche, diverse dal vuoto assoluto. La ricerca fisica ci permette di assicurarci, in ogni caso di ciò, e di evitare, con tutta esattezza, che quelle contingenze perturbino le dette misure. Così pure, dicasi per le misure temporali. Che il moto di un sistema (se uniforme e rettilineo) perturbi le une e le altre, costituisce una vana asserzione della relatività di Einstein, come mostrerò ancora e meglio, in questa Nota.

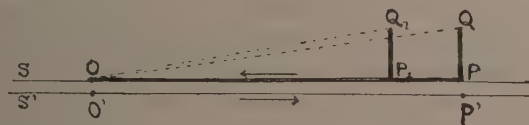
Se la materia, in particolari condizioni, può, con la sua presenza, dar luogo alla formazione di campi di forza (gravifica, elettrica, magnetica), ciò non impedisce la descrizione dello spazio, esattamente allo stesso modo, come in assenza di campo. Le coordinate cartesiane di un suo punto qualsiasi, rimangono inalterate. L'esistenza di campi, non più attribuibile all'etere cosmico, e la cui natura intima ci sfugge del tutto, non modifica le caratteristiche di quelle coordinate. È una grave improprietà di linguaggio, discorrere di spazio curvo; la quale dicitura, puramente geometrica o matematica, non può corrispondere ad un tempo, ai tre fatti diversi, dei campi accennati. Uno stesso simbolo matematico non può differenziare questi fatti. Di essi, può esprimere esattamente la caratteristica vettoriale (forza), ma non risalire alla sua origine fisica, che può essere triplamente diversa.

Considerazioni ulteriori debbono farsi, se intervengono condizioni di moto uniforme, tra sistemi rigidi. Anzitutto, quanto si è detto può valere scegliendo un punto qualunque di tali sistemi, quale origine spazio-temporale. Si comprende che così, la descrizione dello spazio-tempo sarebbe diversa, se riferita ad un'origine od ad un'altra. Ora, è noto che se le contingenze di moto uniforme corrispondono a piccolissime velocità uniformi, basta servirsi della trasformazione di Galileo, per passare dalla descrizione dello spazio, riferita ad uno, piuttosto che ad un altro sistema di coordinate, reciprocamente in moto. Ma se quelle velocità sono notevoli, in guisa da lasciar ritenere che segnalazioni luminose a distanza (necessarie per i rilievi delle posizioni istantanee dei vari punti) esigono un tempo, non trascurabile, rispetto a quelli occorrenti agli spostamenti dati dalle velocità stesse, la trasformazione di Galileo non è più valida. Occorre cercare perciò, altra soluzione, ed in conseguenza sono state proposte due vie, nel corso di questa prima metà del secolo. La prima partiva dall'ammissione della contrazione della materia traversata dall'etere (Lorentz-Fitz Gerald). Essa,

pur presentando caratteri di logica attendibilità, fu presto abbandonata. Ciò avvenne, anche per il sorgere della teoria della relatività, il cui successo ben noto, costituì la seconda via.

Ora, mentre la teoria eterea non modificava le caratteristiche dello spazio e del tempo (il tempo locale di Lorentz costituiva una pura convenzione matematica), quella di Einstein imponeva a tali enti proprietà nuove, mai, in precedenza, sospettate. Si dice ciò, pur riferendosi soltanto al caso di grandi velocità, fra sistemi in moto. Senza ricordare quale sia il metodo seguito da Einstein, per ritrovare la Trasformazione di Lorentz (T.L.), da lui scritta, partendo da ipotesi diversa da quella del fisico olandese, è noto come le cosiddette contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi, rappresentano una conseguenza matematica della T. L. stessa.

Se tali nuove proprietà dello spazio e del tempo sono accettate con fiducia dai relativisti, un attento esame mostra come esse non siano fisicamente attendibili. Per persuadersi di ciò, non basta seguire Einstein nei suoi ragionamenti, la cui artificiosità non voglio qui discutere. Si deve, inoltre, verificare se la T.L. possa venire adottata in qualsiasi caso fisico. Ciò corrisponde, per esempio, a verificare se, disponendo opportune trasmissioni luminose, raccolte da osservatori reciprocamente in moto, quel gruppo di equazioni dia risultati coerenti, con i fatti osservabili, sia pure soltanto idealmente concepiti. Io credo che soltanto l'abitudine all'esperimento può dare, in tal caso, utile risultato.



Si considerino due sistemi rettilinei, S, S' , in moto reciproco con la velocità v , scorrenti vicinissimi l'uno sull'altro e praticamente sovrapposti. Su S , si trovi un regolo di lunghezza molto grande, $l = OP$. Con esso è solida un'asta PQ , piccola di fronte ad l , a cui essa è normale. Dal punto O , per il sistema S , l'asta PQ è vista sotto l'angolo QOP . Quando il punto O' , di S' , viene a coincidere, istantaneamente con O , i due osservatori di O ed O' determinano in qualche modo quell'angolo. Fisicamente, possono far ciò, mediante fotografie istantanee. Tali fotografie, fatte da due osservatori coincidenti, non possono essere che identiche. Per cui, tanto O , quanto O' giudicano che l'asta OP , ed in conseguenza la lunghezza OP , abbiano, per essi gli stessi valori. La velocità v , che O' ha rispetto ad O non può avere alcuna influenza fisica su tale determinazione fotografica. Qualunque fosse il valore di v , il risultato delle misure di O ed O' coincidenti, non può essere che quello ora detto.

Ma la relatività speciale porta ad un risultato differente. Infatti, O' , che è in moto con la velocità v , rispetto ad OP , nell'istante in cui viene a coincidere con O (e per vero, in qualsiasi istante), giudica che la lunghezza l sia raccorciata nella misura $l' = l\sqrt{1 - (v/c)^2} = l\beta$. Per cui, O' riterrebbe

che l'asta PQ (per lui di inalterata lunghezza) sia sottesa dall'angolo Q_1OP_1 , alquanto maggiore di QOP . Nel cliché fotografico, di O' , l'immagine di Q_1P_1 , dovrebbe, in conseguenza, risultare alquanto maggiore di quella di QP . Ciò è in contrasto con la conclusione fisica, a cui siamo sicuramente prima pervenuti, ed è perciò inammissibile.

Che l'ammissione relativistica, della contrazione delle lunghezze, costituisca un assurdo, può anche rilevarsi nel seguente modo. Suppongasi che l'osservatore O' non abbia ancora raggiunto O . Mentre esso si muove, giudica pur sempre che la lunghezza l sia ridotta ad l' . Questa riduzione deve riguardare, geometricamente, uno spostamento dei punti di OP , che essi avrebbero subito, perchè OP è passato dalla lunghezza l a l' . Si domanda allora, qual sia la legge di tali spostamenti. Evidentemente, essendo $l > l'$, solo un punto di l' può essere, se mai, rimasto in coincidenza, col corrispondente di l . Tale punto sarà P , O , il punto di mezzo di OP , od un altro? La relatività non dà risposta alcuna a tale domanda. Ed inoltre, se si considerano trattini come OP , ma estremamente piccoli, essi, per la relatività, dovrebbero apparire ad S' , insensibilmente ridotti. Ed allora, si dovrebbe ammettere che ciascuno di tali trattini rimanga immobile su S , dovendo il punto medio di ciascun trattino avere la velocità v rispetto ad S' . Si vede dunque che l'ammissione relativistica, della contrazione delle lunghezze, conduce ad un inestricabile bisticcio.

Le considerazioni fatte si riferiscono all'ente spazio. Se ne possono formulare delle analoghe, ma alquanto diverse, per l'ente tempo. Ovviamente, tale diversità trae la sua origine, dal confronto tra la natura dello spazio, con quella del tempo. La relatività vorrebbe artificiosamente assimilare tali enti, mentre essi differiscono, per lo meno, per la reversibilità o no, dei loro sensi. Tale reversibilità manca per il tempo, per il quale non può sostituirsi il passato all'avvenire. In altri termini, non si può, con un artificio matematico, togliere alla nostra mente la facoltà di distinguere enti tanto diversi, quali lo spazio ed il tempo.

Per esaminare le asserzioni relativistiche sul tempo, riferiamoci ancora ai due sistemi S ed S' , consistenti in due tratti OP , $O'P'$, in reciproco movimento, con la velocità uniforme v . I due punti O , O' , sono, come prima, le origini spazio-temporali dei due sistemi. Consideriamo che cosa avvenga nell'istante zero comune, cioè quando, come in figura, le due origini coincidono. Se P , a giudizio di S , coincide con P' , mentre O ed O' pure coincidono, dicendo l e zero, le coordinate spazio-temporali di P , si ha, dalla relatività, che quelle di P' sono $x' = \beta l$, $t' = -\beta (v/c^2) l$. In altri termini, il sistema S , mentre giudica che $O'P'$ è più lungo di OP (il che corrisponde al raccorciamento della unità di misura di S ; la quale conclusione, come si è visto, costituisce un assurdo), si ha in P un tempo che è diverso, da quello che S' ha in P' . Tale asserzione è però fisicamente insostenibile. Infatti, se due osservatori si trovano nella stessa località, non possono asserire che, per loro, il comune istante di tempo sia diverso. Per quanto sia difficile dare una definizione dell'ente tempo, la nostra più elementare

intuizione ci dice che due esseri ragionevoli, trovandosi insieme, debbano dire: «il nostro tempo è unico; se i nostri due orologi indicano ore diverse, non si deve fare altro che metterli d'accordo; non ha significato dire che uno di noi due trovasi in un tempo che per l'altro è nel futuro o nel passato, noi possiamo comunicarci, senza ritardo alcuno, qualsiasi notizia, toccarci, ecc., far cioè tutto quanto è consentito dalla nostra coincidenza spaziale e coteremporale».

Per cui, i due punti P e P' , nell'istante in cui coincidono, non possono che aver lo stesso tempo. Ragionamenti o teorie simili alla relatività, che portano all'asserzione di una diversità tra i loro tempi, sono fondamentalmente errati. Ed è veramente sorprendente, come quella teoria abbia potuto riscuotere credito, per circa mezzo secolo! Del resto, che un simile modo di vedere sia anche condiviso da Einstein, senza che egli se ne renda conto, lo si rileva sia dalla sua prima Memoria del 1905, sia dalle conferenze che egli tenne per decenni, in seguito. Egli ammetteva, che se un osservatore si muove a grande velocità, rispetto ad un altro, rimasto fermo, questi è trovato alquanto invecchiato rispetto al primo, quando i due osservatori tornano ad incontrarsi. In dir ciò, Einstein asserisce due fatti: da un canto che il tempo è scorso più lentamente per l'osservatore in moto (si prescinde dal rilievo per cui, dei due osservatori, nessuno ha moto assoluto!); dall'altro, che i due osservatori, ritrovandosi, compiono implicitamente un'osservazione nello stesso istante, chè, se così non fosse, non si potrebbe parlare di confronto di età.

Ora, se i punti in coincidenza, P P' , hanno lo stesso tempo, contrariamente a quanto asserisce la relatività, la stessa cosa deve succedere per gli infiniti altri punti del sistema S , che nell'istante di coincidenza di O con O' , hanno ancora lo stesso tempo zero. Per cui, in tale istante, tutti i punti di S hanno lo stesso tempo di quelli di S' . La stessa asserzione si può fare, considerando S' fermo ed S in moto. I due sistemi hanno così, all'istante zero e dovunque, lo stesso tempo; e questo tempo procede regolarmente allo stesso modo per essi, nell'avvenire, come vuole la fisica classica.

Da quanto ho esposto, risulta, con tutta evidenza, la fallacia della pretesa contrazione degli spazi e dilatazione dei tempi, che un sistema rileva, su di un altro in moto. Queste strane ammissioni, come ho già ricordato, si deducono necessariamente dalla T.L., artificiosamente ritrovata, dopo aver abbandonato la teoria eterea. La loro inconsistenza fisica viene così, di nuovo confermata. E poichè il gruppo di equazioni citato rappresenta una conseguenza matematica, del secondo postulato della relatività, si rileva ancora una volta l'assurdità di questo postulato. Forse il modo più sintetico, per accennare a ciò, consiste nell'osservare che l'ente luce, considerato in un istante scelto a piacere, quale un fatto ondulatorio o corpuscolare, partente da un punto dello spazio, non può avere la stessa velocità di trasmissione, riferita a qualsiasi altro punto in moto, con velocità qualunque. Lo sprazzo di luce, così considerato, rappresenta un fatto unico e ben determinato, le cui caratteristiche cinematiche debbono essere diversamente giudicate, dai vari osservatori, diversamente in moto.

Tutto quanto ho esposto conferma l'inconsistenza delle basi della relatività speciale. Criteri fisici e logici ci inducono dunque, a rigettare risolutamente tale teoria, malgrado il credito da essa comunemente riscosso. Tale credito è dovuto, al non essere state sinora formulate le semplici, precise e chiare obiezioni ora esposte, che hanno un evidente carattere fisico-logico. Si deve dire però, che un altro motivo di quel credito si ha, nella opinione, generalmente diffusa, del grande merito di Einstein, per aver formulato l'asserita equivalenza fra massa ed energia. Tale principio, che non discende senz'altro dalle basi cinematiche della relatività, costituisce, per vero, una nuova ed indipendente, ardita ipotesi, che nulla ha a che fare con quelle basi. Essa, se accettata, ci appare quale una inaspettata rivelazione, di un fatto, *a priori*, del tutto imprevedibile. Di esso, la fisica atomica sembra darci una meravigliosa conferma.

Ma al riguardo di ciò, voglio ancora ricordare due considerazioni, da me esposte in una precedente Nota. Da un canto, se il 2° postulato della relatività non è ammissibile, cade il principio della costanza di c , essendosi abolita la concezione eterea. Non sembra così facile, mantenere la relazione $\epsilon = mc^2$, nella quale il rapporto ϵ/m deve essere costante. D'altro canto, come ho già mostrato altrove, s'incontrano certe difficoltà, nello stabilire perchè il protone abbia massa diversa se libero, od in unione con neutroni. Le dette due ragioni possono indurci a pensare che la conferma ora ricordata, della formula di Einstein, non sia che fortuita. In tale senso, l'esperienza potrà sciogliere l'enigma. Se ne avrà la possibilità, tornerò in avvenire sull'argomento.

Chimica. — Polarografia dei cianuri complessi di nichel^(*).

Nota di VINCENZO CAGLIOTI, GUIDO SARTORI, PAOLO SILVESTRONI, presentata^(**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

Il comportamento polarografico delle soluzioni di $K_2Ni(CN)_4$ è stato studiato da vari Autori ma a tutt'oggi esistono ancora discordanze nei risultati e nella stessa interpretazione del fenomeno. In una nostra Nota⁽¹⁾ del 1947 arrivammo alla conclusione che il $K_2Ni(CN)_4$, al polarografo, si riduceva a un complesso del Nichel monovalente, analogamente a quanto aveva ammesso Bellucci⁽²⁾ eseguendo la riduzione con amalgama di sodio.

Invece in un lavoro apparso nel 1950⁽³⁾ Hume e Kolthoff concludono che la riduzione polarografica porta a Nichel metallico.

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale ed inorganica dell'Università. Centro di Chimica Generale del C.N.R. Roma.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1952.

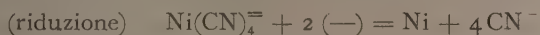
(1) « Rend. Acc. Naz. Lincei », 8, 448 (1947).

(2) « Gazz. Chim. Ital. », 43, 569 (1913); « Gazz. Chim. Ital. », 49, 70 (1919).

(3) « J.A.C.S. », 62, 4423 (1950).

Scopo della presente Nota è di riesaminare i dati sperimentali e di trovare una possibile spiegazione delle discordanze esistenti fra i due lavori.

Esponiamo prima di tutto, per chiarezza, le esperienze conclusive sia di Hume e Kolthoff che nostre. I primi Autori ⁽³⁾ riducono con amalgama di sodio una soluzione cianidrica di $K_2Ni(CN)_4$ addizionata di gelatina. Ottenuta una parziale riduzione del $K_2Ni(CN)_4$, eseguono il rilevamento polarografico sia dell'onda di ossidazione del complesso del nichel monovalente che di quella di riduzione del complesso del nichel bivalente. Ossidando poi parzialmente il complesso monovalente con ferricianuro potassico gli Autori osservano che per la scomparsa di 1 μA della corrente di ossidazione, si ha un aumento di 2 μA nella corrente di riduzione. Da ciò essi deducono che il processo di riduzione è di ordine elettrochimico doppio del primo e che cioè se la ossidazione involve un elettrone, la riduzione ne involve due: da ciò essi concludono che la riduzione porta a nichel metallico; gli schemi sarebbero:



L'esperienza da cui noi (1) abbiamo invece concluso che la riduzione avviene secondo lo schema:



è la seguente:

una soluzione di KOH N/1 contenente $3,94 \cdot 10^{-4}$ moli di $K_2Ni(CN)_4$ è stata polarografata e si è ottenuta un'onda con un potenziale di semionda di $-1,442 v$ e con una corrente di diffusione di 5,8 μA . Questa soluzione è stata poi coulombometrata prolungando il passaggio della corrente fino a raggiungere 180 Coulomb ⁽⁴⁾ contro i 76 teoricamente necessari per la scarica $Ni^{++} \rightarrow Ni^0$ di tutto il nichel presente. Se ora la soluzione, che da gialla è diventata rossa, è lasciata riossidare spontaneamente fuori del contatto diretto dell'aria dopo aver rimosso il mercurio catodico, il colore ritorna giallo, e polarografando di nuovo si ottiene un'onda con potenziale di semionda di $-1,444 v$, con una corrente di diffusione di 5,6 μA .

Se si riflette sul fatto che la diffusione dalla zona catodica a quella anodica della cella, anche ridotta al minimo con tutti gli accorgimenti non è del tutto eliminabile, si può affermare che nella soluzione riossidata è presente la totalità del $K_2Ni(CN)_4$ che era contenuto nella stessa soluzione prima della riduzione.

(4) Nel caso della coulombometria del $K_2Ni(CN)_4$ è possibile far passare nel coulombometro una quantità di corrente grande quanto si vuole perchè, dopo un certo tempo da che procede l'elettrolisi, si arriva ad un equilibrio fra il complesso del nichel bivalente che viene ridotto elettroliticamente e quello del nichel monovalente che si ri ossida chimicamente a spese dell'acqua: è appunto l'esistenza di questo equilibrio che impedisce di poter usare il coulombometro, in questo caso, per calcoli quantitativi sul numero degli elettroni in giuoco nella riduzione.

Altra prova coulombometrica è stata eseguita usando come catodo, invece del mercurio agitato sul fondo della cella, un getto di mercurio attraverso un setto di vetro poroso, per avvicinarsi il più possibile alle condizioni polarografiche: anche in questo caso si è ottenuto un risultato assolutamente analogo a quello già descritto per l'esperienza effettuata col normale coulombometro.

Esperienze analoghe a queste si sono effettuate operando sia su soluzioni di $K_2Ni(CN)_4$ a varie concentrazioni di KCN, che su soluzioni contenenti soppressori di massimi, ottenendo sempre gli stessi risultati: si può perciò concludere che riducendo al coulombometro una soluzione di $K_2Ni(CN)_4$ non si ha scomparsa di nichel in nessuna condizione di esperienza. È perciò ovvio che non essendosi il nichel depositato sul mercurio allo stato metallico esso deve essere rimasto in soluzione in un complesso a valenza inferiore. Possiamo pensare a due possibilità: o il nichel si è ridotto a un complesso in cui il metallo è monovalente, tipo $Ni(CN)_3^-$, oppure zero valente, tipo $Ni(CN)_4^{--}$; l'esistenza di questo ultimo è stata provata riducendo con potassio metallico una soluzione di $K_2Ni(CN)_4$ in ammoniaca liquida ⁽⁵⁾. Ulteriori indicazioni su quale dei due processi abbia effettivamente luogo, potrebbero dedursi principalmente dallo studio della corrente di diffusione, e perciò abbiamo rivolto a queste la nostra attenzione.

TABELLA I.

Altezza onda del K_2NiCN_4 della sol. di partenza. (in μA)	Altezza onda del complesso monovalente della sol. ridotta (in μA)	Altezza onda del K_2NiCN_4 nella sol. ridotta (in μA)	Somma delle altezze (in μA)
5,60	—	—	5,60
—	3,47	2,20	5,67
—	4,36	1,21	5,57

Se la riduzione dell' $Ni(CN)_4^{--}$ portasse a $Ni(CN)_3^-$, si dovrebbe verificare quanto segue: l'altezza dell'onda polarografica ottenuta da una soluzione di $Ni(CN)_4^{--}$ dovrebbe essere uguale alla somma delle altezze delle due onde che si ottengono polarografando la stessa soluzione dopo riduzione parziale, cioè alla somma dell'altezza dell'onda di ossidazione dell' $Ni(CN)_3^-$, proveniente dalla riduzione, e di quella dell'onda dell' $Ni(CN)_4^{--}$ che non è stato ridotto. Ciò non potrebbe naturalmente verificarsi se la riduzione dell' $Ni(CN)_4^{--}$ portasse invece a nichel metallico.

Riportiamo ora le esperienze effettuate allo scopo di tentare di accertare quale delle due ipotesi sia da accettarsi.

(5) « J.A.C.S. », 67, 1916 (1945).

Si è effettuato il rilevamento polarografico in assenza di soppressori di massimi, in una soluzione $4,2 \cdot 10^{-4}$ M di $K_2Ni(CN)_4$ in KOH N/2, isolata dall'atmosfera mediante uno spesso strato di olio di vaselina. La soluzione è stata poi ridotta parzialmente con amalgama di potassio all'1 % e polarografata di nuovo; indi si è ridotta ulteriormente aggiungendo ancora amalgama e si è effettuato altro rilevamento polarografico. I dati della tabella I ci dicono come la somma delle altezze dell'onda di ossidazione del complesso del nichel monovalente, che presenta un notevole massimo, e di quella di riduzione del complesso del nichel bivalente, si mantiene, durante i successivi stadi di riduzione, costante ed uguale all'altezza dell'onda di partenza.

Una analoga esperienza è stata fatta riducendo il $K_2Ni(CN)_4$ anziché chimicamente, elettrochimicamente: cioè si è posta nel coulombometro una soluzione N/2 in KOH contenente $5 \cdot 10^{-4}$ moli di $K_2Ni(CN)_4$ separata dall'aria da uno strato di vaselina, e si sono effettuati polarogrammi prima di iniziare la riduzione, dopo una prima riduzione e dopo una ulteriore riduzione. I dati della tabella II confermano quelli della tabella I.

TABELLA II.

Altezza onda del K_2NiCN_4 della sol. di partenza (in μA)	Altezza onda di ossidazione (in μA)	Altezza onda di riduzione (in μA)	Somma delle altezze (in μA)
6,70	—	—	6,70
—	3,60	3,20	6,80
—	5,25	1,59	6,84

Nella esecuzione di ciascuna serie di polarogrammi si è curato di mantenere costante il gocciolamento del capillare sia per la curva di ossidazione (effettuata fra — 0,2 e — 0,8 v) sia per quella di riduzione (effettuata fra — 1,1 e — 1,7 v); si è cioè eliminata la variazione di i_d che sarebbe stata conseguenza del diverso valore del prodotto $m^{2/3} t^{1/6}$ nei due casi.

Risultati diversi presentano le descritte esperienze se si opera in presenza di soppressori di massimi o di eccesso di cianuro. Si sono ripetute le esperienze ora descritte, come appresso: una soluzione N/2 di KOH contenente $4,8 \cdot 10^{-4}$ moli di $K_2Ni(CN)_4$ è stata polarografata, indi parzialmente ridotta e polarografata di nuovo. A questo punto si è cominciato ad aggiungere alla soluzione parzialmente ridotta gelatina in quantità crescenti, polarografando dopo ogni aggiunta. Nei successivi polarogrammi è stato effettuato il rilevamento polarografico della sola onda di ossidazione, mentre l'onda di riduzione è stata registrata soltanto alla fine: ciò per rendere l'esperienza il più possibile rapida, riducendo così l'effetto della ossidazione spontanea del complesso ridotto; le altezze delle onde di riduzione del com-

plesso del nichel bivalente presente prima delle aggiunte di gelatina e di quello presente dopo l'ultima aggiunta ci dicono come durante l'esperienza la quantità di quest'ultimo è restata praticamente costante (Tabella III), e la piccola diminuzione che si trova potrebbe anche attribuirsi alla sensibile quantità di gelatina presente.

TABELLA III.

Conc. % gelatina	Altezza onda di riduzione nella sol. di partenza (in μA)	Altezza onda di ossidazione nella sol. ridotta (in μA)	Altezza onda di riduzione nella sol. ridotta (in μA)
0	6,4	—	—
0	—	3,64	2,57
$2 \cdot 10^{-4}$	—	3,22	—
$8 \cdot 10^{-4}$	—	2,54	—
$1,2 \cdot 10^{-3}$	—	2,16	—
$1,6 \cdot 10^{-3}$	—	1,96	—
$3,2 \cdot 10^{-3}$	—	1,46	—
$6,4 \cdot 10^{-3}$	—	1,16	—
$1 \cdot 10^{-2}$	—	1,07	2,46

Dalla tabella III si vede come l'aggiunta della gelatina, che in queste concentrazioni praticamente non influisce sulla corrente di diffusione dell'onda

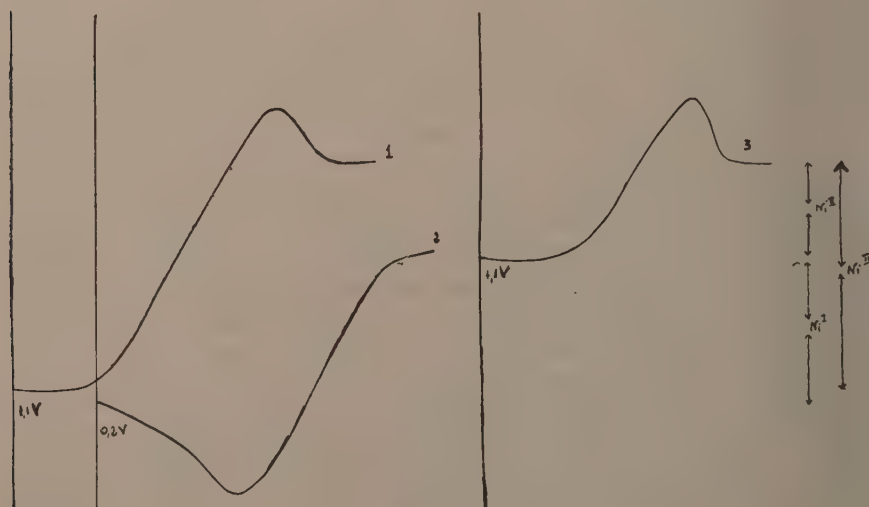


Fig. 1.

dell' $\text{Ni}(\text{CN})_4^{=}$, ha invece una notevole influenza sull'onda di ossidazione, che diminuisce notevolmente e che non presenta più massimo. In fig. 1 sono riportati i polarogrammi relativi ad una soluzione $\text{K}_2\text{Ni}(\text{CN})_4$ $3,2 \cdot 10^{-4}$ molare, in KOH N/2 prima e dopo riduzione parziale. In fig. 2 sono riportati alcuni polarogrammi dell'onda di ossidazione (riferiti sempre ad una stessa concentrazione di sostanza ridotta) rilevati dopo aggiunte successive di gelatina. Risulta evidente, da tale figura, la riduzione della corrente di diffusione per i successivi aumenti della concentrazione in gelatina.

Un'altra serie di esperienze riguarda le aggiunte successive di ioni CN^- ad una soluzione parzialmente ridotta di $\text{K}_2\text{Ni}(\text{CN})_4$, contenente quindi

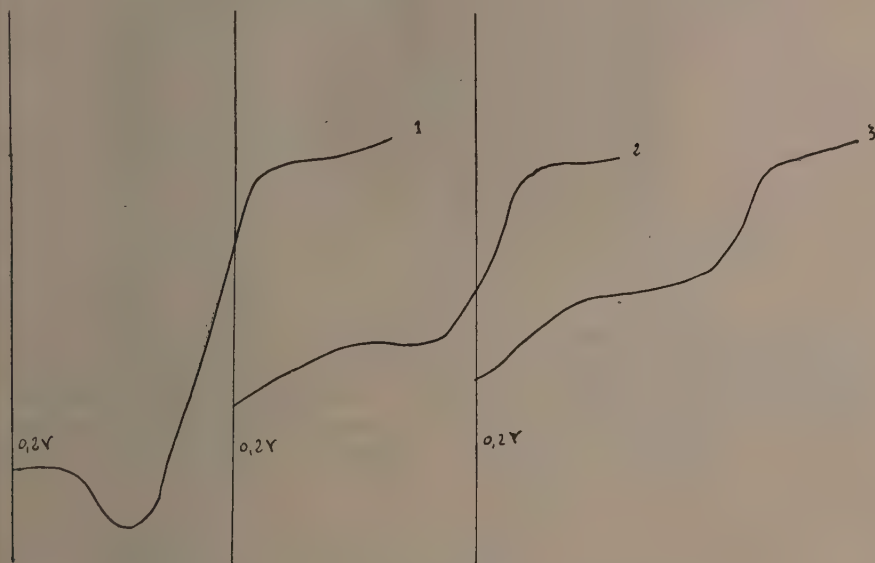


Fig. 2.

anche il complesso a valenza inferiore. In tabella IV sono riportati i valori relativi ad una tale serie di esperienze: essi si riferiscono ad una soluzione $4 \cdot 10^{-4}$ molare di $\text{K}_2\text{Ni}(\text{CN})_4$ in KOH N/2, parzialmente ridotta, alla quale successivamente sono state fatte aggiunte di KCN. Anche qui si nota un effetto assolutamente analogo a quello provocato dalle aggiunte di gelatina, con l'unica differenza che compare l'onda anodica del cianuro la quale diventa tanto più netta quanto maggiore è la quantità di cianuro presente nella soluzione (fig. 3).

Dai valori della tabella IV si nota anche un aumento della velocità di ossidazione del composto ridotto coll'aumentare della concentrazione in cianuro: il tempo intercorso fra i successivi rilevamenti polarografici è costante.

Circa lo slittamento del potenziale di semionda verso valori più negativi chiaramente visibile in fig. 3, rimandiamo al lavoro già pubblicato.

Per avere ulteriori indicazioni sulla forma in cui è presente il nichel nella soluzione ridotta abbiamo approfittato della cortesia dei professori L. Cambi e L. Malatesta ed eseguito, nel loro laboratorio, misure comparative della suscettività magnetica della soluzione di $K_2Ni(CN)_4$ prima e dopo

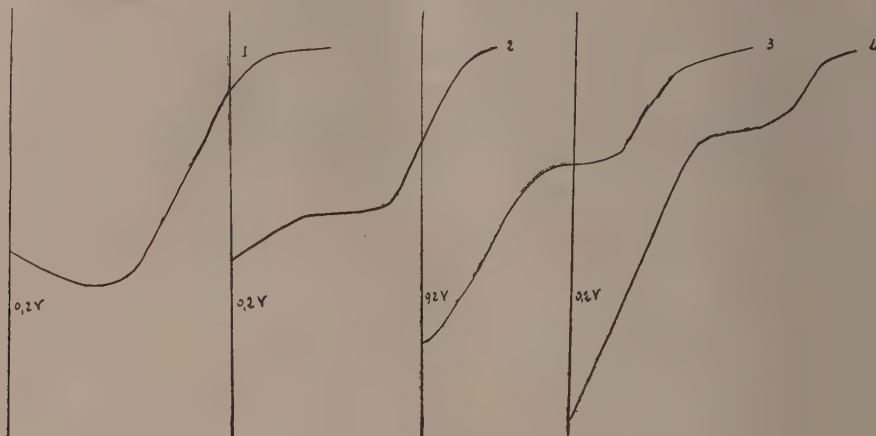


Fig. 3.

la riduzione. Sia la soluzione (al 20 % in peso) di $K_2Ni(CN)_4$, sia la corrispondente soluzione ridotta con amalgama di potassio sono diamagnetiche, confermando con ciò i risultati di Ray ⁽⁶⁾ e di Szegoe ⁽⁷⁾. Questo fatto farebbe escludere la presenza in soluzione di una forma $Ni(CN)_3^-$ nella quale l'esistenza di un elettrone non appaiato avrebbe dovuto portare ad un paramagnetismo molare di circa 1,74 magnetoni.

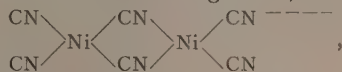
TABELLA IV.

Conc. molare KCN	Altezza dell'onda di ossidazione (in μA)	Altezza dell'onda di riduzione (in μA)
0	4,48	0,89
$6 \cdot 10^{-3}$	3,58	0,91
$1 \cdot 10^{-2}$	2,86	1,03
$2 \cdot 10^{-2}$	2,42	1,09
$6 \cdot 10^{-2}$	1,62	1,45

(6) « J. Indian Ch. Soc. », 5, 505 (1928).

(7) « Gazz. Chim. Ital. », 60, 946 (1930).

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. — Vediamo ora come i diversi fatti sperimentali si possano mettere in accordo con le ipotesi avanzate. Noi ammettiamo che il nichel del complesso $K_2Ni(CN)_4$, dopo la riduzione polarografica resta in soluzione in una forma di valenza inferiore; si possono avere quindi due possibilità: o il nichel del nuovo complesso è monovalente oppure è zerovalente. Le prove chimiche di Bellucci e di altri Autori concordano per la forma monovalente ma, come si è detto, la soluzione è diamagnetica, e si può quindi pensare ad un complesso del tipo



che risulta assai plausibile tanto più che il numero di coordinazione è in questo modo 4 come lo si riscontra nei complessi del nichel tetravalente⁽⁸⁾, bivalente e zerovalente. Il diamagnetismo del composto sopra indicato potrebbe essere spiegato o con una compensazione interna degli spin dei due atomi di nichel monovalente, o con una mesomeria fra Ni^0 ed Ni^{++} . Questa struttura renderebbe altresì conto del fatto da noi sostenuto che il consumo di elettroni, nella reazione di riduzione, è di un elettrone per mole di $K_2Ni(CN)_4$.

Per quanto riguarda le osservazioni fatte sul comportamento della corrente di diffusione, si può dire che in soluzioni non contenenti ioni CN^- o soppressori di massimi, la somma delle altezze della corrente di riduzione e di quella di ossidazione è abbastanza costante. Le anomalie provocate dalla presenza, nella soluzione, dei due detti agenti, sono poco chiare ma forse potrebbero essere spiegate nel modo seguente: la reazione di ossidazione dello ione $Ni_2(CN)_6^{4-}$ a $2NiCN_4^{2-}$ può avvenire sull'elettrodo secondo lo schema



o, indipendentemente dall'elettrodo a spese dell'acqua, secondo:



La presenza di molecole della sostanza tensiattiva addensate sull'elettrodo ostacola il compimento della reazione (1) e ciò potrebbe spiegare la diminuzione dell'onda di ossidazione. A conforto di questa ipotesi abbiamo voluto verificare se la variazione dell'intensità di corrente in funzione della concentrazione della gelatina aggiunta seguisse l'isoterma di Freundlich. Se la reazione di ossidazione all'elettrodo avviene soltanto sulla parte di superficie libera si può calcolare quale deve essere l'intensità di corrente in funzione della superficie occupata dalla sostanza tensiattiva. Indicando con n il numero delle particelle di gelatina adsorbite sull'elettrodo, con ω il loro coefficiente di adsorbimento, con c la concentrazione della gelatina

(8) « J.A.C.S. », 64, 1187 (1942).

nella soluzione e con z il numero massimo di particelle che possono venire adsorbite, sussiste la relazione

$$n = \frac{z\omega c}{1 + \omega c}$$

Il valore di $z - n$ viene quindi ad indicare la parte libera della superficie e sarà data dalla

$$z - n = \frac{z}{1 + \omega c}$$

Se l'intensità di corrente è proporzionale alle superficie libera sarà

$$(\alpha) \quad i = \frac{kz}{1 + \omega c}$$

In assenza di gelatina ($c = 0$), e nelle condizioni di esperienza riportate in tabella III, è $i = 3,64 \mu A$ e quindi avremo $kz = 3,64$. Calcolando mediante la (α) i valori delle i_d corrispondenti alle varie concentrazioni di gelatina si ottengono i valori riportati nella tabella V.

TABELLA V.

Conc. gelatina	i_d calcolato (in μA)	i_d trovato (in μA)
0	(3,64)	(3,64)
$2 \cdot 10^{-4}$	3,27	3,22
$8 \cdot 10^{-4}$	2,52	2,54
$1,2 \cdot 10^{-3}$	2,18	2,16
$1,6 \cdot 10^{-3}$	1,92	1,96
$3,2 \cdot 10^{-3}$	1,31	1,46

Questi risultati giustificano l'ammissione da noi fatta di attribuire la diminuzione della corrente di diffusione dell'onda di ossidazione all'adsorbimento della gelatina sull'elettrodo di mercurio.

La presenza di un eccesso di ioni CN^- invece, farebbe sì che non essendo essi tutti bloccati dagli ioni $Ni_2(CN)_6$ che si ossidano a $Ni(CN)_4$, molti di essi sarebbero liberi di reagire col mercurio dando la nota onda; il cianuro di mercurio che si viene a formare in tale reazione rende anche esso minore la superficie dell'elettrodo e quindi anche qui si arriverebbe in

definitiva ad una diminuzione della corrente di diffusione relativa a questa ossidazione.

Effettuando anche nel caso delle aggiunte di KCN calcoli analoghi a quelli fatti nel caso della gelatina, si ottengono valori in soddisfacente accordo con l'ipotesi dell'adsorbimento, se si tiene presente che in questo caso le cose vengono complicate dal fatto che con la concentrazione del cianuro aumenta la velocità di ossidazione dell' $\text{Ni}_2(\text{CN})_6^{4-}$. I valori ottenuti da una sol. $4,1 \cdot 10^{-4}$ molare di $\text{K}_2\text{Ni}(\text{CN})_4$ in KOH N/2 , parzialmente ridotta, per successive aggiunte di KCN sono riportati in tabella VI.

TABELLA VI.

Concentrazione KCN	i_d calcolato (in μA)	i_d trovato (in μA)
0	(4,90)	(4,90)
$6 \cdot 10^{-3}$	3,92	3,90
$1 \cdot 10^{-2}$	3,12	3,40
$2 \cdot 10^{-2}$	2,66	2,62
$6 \cdot 10^{-2}$	1,78	1,36

Oltre l'ipotesi dell'adsorbimento ora discussa sarebbe anche possibile, forse, pensare alla formazione di complessi dell' $\text{Ni}_2(\text{CN})_4^{4-}$ con la gelatina.

CONCLUSIONE. — Nonostante le incertezze di interpretazione nello studio delle correnti di diffusione, riteniamo che la mancata scomparsa di nichel da soluzioni di $\text{K}_2\text{Ni}(\text{CN})_4$ ridotte coulombometricamente e poi lasciate riossidare in assenza del mercurio catodico, ci autorizzi a confermare quanto da noi già affermato nel lavoro citato in ⁽¹⁾, e cioè che la riduzione del $\text{K}_2\text{Ni}(\text{CN})_4$ all'elettrodo a goccia di mercurio, porta non a nichel metallo, ma ad un nuovo complesso cianidrico contenente nichel, almeno formalmente monovalente; inoltre misure di magnetismo ci suggeriscono di attribuire ad esso complesso la formula $\text{K}_4\text{Ni}_2(\text{CN})_6$, nella quale i due atomi di nichel sono entrambi monovalenti, oppure si trovano in forma mesomerica, uno zerovalente ed uno bivalente.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Calcolo numerico. — *Sul calcolo della capacità elettrostatica di un conduttore* (*). Nota di WOLF GROSS, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. Come è noto, il calcolo della capacità elettrostatica di un conduttore si riduce alla risoluzione di un problema esterno di Dirichlet. Si tratta precisamente della determinazione della derivata normale sulla frontiera di una funzione armonica, soluzione del seguente problema:

Sia Σ la frontiera di un dominio; il problema consiste nel determinare una funzione φ , il potenziale elettrico, che soddisfi alle seguenti condizioni

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{all'esterno di } \Sigma \\ \varphi \text{ infinitesimo all'infinito,} \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \varphi = 1 \quad \text{su } \Sigma.$$

Determinata la φ , la capacità elettrostatica si calcola con la formula:

$$(3) \quad C = - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

designando con $\partial/\partial n$ la derivazione rispetto alla normale esterna. Tutto si riduce quindi alla determinazione della densità elettrica

$$(4) \quad \sigma = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Per ottenere una espressione approssimata per la σ si può seguire, anche in questo caso particolare, un metodo generale per l'integrazione delle equazioni differenziali a derivate parziali dovuto al Picone (1). Sia dato un sistema di funzioni

$$(5) \quad \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. I risultati di questo lavoro furono comunicati al Congresso della Oesterreichische Mathematiker Vereinigung (Innsbruck 1949).

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) Vedi M. PICONE, a) *Appunti d'Analisi superiore*. (Rondinella, Napoli (1940), pp. 752-65; b) *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti*. («Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino», vol. 75 (1934-40); c) *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali*. («Rend. Accademia Nazionale dei Lincei», ser. VIII, vol. II (1947)).

che soddisfi alle (1) e che sia completo per l'approssimazione di funzioni che soddisfano anche esse alle (1). Applichiamo alla φ e ad una generica φ_n il noto teorema di Green (si osservi che per funzioni armoniche infinitesime all'infinito si ha $\varphi = o(1/r)$ $\partial\varphi/\partial n = o(1/r^2)$ all'infinito):

$$(6) \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \varphi_k dS = \int \varphi \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} dS,$$

o tenendo presente la (2) e la (4):

$$(7) \quad \int_{\Sigma} \sigma \bar{\varphi}_k dS = a_k \quad k = 0, 1, \dots$$

dove si è posto:

$$(8) \quad a_k = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} dS,$$

e con $\bar{\varphi}_k$ si designa il valore che la φ_k assume su Σ .

Le infinite equazioni (7) formano un sistema di equazioni di Fischer-Riesz che determinano univocamente la σ dato che le $\bar{\varphi}_k$ costituiscono un sistema completo su Σ ⁽²⁾. Se le $\bar{\varphi}_k$ fossero ortogonalizzate e normalizzate, le (7) darebbero direttamente i coefficienti di sviluppo della σ rispetto alle $\bar{\varphi}_k$.

Per ottenere una espressione approssimata per la σ poniamo

$$(9) \quad \sigma^{(n)} = \sum_{i=0}^n c_i^{(n)} \bar{\varphi}_i,$$

e conserviamo delle (7) le prime $n+1$ equazioni. Si ottiene così per le $c_i^{(n)}$ un sistema di $n+1$ equazioni lineari algebriche nelle $n+1$ incognite $c_i^{(n)}$

$$(10) \quad \sum_{k=0}^n a_{ik} c_k^{(n)} = a_i,$$

avendo posto

$$(11) \quad a_{ik} = \int_{\Sigma} \bar{\varphi}_i \bar{\varphi}_k dS.$$

Questo procedimento è equivalente al metodo di Schmidt per l'ortogonalizzazione e normalizzazione delle $\bar{\varphi}_k$. Infatti se pensiamo applicato alle φ_k questo procedimento, dalle (7), si ricavano i coefficienti di « Fourier » rispetto al nuovo sistema; il calcolo diretto dimostra immediatamente che la $\sigma^{(n)}$ coincide con la $(n+1)$ -esima somma parziale dello sviluppo di Fourier della σ . Se la σ è di quadrato sommabile le (10) si possono anche ottenere rendendo minima l'espressione:

$$\int_{\Sigma} \left(\sigma - \sum_{i=0}^n c_i^{(n)} \bar{\varphi}_i \right)^2 dS,$$

e tenendo conto della (7).

(2) Vedi G. FICHERA, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*. (« Ann. di Mat. », 1948).

Una volta determinata la $\sigma^{(n)}$ si ottiene da essa una espressione approssimata per la C

$$(12) \quad C^{(n)} = \int_{\Sigma} \sigma^{(n)} dS = \sum_{k=0}^n \widehat{b_k c_k^{(n)}},$$

essendo

$$(13) \quad b_k = \int_{\Sigma} \bar{\varphi}_k dS \quad k = 0, 1, \dots$$

Data la completezza del sistema $\{\bar{\varphi}_k\}$ si ha $C^{(n)} \rightarrow C$.

Delle espressioni particolarmente semplici ed indipendenti dalla forma del contorno si ottengono per le a_k se come sistema $\{\varphi_k\}$ si sceglie il seguente

$$(14) \quad \begin{cases} \varphi_0 = \frac{1}{r}, \\ \varphi_k = \frac{P_k}{r^{2m_k+1}}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

essendo P_k un polinomio armonico omogeneo di grado $m_k > 0$ (si intende che P_k percorre tutti i polinomi armonici) allora si ha

$$(15) \quad \begin{cases} a_0 = 1, \\ a_k = 0 \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

2. La stessa espressione approssimata per la C si può ottenere anche con un altro procedimento applicato con successo all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, che inoltre, grazie ad un metodo dovuto al Fichera ⁽³⁾, permette di trovare un limite superiore per l'errore commesso. Il procedimento si basa sull'osservazione che la φ è determinata dalla condizione di soddisfare le (1) e rendere minima l'espressione:

$$(16) \quad I = \int_{\Sigma} (1 - \varphi)^2 dS.$$

Poniamo in approssimazione;

$$(17) \quad \varphi^{(n)} = \sum_{i=0}^n d_i^{(n)} \varphi_i.$$

Minimizzando la (16) si ottiene il sistema:

$$(18) \quad \sum_{k=0}^n a_{ik} d_k^{(n)} = b_i,$$

mentre per la I si ha:

$$I^{(n)} = S - \sum_{i=1}^n b_i d_i^{(n)},$$

(3) Vedi G. FICHERA, *Sulla maggiorazione dell'errore di approssimazione nei procedimenti di integrazione numerica delle equazioni della Fisica Matematica*. («Acc. Scienze di Napoli», 1950).

con

$$(19) \quad S = \int_{\Sigma} dS.$$

Le $\varphi^{(n)}$ tendono uniformemente verso la φ insieme con tutte le loro derivate all'esterno di Σ ed almeno in media su Σ ; quindi si ha $I^{(n)} \rightarrow 0$.

Dalla (17) si ottiene anche per la C una espressione approssimata, e precisamente si ha:

$$(20) \quad C^{(n)} = \sum_{i \neq 0}^n a_i d_i^{(n)}.$$

Ora si vede facilmente che questa coincide con la (12). Infatti, designando con $A_{ik}^{(n)}$ i complementi algebrici degli elementi a_{ik} nella matrice

$$(A^{(n)}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

si ha:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} c_i^{(n)} &= \frac{1}{|A^{(n)}|} \sum_{k \neq 0}^n A_{ik}^{(n)} a_k, \\ d_i^{(n)} &= \frac{1}{|A^{(n)}|} \sum_{k \neq 0}^n A_{ik}^{(n)} b_k. \end{aligned} \right.$$

Sostituendo queste nelle (12) e (20) rispettivamente si perviene in tutti e due i casi alla stessa espressione per la $C^{(n)}$ cioè:

$$(22) \quad C^{(n)} = \frac{1}{|A^{(n)}|} \sum_{i, k \neq 0}^n A_{ik}^{(n)} a_i b_k.$$

Per ottenere la valutazione dell'errore di cui sopra si procede come segue. Si può dimostrare che la seguente espressione:

$$(23) \quad \mu = \frac{\left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \right)^2}{\int_{\Sigma} \psi^2 dS}$$

è limitata nella classe delle funzioni che soddisfano alla (1); sia M il suo limite superiore. Si ha quindi che in questa classe ha luogo la disuguaglianza

$$(24) \quad \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \right| \leq \sqrt{M} \sqrt{\int_{\Sigma} \psi^2 dS}.$$

Ponendo $\psi = \varphi - \varphi_n$ questa diventa

$$(25) \quad |C - C^{(n)}| < \sqrt{M I^{(n)}}.$$

dove la $I^{(n)}$ è data dalla (19). L'unica grandezza incognita a membro destro è data dalla M , per la quale si possono ottenere dei valori approssimati (per difetto naturalmente, trattandosi di un estremo superiore) con un metodo analogo a quello seguito finora. Si pone cioè nella (23)

$$(26) \quad \psi^{(n)} = \sum_{i=0}^n e_i^{(n)} \varphi_i$$

e si determinano $e_i^{(n)}$ in maniera da rendere massima la μ . Designando con $M^{(n)}$ questo massimo la detta condizione dà:

$$a_i \sum_{k=0}^n a_k e_k^{(n)} - M^{(n)} \sum_{k=0}^n a_{ik} e_k^{(n)} = 0,$$

dalla quale, tenendo presente la (10), si deduce

$$e_k^{(n)} = \frac{c_k^{(n)}}{M^{(n)}} \sum_{i=0}^n a_i c_i^{(n)},$$

donde, dalla precedente,

$$(27) \quad M^{(n)} = \sum_{i=0}^n a_i c_i^{(n)}.$$

Si vede del resto che la $M^{(n)}$ non è niente altro che l'integrale

$$(28) \quad M^{(n)} = \int_{\Sigma} \sigma^{(n)^2} dS,$$

quindi la M sarà uguale all'integrale:

$$M = \int_{\Sigma} \sigma^2 dS.$$

Ora nell'applicare la (25) interessa solo l'ordine di grandezza, o più precisamente la prima cifra significativa della M . Quindi il suo calcolo approssimato si può interrompere quando si ottiene la stabilità su questa cifra.

Si può osservare che la (25) si può ottenere nel nostro caso anche per mezzo della disuguaglianza di Schwarz. Infatti tenendo conto che in base al teorema di Green si ha

$$C_n = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial n} \cdot \mathbf{I} dS = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \varphi^{(n)} dS = \int \sigma \varphi^{(n)} dS$$

e quindi

$$(29) \quad |C - C_n| = \left| \int_{\Sigma} \sigma (1 - \varphi^{(n)}) dS \right| \leq \sqrt{\int_{\Sigma} \sigma^2 dS} \sqrt{\int_{\Sigma} (1 - \varphi_n)^2 dS}.$$

La (29), come si vede dalla (19) effettivamente coincide con la (25).

Il procedimento precedentemente dato ha il vantaggio di fornire delle disuguaglianze analoghe in casi molto più generali di questo.

Alcune delle formole date subiscono delle notevoli semplificazioni, se come sistema $\{\varphi_k\}$ si sceglie quello dato dalla (14). Infatti tenendo conto delle (15) le (20) e (28) si semplificano nelle seguenti:

$$(20') \quad C^{(n)} = d_o^{(n)}$$

$$(28') \quad M^{(n)} = c_o^{(n)}.$$

3. Consideriamo ora un cubo il cui centro è collocato nell'origine degli assi di riferimento colle facce parallele ai piani coordinati. Come sistema completo di funzioni scegliamo il sistema dato dalle (14). Anzitutto osserviamo che godendo il cubo di certe proprietà di simmetria, anche la soluzione φ deve godere delle stesse proprietà; di conseguenza per P_k basta prendere solo quei polinomi armonici che soddisfano alle stesse proprietà di simmetria della φ . La φ deve rimanere invariata quando si inverte un qualsivoglia degli assi e quando esse si scambiano fra di loro; quindi i P_k debbono essere polinomi simmetrici nelle x^2, y^2 e z^2 o in base al teorema sulle funzioni simmetriche, debbono essere polinomi nelle L, M e N ove

$$(30) \quad \begin{cases} M = x^2 + y^2 + z^2, \\ N = x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2, \\ L = x^2 y^2 z^2. \end{cases}$$

Per determinare il numero dei polinomi armonici omogenei linearmente indipendenti di un dato grado $m = 2l$ partiamo da una nota proprietà dei polinomi armonici. Sia Q_m un polinomio omogeneo di grado m ; si dimostra facilmente che questo si può sempre scrivere nella forma:

$$(31) \quad Q_m = P_m + MQ_{m-2},$$

essendo P_m un polinomio armonico omogeneo di grado m . La decomposizione (31) è univoca. Se alla (31) si aggiungono tutte le analoghe che da essa si ottengono mediante le operazioni di simmetria di un dato gruppo si vede subito che essa vale anche nella classe dei polinomi del dato gruppo di simmetria. Quindi il numero dei polinomi armonici omogenei di grado m della data classe di simmetria è uguale al numero dei polinomi omogenei di grado m diminuito del numero di quelli di grado $m-2$ della stessa classe.

Nel caso nostro il primo è uguale al numero delle soluzioni intere non negative dell'equazione (numero di monomi del tipo $M^{(a)} N^{(b)} L^{(c)}$):

$$(32) \quad a + 2b + 3c = l,$$

il secondo invece a quello dell'equazione:

$$(32') \quad a + 2b + 3c = l - 1.$$

Ora da ogni soluzione della (32') si ottiene una della (32) aumentando a di una unità ed inversamente da ogni soluzione con $a \neq 0$ della (32) si ottiene una della (32') diminuendo a di una unità. Di conseguenza la sopradetta differenza sarà uguale al numero delle soluzioni della (32) con $a = 0$, o al numero delle soluzioni non negative intere della

$$(33) \quad 2b + 3c = l$$

La soluzione intera generica della (33) è data dalle

$$(34) \quad \begin{cases} b = 2l - 3n \\ c = -l + 2n \end{cases} \quad n \text{ intero}$$

mentre la condizione della non negatività dà

$$(35) \quad \frac{1}{2}l \leq n \leq \frac{2}{3}l.$$

Ponendo $l = 6k, 6k + 1, 6k + 2, \dots, 6k + 5$ e contando in tutti i 6 casi il numero degli interi compresi nell'intervallo dato dalla (35) si perviene al seguente risultato:

Il numero dei polinomi armonici omogenei del gruppo di simmetrie del cubo di un dato grado $2l$ è uguale a:

$$(36) \quad \begin{cases} E\left(\frac{l}{6}\right) + 1 & \text{se } l-1 \text{ non è divisibile per } 6 \\ \frac{l-1}{6} & \text{se } l-1 \text{ è divisibile per } 6; \end{cases}$$

qui con $E(x)$ si è designato il massimo intero minore o eguale a x .

Si ha quindi il seguente quadro:

grado : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...

numero dei polinomi armonici: 1, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, ...

4. La determinazione dei polinomi armonici di un determinato grado ha avuto luogo col metodo dei coefficienti indeterminati. Si è posto cioè

$$(37) \quad P = \sum \gamma_{a,b,c} M^a N^b L^c,$$

dove la somma viene estesa a tutti i valori a, b, c che soddisfano la (32), e questa espressione venne sostituita nella equazione che si ottiene trasformando la (1) mediante la (30), cioè nella:

$$(38) \quad \Delta P = 4 [MP''_{MM} + (MN + 3L) P'_{NN} + NLP''_{LL}] + 8 [2NP'_{MN} + 3LP'_{ML} + 2MLP'_{NL}] + 2 [3P'_M + 2MP'_N + NP'_L] = 0.$$

Il confronto dei coefficienti permette di determinare le $\gamma_{a,b,c}$ e così si perviene ai seguenti polinomi:

$$\text{grado } 0 \quad P_0 = 1$$

$$» \quad 4 \quad P_1 = M^2 - 5N$$

$$» \quad 6 \quad P_2 = 2M^3 - 21MN + 231L$$

$$» \quad 8 \quad P_3 = M^4 - 18M^2N - 52ML + 65N^2$$

$$» \quad 10 \quad P_4 = 2M^5 - 55M^3N + 979M^2L + 187MN^2 - 3553NL$$

$$12 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_5 = 10M^6 - 390M^4N + 3315M^2N^2 - 3978MNL - 7514N^3 + 60333L^2 \\ P_6 = 40M^3L - 5M^2N^2 - 222MNL + 24N^3 + 707L^2. \end{array} \right.$$

Le corrispondenti φ_k si ottengono dalla

$$(40) \quad \varphi_k = \frac{P_k}{M^{2L_k + 1/2}}.$$

Ora si consideri il cubo di semilato uguale a 1. Date le simmetrie già considerate, basta, per il calcolo delle a_{ik} e b_k , limitarsi alla faccia $z = 1$ e a $0 \leq x, y \leq 1$. Su questa superficie le φ_k , posto

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = x^2 + y^2 + 1, \\ \beta = x^2 y^2, \end{array} \right.$$

assumono le seguenti espressioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varphi}_0 = \alpha^{-1/2}, \\ \bar{\varphi}_1 = \alpha^{-9/2} [\alpha^2 - 5\alpha + 5 - 5\beta], \\ \bar{\varphi}_2 = \alpha^{-13/2} [2\alpha^3 - 21\alpha^2 + 21\alpha + \beta(-21\alpha + 231)], \\ \bar{\varphi}_3 = \alpha^{-17/2} [\alpha^4 - 18\alpha^3 + 83\alpha^2 - 130\alpha + 65 + \beta(-18\alpha^2 + 78\alpha - 130) + 65\beta^2], \\ \bar{\varphi}_4 = \alpha^{-21/2} [2\alpha^5 - 55\alpha^4 + 242\alpha^3 - 374\alpha^2 + 187\alpha + \\ + \beta(-55\alpha^3 + 1353\alpha^2 - 3927\alpha + 3553) + \beta^2(187\alpha - 3553)], \\ \bar{\varphi}_5 = \alpha^{-25/2} [10\alpha^6 - 390\alpha^5 + 3705\alpha^4 - 14144\alpha^3 + 25857\alpha^2 - 22542\alpha + 7514 + \\ + \beta(-390\alpha^4 + 6630\alpha^3 - 33150\alpha^2 + 49062\alpha - 22542) + \beta^2(3315\alpha^2 - \\ - 26520\alpha + 82875) - 7514\beta^3], \\ \bar{\varphi}_6 = \alpha^{-29/2} [-5\alpha^6 + 34\alpha^5 - 77\alpha^4 + 72\alpha^3 - 24\alpha^2 + \beta(30\alpha^3 - 140\alpha^2 + 78\alpha + 72) + \\ + \beta^2(-5\alpha^2 - 150\alpha + 635) + 24\beta^3]. \end{array} \right.$$

Il calcolo degli integrali si riduce quindi al calcolo di integrali del tipo

$$A_n^m = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\beta^m}{\alpha^n} dx dy$$

con m intero ed n intero o semintero.

Questo calcolo venne eseguito mediante le seguenti formole ricorrenti: partendo dalla identità

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{x^{2m-1} y^{2m-1}}{(x^2 + y^2 + 1)^{n-2}} \right] &= 4(n-2)(n-1) \frac{\beta^m}{\alpha^n} + 2(n-2)(2m-1) \frac{\beta^{m-1}}{\alpha^{n-1}} + \\ &+ (2m-1)(2m-2n+3) \frac{\beta^{m-1}}{\alpha^{n-2}}, \end{aligned}$$

si ottiene integrando la:

$$(43) \quad 4(n-2)(n-1)A_n^m = 2(n-2)(2m-1)A_{n-1}^{m-1} + \\ + (2n-2m-3)(2m-1)A_{n-2}^{m-1} + \frac{1}{3^{n-2}}$$

che riduce il calcolo delle A_n^m a quello delle

$$A_n^0 = A_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^n}.$$

Integrando ora l'identità:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + 1)^{n-1}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y}{(x^2 + y^2 + 1)^{n-1}} \right] = \frac{2(n-1)}{(x^2 + y^2 + 1)^n} - \frac{2(n-2)}{(x^2 + y^2 + 1)^{n-1}}$$

si perviene alla:

$$(n-1)A_n - (n-2)A_{n-1} = I_{n-1}$$

oppure

$$(44) \quad \begin{cases} A_n = \frac{1}{n-1} \{ I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1} \} & \text{per } n \text{ intero } > 1 \\ A_n = \frac{1}{n-1} \left\{ I_{1/2} + I_{3/2} + \dots + I_{n-1} + \frac{1}{2} A_{1/2} \right\} & \text{per } n \text{ semi intero } > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

avendo posto:

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 2)^n}.$$

La formola ricorrente per le I_n si ottiene dalla identità

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x}{(x^2 + 2)^{n-1}} \right] = \frac{4(n-1)}{(x^2 + 2)^n} - \frac{2n-3}{(x^2 + 2)^{n-1}}$$

che integrata dà la:

$$(45) \quad 4(n-1)I_n = (2n-3)I_{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Un calcolo a parte richiedono le A_1 , $A_{1/2}$, I_1 e $I_{1/2}$ per le quali si ottengono direttamente, dalle formole di definizione, i seguenti valori:

$$A_1 = \frac{\pi}{2} \log(\sqrt{2} + 1) - \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{2}-1)^n}{(2n+1)^2} = 0,6395099919$$

$$A_{1/2} = \log(\sqrt{3} + 2) - \frac{\pi}{6}$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$I_{1/2} = \frac{1}{2} \log(\sqrt{3} + 2).$$

Questi valori, insieme con le formole ricorrenti (43), (45) permettono di ricavare i valori di tutte le a_{ik} e b_k . Dato il grande numero di cifre decimali che si perdono, quando nelle espressioni per a_{ik} , con i, k elevati, si sostituiscono i valori delle singole A_n^m e poi si sommano, si è dovuto eseguire il calcolo di queste ultime con 18 cifre decimali; questa è la ragione perchè non si è potuto spingere il calcolo oltre, dovendosi man mano che si procedeva nella approssimazione, aumentare il numero delle cifre decimali.

Sono state eseguite cinque approssimazioni:

1 ^a	con le	φ_0, φ_1
2 ^a	»	» $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$
3 ^a	»	» $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$
4 ^a	»	» $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
5 ^a	»	» $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$

I valori ottenuti per la capacità $C^{(n)}$ in queste approssimazioni sono i seguenti: (i numeri sono già divisi per due in maniera da ridursi ad un cubo di *lato uno*, mentre i calcoli per ragioni di comodità sono stati eseguiti per uno di *semilato uno*)

1 ^a appr.	2 ^a appr.	3 ^a appr.	4 ^a appr.	5 ^a appr.
0,6356	0,6396	0,6418	0,6444	0,6464

Per le $M^{(n)}$ e $I^{(n)}$ date dalle formole (28'), (21) e (19) si sono trovati i seguenti valori:

	1 ^a appr.	2 ^a appr.	3 ^a appr.	4 ^a appr.	5 ^a appr.
24 $M^{(n)}$	1,67	1,70	1,73	1,75	1,77
$I^{(n)}/24$	0,0069	0,0051	0,0042	0,0032	0,0023

Dato l'andamento della $M^{(n)}$ si è posto $24M = 1,8$ nella formola (25) e per i valori dati da questa espressione si sono ottenuti i valori riassunti nel quadro seguente (anche questi valori sono già divisi per due):

1 ^a appr.	2 ^a appr.	3 ^a appr.	4 ^a appr.	5 ^a appr.
0,056	0,048	0,043	0,038	0,032

Questa maggiorazione dell'errore è piuttosto grossolana il che si può dedurre dal seguente ragionamento: Dalle formole per le $\varphi^{(n)}$ e $\sigma^{(n)}$ si ha immediatamente:

$$\int_{\Sigma} \sigma^{(n)} (1 - \varphi^{(n)}) dS = 0$$

e quindi

$$|C - C_n| = \left| \int_{\Sigma} (\sigma - \sigma^{(n)}) (1 - \varphi^{(n)}) dS \right| \leq \sqrt{\int_{\Sigma} (\sigma - \sigma^{(n)})^2 dS} \sqrt{\int_{\Sigma} (1 - \varphi^{(n)})^2 dS}.$$

Questa formola differisce dalla (29) per il fatto che in essa al posto della M compare la $M - M^{(n)}$ (infatti si verifica facilmente che $\int_{\Sigma} (\sigma - \sigma^{(n)})^2 dS = M - M^{(n)}$)

e quindi un'espressione che tende a zero. Sfortunatamente il metodo di miglioramento precedentemente esposto non è estensibile alla $M - M^{(n)}$, il che ci ha costretti di maggiorare quest'ultima mediante la M ($\sim M^{(n)}$). Evidentemente l'errore effettivo sarà molto minore. Noi in ogni caso possiamo affermare con assoluta sicurezza che il valore vero della C si trova tra 0,61 e 0,67, ma dall'andamento delle diverse approssimazioni si può dedurre per essa un valore compreso probabilmente tra 0,646 e 0,650.

A proposito del calcolo della capacità elettrostatica di un conduttore giova non dimenticare il fatto che se il dominio limitato T , occupato nello spazio coibente dai p conduttori T_1, T_2, \dots, T_p , è contenuto nel dominio limitato T' occupato dai q conduttori T'_1, T'_2, \dots, T'_q , essendo $p \leq q$, T_h contenuto in T'_h ($h = 1, 2, \dots, p$) e T non coincidendo con T' , detta c_h la capacità di T_h in presenza di $T - T_h$ e c'_h quella di T'_h in presenza di $T' - T'_h$ ($h = 1, 2, \dots, q$), risulta

$$c_h < c'_h \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Di ciò si può dare la seguente dimostrazione elementare, suggerita da FICHERA. Designati con D e D' i domini dello spazio luogo dei punti non interni, rispettivamente, a T e a T' , e indicate con u_h e u'_h le funzioni armoniche e biregolari in D e in D' , verificanti le equazioni

$$u_h (\text{su } \mathfrak{F}T_i) \begin{cases} = 0, & \text{se } i \neq h, \\ = 1, & \text{se } i = h, \end{cases} \quad u'_h (\text{su } \mathfrak{F}T'_j) \begin{cases} = 0, & \text{se } j \neq h, \\ = 1, & \text{se } j = h. \end{cases}$$

($h, i = 1, 2, \dots, p$; $h, j = 1, 2, \dots, q$),

si ha

$$4\pi c_h = - \int_{\mathfrak{F}T_h} \frac{du_h}{dn} dT = - \int_{\mathfrak{F}D} u_h \frac{du_h}{dn} d\sigma = \int_D |\text{grad } u_h|^2 dT,$$

$$4\pi c'_h = \int_{D'} |\text{grad } u'_h|^2 dT,$$

$$\int_{\mathfrak{F}T_h} \frac{du_h}{dn} d\sigma = \int_{\mathfrak{F}T'_h} \frac{du_h}{dn'} d\sigma = \int_{\mathfrak{F}D'} u'_h \frac{du_h}{dn} d\pi = - \int_{D'} \text{grad } u'_h \times \text{grad } u_h dT,$$

ove n e n' denotano, rispettivamente, le normali alle frontiere di D e di D' rivolte verso l'interno di D e di D' . Ne segue

$$(4\pi c_h)^2 \leq \int_{D'} |\text{grad } u'_h|^2 dT \int_D |\text{grad } u_h|^2 dT < \int_{D'} |\text{grad } u'_h|^2 dT \int_D |\text{grad } u_h|^2 dT = (4\pi)^2 c'_h c_h.$$

Analisi matematica. — *Sulla sommabilità delle funzioni assolutamente integrabili* ^(*). Nota di ENNIO DE GIORGI, presentata ^(**) dal Socio M. PICONE.

È noto che, data in uno spazio S_r una massa elementare $\alpha(T)$ ⁽¹⁾, preso comunque un insieme E lebesghiano rispetto ad $\alpha(T)$ ed una funzione $f(P)$ quasi continua in L , condizione sufficiente perchè esista determinato e finito l'integrale $\int_E f(P) d\alpha$ è che sia finito l'integrale $\int_E |f(P)| dv_\alpha$; si pone il problema di vedere se tale condizione è anche necessaria ⁽²⁾. Il problema può essere trattato rapidamente facendo uso della teoria delle funzioni additive di insieme che è svolta negli ultimi capitoli dell'opera citata; è però possibile trattare la questione da un punto di vista più elementare, facendo uso soltanto del concetto di integrale di Stieltjes-Lebesgue, come mostrerò in questo lavoro. Precisamente, dette *equivalenti* due funzioni $\alpha(T)$ e $\beta(T)$ quando si ha, per ogni insieme chiuso e limitato C di S_r e per ogni funzione $f(P)$ continua in C ,

$$(1) \quad \int_C f(P) d\alpha = \int_C f(P) d\beta,$$

dimosteremo il teorema seguente: data comunque una massa elementare $\alpha(T)$ è possibile trovare una massa elementare $\beta(T)$ equivalente alla data e tale che, presi comunque un insieme lebesghiano E ed una funzione $f(P)$ quasi continua in E , condizione necessaria e sufficiente perchè sia determinato e finito l'integrale $\int_E f(P) d\beta$ (e quindi l'integrale $\int_E f(P) d\alpha$) è che sia finito l'integrale $\int_E |f(P)| dv_\beta$.

Definizione I. — Dato un intervallo T , formato dai punti che soddisfano la condizione $a_i \leq x_i \leq b_i$, indicheremo con \bar{T} il corrispondente intervallo, inferiormente aperto, formato dai punti che soddisfano la condizione $a_i < x_i \leq b_i$; diremo che una massa elementare $\beta(T)$ è *normale* se si ha, per ogni intervallo T ,

$$(2) \quad \beta(T) = \text{malg}_\beta(\bar{T}).$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) Per i concetti di cui si fa uso in questo lavoro, vedi il libro dei proff. M. PICONE e T. VIOLA, *Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione*. Edizioni Scientifiche Einaudi (1952).

(2) Per il caso in cui lo spazio S_r si riduca ad una retta vedi: B. PETTINEO, « Rendiconti Lincei », ser. VIII, vol. III, pp. 236-241, 512-517, 518-520 (1947).

TEOREMA I. - *Data comunque una massa elementare $\alpha(T)$ è sempre possibile trovare una massa elementare $\beta(T)$ normale ed equivalente alla data.*

Dimostrazione. - Consideriamo la funzione d'intervallo $\beta(T)$ definita dalla

$$(3) \quad \beta(T) = \text{malg}_\alpha(\bar{T}),$$

come subito si vede, $\beta(T)$ è una nuova massa elementare e coincide con $\alpha(T)$ in tutti gli intervalli la cui frontiera ha misura nulla rispetto ad $\alpha(T)$. Preso ora un insieme chiuso e limitato C arbitrario, ed una funzione $f(P)$ continua in C , possiamo trovare, in corrispondenza ad ogni numero positivo ε , un numero δ tale che, per ogni decomposizione D dello spazio in intervalli di ampiezza minore di δ , si abbia

$$(4) \quad \left| \sum_{k=1}^n f(P_k) \alpha(T_k) - \int_C f(P) d\alpha \right| < \varepsilon,$$

$$(4') \quad \left| \sum_{k=1}^n f(P_k) \beta(T_k) - \int_C f(P) d\beta \right| < \varepsilon,$$

ove al solito T_1, T_2, \dots, T_n sono gli intervalli relativi alla decomposizione D aventi punti comuni con C e ogni P_k è un punto scelto arbitrariamente in $C \cdot T_k$. Se prendiamo (come è certamente possibile) una decomposizione D di S_r in intervalli di ampiezza minore di δ , aventi tutti frontiera di misura nulla rispetto ad $\alpha(T)$, valgono le (4), (4') e si ha inoltre

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n f(P_k) \alpha(T_k) = \sum_{k=1}^n f(P_k) \beta(T_k)$$

dalle (4), (4'), (5) segue

$$(6) \quad \left| \int_C f(P) d\alpha - \int_C f(P) d\beta \right| < 2\varepsilon$$

Poichè la (6) vale per ogni ε , gli integrali che vi compaiono debbono essere uguali, e quindi, data l'arbitrarietà con cui sono stati scelti l'insieme C e la funzione $f(P)$, $\alpha(T)$ e $\beta(T)$ sono equivalenti; per la equivalenza di $\alpha(T)$ e $\beta(T)$, dalla (3) segue la (2) e quindi $\beta(T)$ è normale e il teorema è dimostrato.

TEOREMA II. - *Data una massa elementare normale $\beta(T)$ e un intervallo T , avente frontiera di misura nulla, è possibile decomporre il corrispondente intervallo inferiormente aperto \bar{T} in due insiemi R^+ ed R^- privi di punti comuni e tali che si abbia*

$$(7) \quad \text{malg}_\beta R^+ = m_\beta R^+, \quad \text{malg}_\beta R^- = -m_\beta R^-.$$

Dimostrazione. - Per la definizione stessa di $v_\beta(T)$ è possibile, preso comunque un intero n , trovare una decomposizione dell'intervallo T in un

numero finito di intervalli T_1, T_2, \dots, T_s , privi a due a due di punti interni comuni e tali che

$$(8) \quad v_\beta(T) - \sum_{k=1}^s |\beta(T_k)| = m_\beta \bar{T} - \sum_{k=1}^s |\text{malg}_\beta \bar{T}_k| < \frac{1}{2^n}.$$

Detto M_n^+ l'insieme formato dalla somma di tutti quelli, fra gli intervalli inferiormente aperti \bar{T}_k , che hanno misura algebrica positiva o nulla, detto M_n^- l'insieme formato dalla somma di quelli che hanno misura algebrica negativa o nulla, gli insiemi M_n^+ ed M_n^- sono privi di punti comuni ed hanno per somma l'insieme \bar{T} . Abbiamo quindi

$$(9) \quad \text{malg}_\beta M_n^+ - \text{malg}_\beta M_n^- = \sum_{k=1}^s |\text{malg}_\beta \bar{T}_k| \quad ; \quad m_\beta \bar{T} = m_\beta M_n^+ + m_\beta M_n^-.$$

Dalle (8), (9) segue

$$(10) \quad m_\beta M_n^+ - \text{malg}_\beta M_n^+ < \frac{1}{2^n} \quad , \quad m_\beta M_n^- + \text{malg}_\beta M_n^- < \frac{1}{2^n}.$$

Presi comunque un insieme lebesghiano $E_n^+ \subset M_n^+$ ed uno $E_n^- \subset M_n^-$ si ha per le (10)

$$(11) \quad m_\beta E_n^+ - \text{malg}_\beta E_n^+ < \frac{1}{2^n} \quad ; \quad m_\beta E_n^- + \text{malg}_\beta E_n^- < \frac{1}{2^n}.$$

Dalle (11) segue

$$(12) \quad m_\beta \left(\sum_{k=n}^{\infty} M_k^+ \right) - \text{malg}_\beta \left(\sum_{k=n}^{\infty} M_k^+ \right) < \frac{1}{2^{n-1}} \quad ; \quad m_\beta \left(\prod_{k=n}^{\infty} M_k^- \right) = - \text{malg}_\beta \left(\prod_{k=n}^{\infty} M_k^- \right)$$

e quindi posto $R^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n^+$, $R^- = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n^-$ abbiamo la (7).

TEOREMA III. — *Data una massa elementare normale $\beta(T)$, possiamo trovare due insiemi lebesghiani L^+ ed L^- tali che, per ogni insieme lebesghiano e limitato E e per ogni funzione $f(P)$, definita in E ed ivi quasi continua e limitata, risulta*

$$(13) \quad \int_{EL^+} f(P) d\beta = \int_{EL^+} f(P) dv_\beta \quad , \quad \int_{EL^-} f(P) d\beta = - \int_{EL^-} f(P) dv_\beta.$$

Dimostrazione. — Decomposto lo spazio S_r in una infinità di intervalli $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, privi a due a due di punti interni comuni ed aventi tutti frontiera di misura nulla, possiamo per il teorema II decomporre ogni intervallo inferiormente aperto \bar{T}_k in due insiemi R_k^+ ed R_k^- per cui valgono le (7); poniamo

$$(14) \quad L^+ = \sum_{k=1}^{\infty} R_k^+ \quad , \quad L^- = \sum_{k=1}^{\infty} R_k^-.$$

Poichè la $f(P)$ è quasi continua e limitata in E , preso un numero positivo ε piccolo a piacere è sempre possibile decomporre l'insieme E in un numero finito di insiemi lebesghiani, privi a due a due di punti comuni,

E_1, \dots, E_n , in ognuno dei quali l'oscillazione della funzione $f(P)$ sia minore di ϵ ; presi arbitrariamente in $E_1 L^+, \dots, E_n L^+$, i punti P_1, \dots, P_n , abbiamo

$$(15) \quad \left| \int_{EL^+} f(P) d\beta - \sum_{h=1}^n f(P_h) \text{malg}_\beta(E_h L^+) \right| < \epsilon m_\beta(EL^+),$$

$$(16) \quad \left| \int_{EL^+} f(P) dv_\beta - \sum_{h=1}^n f(P_h) m_\beta(E_h L^+) \right| < \epsilon m_\beta(EL^+).$$

Ma per le (7) e le (14) abbiamo

$$(17) \quad \text{malg}_\beta(E_h R_k^+) = m_\beta(E_h R_k^+) \quad ; \quad \text{malg}_\beta(E_h L^+) = m_\beta(E_h L^+)$$

e quindi per ogni ϵ positivo si ha

$$(18) \quad \left| \int_{EL^+} f(P) d\beta - \int_{EL^+} f(P) dv_\beta \right| < 2 \epsilon m_\beta(EL^+).$$

È così dimostrata la prima delle (13); in maniera del tutto analoga si dimostra la seconda.

TEOREMA IV. - *Dati una massa elementare normale $\beta(T)$, un insieme lebesghiano E ed una funzione $f(P)$ quasi continua in E , se $f(P)$ è assolutamente integrabile in E , vi è pure sommabile.*

Dimostrazione. - Se una funzione $f(P)$ è assolutamente integrabile in un insieme E , deve essere limitato l'insieme descritto dall'integrale

$\int_C f(P) d\beta$, al variare di C nella famiglia degli insiemi chiusi e limitati con-

tenuti in E nei quali $f(P)$ è continua, che indicheremo con $\{C\}_{f,E}$. Detto ora E^+ l'insieme dei punti nei quali $f(P)$ non è negativa ed E^- l'insieme dei punti nei quali $f(P)$ non è positiva si ha

$$(19) \quad E = L^+ E^+ + L^- E^- + L^+ E^- + L^- E^+.$$

Evidentemente la famiglia $\{C\}_{|f|, E^+ L^+}$ coincide con la famiglia $\{C\}_{f, L^+ E^+}$ ed è quindi contenuta nella famiglia $\{C\}_{f,E}$. Per ogni insieme chiuso C della famiglia $\{C\}_{|f|, E^+ L^+}$ si ha per il teorema III

$$(20) \quad \int_C f(P) d\beta = \int_C |f(P)| dv_\beta$$

quindi quest'ultimo integrale descrive un insieme limitato ed $f(P)$ è sommabile in $L^+ E^+$; analogamente si dimostra la sommabilità di $f(P)$ negli insiemi $L^+ E^-$, $L^- E^-$, $L^- E^+$ e quindi nell'insieme E .

COROLLARIO. - *Dai teoremi I, IV segue immediatamente che, data una massa elementare $\alpha(T)$, è sempre possibile trovare una massa elementare $\beta(T)$ equivalente ad $\alpha(T)$, tale che ogni funzione $f(P)$ quasi continua in un insieme lebesghiano E ed ivi assolutamente integrabile rispetto ad $\alpha(T)$ (e quindi rispetto a $\beta(T)$), sia sommabile rispetto a $\beta(T)$.*

Analisi matematica. — *Su una classe di problemi non regolari di calcolo delle variazioni, attinenti all'equazione $\Delta_2^* u = 0$ (*)*.
Nota di TULLIO VIOLA, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

I. L'esistenza del minimo assoluto dell'integrale multiplo

$$I[u] = \int_A (\Delta_2 u)^2 d\tau = \int_A \left(\sum_i^{1,r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_r,$$

nella classe delle funzioni $u = u(x_1, x_2, \dots, x_r)$ definite (sotto ipotesi qualitative opportunamente precisate) in un *campo limitato* A dello spazio euclideo S_r , tali che i valori u e quelli della derivata normale $du/d\nu$, sulla frontiera $\mathfrak{F}A$ di A , coincidono rispettivamente con due prescritte funzioni, è stata recentemente dimostrata da G. Fichera, il quale è pervenuto anche all'esplicita costruzione della minimante, mediante un'opportuna formula ⁽¹⁾. L'Autore ha dimostrato altresì che la funzione minimante è un'estremale, cioè è la soluzione del problema bi-iperarmonico nella classe predetta (problema relativo all'equazione $\Delta_2^* u = \Delta_2 \Delta_2 u = 0$). Egli ha giustamente messo in luce l'interesse del problema da lui risolto, interesse consistente soprattutto nel fatto che, essendo la forma quadratica nelle derivate seconde, che compare nell'integrale multiplo, non già definita positiva, ma soltanto *semidefinita positiva*, il problema è di quelli che, nel calcolo delle variazioni, sono detti di tipo *non regolare*.

Nella presente Nota indicherò riassuntivamente come possano risolversi, nell'ordine d'idee di Fichera, generali problemi di minimo, in connessione al classico problema al contorno relativo all'equazione n -iperarmonica (equazione $\Delta_2^n u = 0$), problema che, a tutt'oggi, a quanto mi consta, non aveva ancora ricevuto un'esauriente trattazione dal punto di vista esistenziale e quantitativo.

Le dimostrazioni, insieme con tutte le spiegazioni di dettaglio, saranno date in altro lavoro, di prossima pubblicazione.

2. IPOTESI E PREMESSE. — Il campo limitato d'integrazione A sarà supposto connesso ⁽²⁾ e inoltre di tipo *regolare*, cioè soddisfacente alle seguenti condizioni. La frontiera $\mathfrak{F}A$ sarà supposta formata da un numero finito di porzioni d'ipersuperficie aperte di classe 2. Se Σ è una qualunque

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) G. FICHERA, *Esistenza del minimo in un classico problema di calcolo delle variazioni*. « Rendiconti Lincei », ser. VIII, vol. XI, pp. 34-39 (1951).

(2) L'ipotesi della connessione di A non ha nulla d'essenziale perchè, in caso contrario, basterebbe risolvere separatamente i singoli problemi di minimo relativi alle singole porzioni connesse costituenti A .

di queste porzioni e Q è un qualunque punto regolare di Σ (cioè un punto di $\Sigma - B\Sigma$) ⁽³⁾, si supporrà che sulla retta normale a Σ in Q , sia sempre possibile individuare un segmento (sia pure piccolo), di centro Q , per metà interno ad A e per l'altra metà esterno. Si supporrà infine:

1° che sia possibile definire, in ogni punto Q di $\mathfrak{F}A$, un versore $\vec{\mu} = \vec{\mu}(Q)$, continuo su tutto $\mathfrak{F}A$ e di classe 1 su ogni porzione Σ , penetrante sempre nell'interno di A e tale che, detta ω la misura dell'angolo (compreso fra 0 e π) che $\vec{\mu}(Q)$ forma (in ogni punto Q regolare su una porzione Σ) col versore $\vec{\nu}(Q)$ della normale, in Q , penetrante in A , riesca sempre $0 \leq \omega \leq \omega_0 < \pi/2$, con ω_0 costante;

2° che esista un numero $\rho_0 > 0$ tale che, qualunque sia la costante ρ , con $0 < \rho \leq \rho_0$, il luogo descritto dal punto $M = Q + \rho\vec{\mu}(Q)$, al variare di Q su $\mathfrak{F}A$, riesca interamente contenuto in A e in corrispondenza biunivoca con $\mathfrak{F}A$ ⁽⁴⁾.

A proposito del tipo, ora descritto, di campo regolare, è di fondamentale importanza il seguente

LEMMA. - *Se $\varphi(M)$ è una qualunque funzione definita in un campo regolare A , ivi dotata di derivate parziali prime continue e sommabili, esiste il limite, determinato e finito,*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \varphi(Q + \rho\vec{\mu})$$

per quasi tutti i punti Q di $\mathfrak{F}A$.

Indicato con A_ρ il campo che s'ottiene, privando A di tutti i punti

$$M = Q + \rho'\vec{\mu}(Q) \quad (Q \in \mathfrak{F}A, 0 < \rho' \leq \rho, \rho \text{ cost.} \leq \rho_0),$$

la funzione $\varphi(Q + \rho\vec{\mu})$ riesce uniformemente sommabile sulla frontiera $\mathfrak{F}A_\rho$ (al variare di ρ).

Infine, se $\vec{\mu}' = \vec{\mu}'(Q)$ è un secondo versore di classe 1 su $\mathfrak{F}A$, dotato delle stesse proprietà sopra indicate per $\vec{\mu}$, si ha, quasi ovunque su $\mathfrak{F}A$,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \varphi(Q + \rho\vec{\mu}) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \varphi(Q + \rho\vec{\mu}') \quad (5).$$

(3) Con $B\Sigma$ è indicato il bordo di Σ .

(4) Condizioni analoghe, per la struttura geometrica del campo d'integrazione, sono supposte da G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*. « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. III, vol. IV, 1950, fasc. I-II, cap. V, n. 1; C. MIRANDA, *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche*. « Rendiconti Lincei », ser. VIII, vol. III, p. 58 (1947); K. O. FRIEDRICH, *On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality*. « Annals of Mathematics », vol. 48, n. 2, aprile 1947, parte I, 1, pp. 443-445.

(5) Cfr. G. FICHERA, loc. cit. alla nota preced., cap. V, n. 2, XXXII.

Se ora si considera genericamente una funzione $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definita in un campo regolare A , ivi continua e dotata di derivate parziali prime continue e sommabili, in virtù del lemma esisterà, per quasi tutti i punti Q di $\mathfrak{F}A$, il limite, determinato e finito,

$$\lim_{Q \rightarrow Q^+} f(Q + \rho \vec{\mu}),$$

e questo limite sarà indipendente da $\vec{\mu}$. Ebbene si porrà, per definizione, quasi ovunque su $\mathfrak{F}A$ ⁽⁶⁾,

$$f(Q) = \lim_{Q \rightarrow Q^+} f(Q + \rho \vec{\mu}).$$

3. ENUNCIATO DEL PROBLEMA. — La questione cui abbiamo accennato al n. 1, presenta aspetti diversi, secondochè l'indice n è pari o dispari.

Nel primo caso, la determinazione di un funzionale non regolare, avente per equazione euleriana quella iperarmonica, è immediata potendosi assumere il seguente integrale

$$I[u] = \int_A (\Delta_2^p u) d\tau.$$

In tal caso l'estensione del procedimento di Fichera urta solo contro difficoltà di carattere formale, che, peraltro, introducendo opportuni algoritmi, è agevole superare.

Qualora invece sia $n = 2p + 1$, il problema si presenta sotto nuovi aspetti, dato che il funzionale (non regolare, per $p > 0$) che si assume, è il seguente:

$$I[u] = \int_A |\text{grad } \Delta_2^p u|^2 d\tau,$$

al quale non può applicarsi un tipo di trattazione analogo a quello seguito per il funzionale del caso precedente.

Per meglio convincersi di ciò, basta osservare che, per $p = 0$, si ottiene il classico integrale di Dirichlet e che, per dimostrare l'esistenza del minimo di esso, non può più applicarsi un procedimento di natura analoga a quello di Fichera, ma bisogna introdurre nuovi elementi concettuali.

(6) L'idea di definire, quasi ovunque, i valori al contorno di una funzione, mediante un passaggio a limite lungo la normale, è stata sistematicamente introdotta da L. AMERIO: a) *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ in un dominio di connessione qualsiasi*. « Rend. dell'Istit. Lombardo di Scienze e Lettere », 78, 1, pp. 79-102 (1944-45); b) *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico*. « American Journal of Mathematics », 69, 3, luglio 1947, pp. 447-489; c) *Sull'equazione di propagazione del calore*. « Rend. di Matematica e delle sue applicazioni », pp. 84-120 (1946); d) *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_{2k} u = f$* . « Annali di Matematica pura ed applicata », ser. IV, 24, pp. 119-138 (1945). Nel lavoro b) e, in alcuni casi, anche nel lavoro c), il ruolo della normale è assunto dalla conormale.

Ciò premesso, indichiamo con U_n la classe delle funzioni $u(M)$ definite in A , ivi continue, di quadrato sommabile insieme con le proprie derivate parziali prime e seconde, e inoltre soddisfacenti alla seguente condizione.

I CASO: $n = 2p$. - Esistono continue, di quadrato sommabile, dotate di derivate parziali prime e seconde continue e di quadrato sommabile, le funzioni

$$\Delta_2 u, \Delta_2^2 u, \dots, \Delta_2^{p-1} u.$$

II CASO: $n = 2p + 1$. - Esistono continue, di quadrato sommabile, dotate di derivate parziali prime e seconde continue e di quadrato sommabile, le funzioni

$$\Delta_2 u, \Delta_2^2 u, \dots, \Delta_2^{p-1} u;$$

inoltre la funzione $\Delta_2^p u$ è dotata di derivate parziali prime continue e di quadrato sommabile.

Per una qualunque funzione $u(P)$ della classe U_n , sarà lecito (in virtù del lemma sopra enunciato) definire i seguenti valori limiti, per quasi tutti i punti Q di \mathcal{FA} :

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow Q} u(M) &= \bar{u}(Q) \quad , \quad \lim_{M \rightarrow Q} \frac{\partial u(M)}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}(Q)}{\partial x_i} , \\ \lim_{M \rightarrow Q} \Delta_2^h u(M) &= \Delta_2^h \bar{u}(Q) \quad , \quad \lim_{M \rightarrow Q} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_2^h u(M) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_2^h \bar{u}(Q) \\ (i &= 1, 2, \dots, r \quad ; \quad h = 1, 2, \dots, p-1), \end{aligned}$$

e infine, nel caso $n = 2p + 1$, anche

$$\lim_{M \rightarrow} \Delta_2^p u(M) = \Delta_2^p \bar{u}(Q).$$

I detti limiti devono considerarsi ottenuti nel senso indicato alla fine del numero precedente. Per definire il significato delle derivate normali, su \mathcal{FA} , delle funzioni $u(Q)$, $\Delta_2^h u(Q)$ (con $h = 1, 2, \dots, p-1$), porremo:

$$\frac{du(Q)}{d\nu} = \sum_i^{1,r} \frac{\partial u(Q)}{\partial x_i} \alpha_i(Q) \quad , \quad \frac{d}{d\nu} \Delta_2^h u(Q) = \sum_i^{1,r} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_2^h u(Q) \alpha_i(Q),$$

ove con ν è indicata la normale esterna ad \mathcal{FA} , con α_i il suo i -esimo coseno direttore.

Definiamo ora, come segue, una sottoclasse \bar{U}_n di U_n , che in ogni caso supporremo *non vuota*.

I CASO: $n = 2p$. - Siano $\{f_h(Q)\}$, $\{g_h(Q)\}$ (con $h=0, 1, \dots, p-1$) n funzioni definite su \mathcal{FA} , ivi quasi continue e sommabili. \bar{U}_n sarà la sottoclasse di U_n , costituita da tutte le funzioni di U_n per le quali si ha su \mathcal{FA} , nel senso sopra specificato:

$$\begin{aligned} u &= f_0 \quad , \quad \frac{du}{d\nu} = g_0 \quad , \quad \Delta_2 u = f_1 \quad , \quad \frac{d\Delta_2 u}{d\nu} = g_1, \\ \Delta_2^2 u &= f_2 \quad , \quad \frac{d\Delta_2^2 u}{d\nu} = g_2, \dots, \Delta_2^{p-1} u = f_{p-1} \quad , \quad \frac{d\Delta_2^{p-1} u}{d\nu} = g_{p-1}. \end{aligned}$$

II CASO: $n = 2p + 1$. - Siano $\{f_h(Q)\}, \{g_h(Q)\}, f_p(Q)$ (con $h = 0, 1, \dots, p-1$) n funzioni quasi continue e sommabili su $\mathfrak{F}A$. \bar{U}_n sarà la sottoclasse di U_n , costituita da tutte le funzioni di U_n per le quali si ha su $\mathfrak{F}A$, nel senso sopra specificato:

$$u = f_0, \quad \frac{du}{dv} = g_0, \quad \Delta_2 u = f_1, \quad \frac{d\Delta_2 u}{dv} = g_1, \\ \Delta_2^2 u = f_2, \quad \frac{d\Delta_2^2 u}{dv} = g_2, \dots, \frac{d\Delta_2^{p-1} u}{dv} = g_{p-1}, \quad \Delta_2^p u = f_p.$$

Il problema consiste nella ricerca del minimo assoluto, nella classe \bar{U}_n , del funzionale

$$I[u] = \begin{cases} \int_A (\Delta_2^p u)^2 d\tau & \text{nel I caso } (n = 2p) \\ \int_A |\text{grad } \Delta_2^p u|^2 d\tau & \text{nel II caso } (n = 2p + 1). \end{cases}$$

4. ESISTENZA DEL MINIMO ASSOLUTO DI $I[u]$. - Diamo un rapido cenno della soluzione del problema enunciato (7).

Il minimo assoluto, in \bar{U}_n , esiste in ogni caso, e la minimante $u_0(M)$ è effettivamente sempre un'estremale, cioè soluzione, in tutto il campo A , dell'equazione differenziale $\Delta_2^n u = 0$.

Per la dimostrazione, occorre introdurre le *funzioni iperarmoniche elementari*

$$s_k(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{C_{rk}\omega_r} \frac{1}{\rho^{r-2k}} & , \text{ per } r \text{ dispari, oppure per } r \text{ pari } > 2k, \\ -\frac{1}{C_{rk}\omega_r} \rho^{2k-r} \log \rho, & \text{ per } r \text{ pari } \leq 2k, \quad (k = 2, 3, \dots) \end{cases}$$

ρ indicando la distanza \overline{MQ} di due punti generici, distinti M, Q dell' S_r , C_{rk} indicando una certa costante:

$$C_{rk} = \begin{cases} (-2)^{k-1} (r-2)(r-4)\dots(r-2k)(k-1)!, & \text{per } r \text{ dispari, oppure per } r \text{ pari } > 2k, \\ (-1)^{r/2-1} 4^{k-1} (k-1)! \left(\frac{r}{2}-1\right)! \left(k-\frac{r}{2}\right)!, & \text{per } r \text{ pari } \leq 2k, \end{cases}$$

ω_r è la misura ipersuperficiale dell'ipersfera unitaria dell' S_r .

(7) In quale relazione si trovi questo problema coi problemi classici (nei quali le condizioni al contorno sono assegnate in altro modo), mi propongo d'indagare in un prossimo lavoro. Per un primo orientamento in proposito, il lettore può intanto consultare la monografia di M. NICOLESCO, *Les fonctions polyharmoniques* (Parigi, Hermann 1936) cap. III.

In ogni caso risulta $\Delta_2^k s_k(\rho) = 0$, intendendo l'operatore Δ_2^k effettuato al variare d'uno qualunque dei due punti M, Q , l'altro punto essendo supposto fissato. Le $s_k(\rho)$ generalizzano la nota funzione armonica elementare

$$s_r(\rho) = \begin{cases} (r-2)\omega_r \frac{1}{\rho^{r-2}}, & \text{per } r > 2, \\ -\frac{1}{2\pi} \log \rho, & \text{per } r = 2. \end{cases}$$

Inoltre giova far uso, nel caso $n = 2p + 1$, anche della funzione:

$$\bar{s}_{p+1}(\rho) = \begin{cases} s_{p+1}(\rho) & \text{per } r \text{ dispari, oppure per } r \text{ pari } > 2p, \\ s_{p+1}(\rho) + \frac{H_{r, p+1}}{(2p+2-r)2p} \rho^{2p+2-r} & \text{per } r \text{ pari } \leq 2p, \end{cases}$$

con $H_{r, p+1}$ costante $= \frac{4p+2-r}{C_{r, p+1}\omega_r}$.

Indichiamo con B un qualunque campo esterno ad A (cioè tale che la distanza \overline{AB} sia positiva), che abbia punti contenuti in ciascuna delle porzioni connesse di cui si compone il campo complementare ad $A + \mathfrak{F}A$. Sia $\{\varphi_k(M)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) un sistema di funzioni, tutte definite in B , completo in B nel senso di Hilbert.

Distinguiamo, per il seguito, i due casi $n = 2p$, $n = 2p + 1$.

I CASO: $n = 2p$. - Le nuove funzioni

$$v_k(M) = \int_B s_p(\rho) \varphi_k(Q) d\tau_Q, \quad (\rho = \overline{MQ})$$

($k = 1, 2, \dots$) riescono p -iperarmoniche e di classe n in $A + \mathfrak{F}A$ ⁽⁸⁾. Supposto il sistema $\{v_k(M)\}$ ortonormalizzato in A , verificante cioè le condizioni

$$\int_A v_h(M) v_k(M) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{per } h = k \\ 0 & \text{per } h \neq k, \end{cases}$$

calcoliamo la successione di costanti

$$a_k = - \sum_h^{0, p-1} \int_{\mathfrak{F}A} \left(f_h \frac{d\Delta_2^{p-1-h} v_k}{d\nu} - \Delta_2^{p-1-h} v_k \cdot g_h \right) d\sigma, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

(8) La considerazione di sistemi di funzioni quali le v_k , è utile non solamente per acquisire il teorema d'esistenza dei problemi al contorno considerati nel nostro lavoro, ma anche per il calcolo numerico della soluzione, mercè l'applicazione dei metodi generali di M. Picone, fondati sull'impiego delle formule di Green. Cfr. M. PICONE, *Appunti di analisi superiore*. Napoli, Rondinella, pp. 752-765 (1940); *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuove applicazioni della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti*. «Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino», 75, pp. 413-426 (1939-40); *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali*. «Rendiconti Lincei», ser. VIII, vol. II, pp. 365-371, 485-492, 717-725 (1947). Cfr. anche L. AMERIO, loc. cit. (6), d.

Si dimostra che la serie $\sum_k^{1, \infty} a_k v_k(Q)$ converge in media in A ed uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in A .

Si dimostra infine che minimante assoluta dell'integrale

$$I[u] = \int_A (\Delta_2^p u)^2 d\tau,$$

in \bar{U}_n , è la funzione

$$u_o(M) = - \sum_h^{0, p-1} \int_{\mathfrak{F}A} \left[f_h(Q) \frac{d\Delta_2^{p-1-h} s_p(\rho)}{dv} - g_h(Q) \Delta_2^{p-1-h} s_p(\rho) \right] d\sigma_Q - \\ - \int_A s_p(\rho) \sum_k^{1, \infty} a_k v_k(Q) d\tau_Q, \quad (\rho = \overline{MQ}).$$

II CASO: $n = 2p + 1$. - Le funzioni

$$v_k(M) = \int_B \bar{s}_{p+1}(\rho) \varphi_k(Q) d\tau_Q, \quad (\rho = \overline{MQ})$$

($k = 1, 2, \dots$) riescono $(p+1)$ -iperarmoniche e di classe $n+1$ in $A + \mathfrak{F}A$ ⁽⁹⁾. Supposto il sistema di vettori

$$\vec{V}_k(M) = \text{grad } v_k(M) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

ortonormalizzato in A , nel senso che riesca

$$\int_A \vec{V}_h(M) \cdot \vec{V}_k(M) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{per } h = k \\ 0 & \text{per } h \neq k, \end{cases}$$

calcoliamo la successione di costanti

$$a_k = \sum_h^{0, p-1} \int_{\mathfrak{F}A} \left(f_h \frac{d\Delta_2^{p-h} \bar{v}_k}{dv} - \Delta_2^{p-h} v_k \cdot g_h \right) d\sigma + \int_{\mathfrak{F}A} f_p \frac{dv_k}{dv} d\sigma \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Posto

$$\vec{U}_o(M) = \sum_k^{1, \infty} a_k \vec{V}_k(M),$$

si dimostra che la serie di vettori, qui scritta, converge in media in A ed uniformemente nell'interno di A .

Indichiamo con $\varphi(M)$ quella soluzione particolare dell'equazione differenziale vettoriale

$$\text{grad } \varphi = \vec{U}_o(M),$$

(9) Anche a proposito di tali funzioni v_k , valgono le osservazioni della nota precedente.

che soddisfa alla condizione

$$\int_{\mathfrak{F}A} \varphi \, d\sigma = \int_{\mathfrak{F}A} f_p \, d\sigma.$$

Si dimostra che minimante assoluta dell'integrale

$$I[u] = \int_A |\operatorname{grad} \Delta_2^p u|^2 \, d\tau,$$

in \overline{U}_n , è la funzione

$$\begin{aligned} u_0(M) = & - \sum_h^{0, p-1} \int_{\mathfrak{F}A} \left[f_h(Q) \frac{d\Delta_2^{p-1-h} s_p(\rho)}{d\nu} - g_h(Q) \Delta_2^{p-1-h} s_p(\rho) \right] d\sigma_Q - \\ & - \int_A s_p(\rho) \varphi(Q) \, d\tau_Q, \quad (\rho = \overline{MQ}). \end{aligned}$$

Analisi matematica. — *Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili in un prescritto campo semplicemente connesso del piano*^(*). Nota di CARLO BIRINDELLI, presentata^(**) dal Socio M. PICONE.

1. Data una funzione, vettoriale, complessa $f(z, w)$, a p componenti, delle variabili complesse $z \equiv t_1 + it_2$, $w \equiv x + iy \equiv [x_1 + iy_1, \dots, x_p + iy_p]$, olomorfa in un campo connesso A , dello spazio $S_{(2p+2)}$, di cui un campo T connesso del piano $[t_1, t_2]$ sia la proiezione, allora per l'equazione

$$(I) \quad dw(z) = f(z, w) \, dz$$

è noto il teorema di esistenza per le soluzioni $w(z)$, olomorfe, di (I), e son pur noti i procedimenti di ricerca pel campo di olomorfia di $w(z)$, mentre d'altra parte se si separa in (I) il reale dall'immaginario il sistema, reale, ai differenziali totali, che così si ottiene, soddisfa necessariamente le condizioni locali d'integrabilità (condizioni necessarie), poichè queste sono conseguenza immediata di quelle d'olomorfia per la $f(z, w)$ negli argomenti z, w , e per tale sistema si possono sfruttare sia il teorema di esistenza relativo alla equazione (I), da cui esso proviene, come pure i metodi di ricerca del campo di olomorfia di $w(z)$, allo scopo di pervenire al teorema di esistenza e alla precisazione del campo di esistenza per le soluzioni di tale sistema reale ai differenziali totali⁽¹⁾.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1952.

(1) Cfr. M. PICONE, *Equazioni differenziali a derivate parziali del primo ordine*, Corso di Analisi Superiore, Anno Accademico 1948-49, Università di Roma. Vedi Capitoli III e V.

La constatazione di tali risultati, per i particolari sistemi, reali, ai differenziali totali, traenti origine da una (I) olomorfa nel modo detto, fa pensare che essi seguitino a rimaner validi anche per generali sistemi, reali, ai differenziali totali e ritenere così che per realizzare simil punto di vista basti imporre le condizioni locali d'integrabilità in A pel sistema, in luogo di quelle di olomorfia imposte ad $f(z, w)$ nel detto caso particolare.

Ad esempio se in (I) è $f(z, w) \equiv g(z) + \Phi(z)w$, con $\Phi(z)$ matrice quadrata d'ordine p , e se $g(z)$, $\Phi(z)$ sono olomorfe in $T^{(2)}$, è noto che le soluzioni $w(z)$ olomorfe di (I) esistono in tutto T, dal che si desume che per il sistema, reale, lineare ai differenziali totali, ottenuto col separare il reale dall'immaginario, le soluzioni hanno per campo di esistenza tutto il campo semplicemente connesso T.

Scopo del presente lavoro è quello di stabilire il medesimo risultato per i sistemi lineari ai differenziali totali in generale sotto la pura e semplice validità delle condizioni locali d'integrabilità in T, quando T è semplicemente connesso.

2. Il punto $t \equiv [t_1, t_2]$ sia variabile in un campo T del piano ordinario e $g^{(1)}(t)$, $g^{(2)}(t)$, $\varphi^{(1, k)}(t)$, $\varphi^{(2, k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots, p$, vettori a p componenti, continui in T assieme alle supposte esistenti $\partial g^{(1)}/\partial t_2$, $\partial g^{(2)}/\partial t_1$, $\partial \varphi^{(1, k)}/\partial t_2$, $\partial \varphi^{(2, k)}/\partial t_1$. Indichi $x \equiv [x_1, x_2, \dots, x_p]$ un vettore a p componenti e siano

$G(t)$ la matrice $\begin{pmatrix} g_1^{(1)} & g_1^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ g_p^{(1)} & g_p^{(2)} \end{pmatrix}$ e $\Phi^{(k)}(t)$ l'altra $\begin{pmatrix} \varphi_1^{(1, k)} & \varphi_1^{(2, k)} \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_p^{(1, k)} & \varphi_p^{(2, k)} \end{pmatrix}$, con $k = 1, 2, \dots, p$.

Resta, dopo ciò, definito il sistema vettoriale lineare ai differenziali totali

$$(2) \quad dx = \left\{ G(t) + \sum_{k=1}^p x_k \cdot \Phi^{(k)}(t) \right\} dt,$$

che si può anche scrivere

$$(2') \quad dx = \left[g^{(1)}(t) + \sum_{k=1}^p x_k \cdot \varphi^{(1, k)}(t) \right] \cdot dt_1 + \left[g^{(2)}(t) + \sum_{k=1}^p x_k \cdot \varphi^{(2, k)}(t) \right] \cdot dt_2.$$

Per tale sistema, (cui si può assegnare una qualunque condizione iniziale $x(t^{(0)}) = x^{(0)}$, $t^{(0)} < T$) sussiste, poichè è lipschitziano, il teorema di unicità.

Le note condizioni locali d'integrabilità (condizioni necessarie) consistono nel dover supporre che sia

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial g^{(1)}}{\partial t_2} - \frac{\partial g^{(2)}}{\partial t_1} + \sum_{k=1}^p (\varphi^{(1, k)} \cdot g_k^{(2)} - \varphi^{(2, k)} \cdot g_k^{(1)}) \equiv 0, \\ \frac{\partial \varphi^{(1, l)}}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi^{(2, l)}}{\partial t_1} + \sum_{k=1}^p (\varphi^{(1, k)} \cdot \varphi_k^{(2, l)} - \varphi^{(2, k)} \cdot \varphi_k^{(1, l)}) \equiv 0, \quad l, k = 1, 2, \dots, p, \end{cases}$$

identicamente in T.

(2) Con T campo semplicemente connesso del piano $[t_1, t_2]$.

Si vuol qui stabilire che se T è semplicemente connesso allora le predette condizioni (3) sono pure sufficienti onde affermare la integrabilità del sistema in T . Più precisamente si vuol stabilire il

TEOREMA. - Se T è semplicemente connesso, allora, sotto le predette condizioni (3), esiste la (sola) soluzione del sistema, per cui $x(t^{(0)}) = x^{(0)}$, e il suo campo di esistenza è tutto il campo T . Si premetta alla dimostrazione la seguente

NOTA. - Si considerino in primo luogo due punti $t' \equiv [t'_1, t'_2]$, $t \equiv [t_1, t_2]$, di T tali che il dominio rettangolare, di vertici opposti t' , t , appartenga a T . Restano definite in relazione ad esso le due poligonali coordinate [di due lati ciascuna] congiungenti t' a t ; quando si pensa di integrare il sistema lungo le due distinte poligonali coordinate dette, si deve in sostanza operare nel modo che segue:

Detta s la variabile scalare,

si chiami $g_k^{(I)}(s)$ la $g_k^{(1)}(s, t'_2)$, e $g_{k,i}^{(I)}(s)$ la $\varphi_k^{(1,i)}(s, t'_2)$;

si chiami $g_k^{(II)}(s)$ la $g_k^{(2)}(t_1, s)$, e $g_{k,i}^{(II)}(s)$ la $\varphi_k^{(2,i)}(t_1, s)$;

si chiami $g_k^{(IV)}(s)$ la $g_k^{(2)}(t'_1, s)$, e $g_{k,i}^{(IV)}(s)$ la $\varphi_k^{(2,i)}(t'_1, s)$;

si chiami $g_k^{(IV)}(s)$ la $g_k^{(1)}(s, t_2)$, e $g_{k,i}^{(IV)}(s)$ la $\varphi_k^{(1,i)}(s, t_2)$;

e si prendano in considerazione le rispettive quattro equazioni lineari

(ordinarie) del tipo $\dot{x}_k(s) = g_k(s) + \sum_{i=1}^p g_{k,i}(s) \cdot x_i$, $k = 1, 2, \dots, p$.

Ciò posto, la integrazione del sistema lungo una delle due poligonali equivale a ricercare anzitutto la soluzione della equazione lineare ordinaria

$$(4) \quad \dot{x}_k(s) = g_k^{(I)}(s) + \sum_{i=1}^p g_{k,i}^{(I)}(s) \cdot x_i \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

per cui sia $x(t'_1) = x(t'_1, t'_2)$.

Per quanto è ben noto, tale soluzione esiste ed è unica e il suo intervallo di esistenza contiene l'intervallo (t'_1, t_1) . Preso il valore di tale soluzione per $s = t_1$, si considera poi l'altra equazione lineare ordinaria

$$(5) \quad \dot{x}_k(s) = g_k^{(II)}(s) + \sum_{i=1}^p g_{k,i}^{(II)}(s) \cdot x_i \quad k = 1, 2, \dots, p$$

con il detto valore per $s = t'_2$ come condizione iniziale. La soluzione certo esistente ed unica ha l'intervallo di esistenza contenente quello (t'_2, t_2) e il valore assunto da tale soluzione per $s = t_2$ ci permette di definire il valore di una prima funzione X nel secondo estremo $t \equiv [t_1, t_2]$ della prima poligonale. Si definisce in tal modo la $X(t)$ di cui si sono già calcolati i valori lungo la poligonale considerata.

Operando nello stesso modo con l'altra poligonale coordinata si definisce una seconda funzione $\chi(t)$. $X(t)$, $\chi(t)$ sono definibili così in un intorno di t' .

Si tratta anzitutto di verificare che $X(t) \equiv \chi(t)$ in tale intorno di t' . Da quanto si è fin qui detto si ha che $X(t)$ è soluzione della equazione

$$(6) \quad X(t) = X(t') + \int_{t'_1}^{t_1} \left\{ g^{(1)}(s, t'_2) + \sum_{k=1}^p X_k \cdot \varphi^{(1, k)}(s, t'_2) \right\} \cdot ds + \\ + \int_{t'_2}^{t_2} \left\{ g^{(2)}(t_1, s) + \sum_{k=1}^p X_k \cdot \varphi^{(2, k)}(t_1, s) \right\} \cdot ds,$$

mentre $\chi(t)$ è soluzione della equazione

$$(7) \quad \chi(t) = \chi(t') + \int_{t'_2}^{t_2} \left\{ g^{(2)}(t'_1, s) + \sum_{k=1}^p \chi_k \cdot \varphi^{(2, k)}(t'_1, s) \right\} \cdot ds + \\ + \int_{t'_1}^{t_1} \left\{ g^{(1)}(s, t_2) + \sum_{k=1}^p \chi_k \cdot \varphi^{(1, k)}(s, t_2) \right\} \cdot ds,$$

essendo inoltre $X(t') = \chi(t') (= x(t'))$.

Si ha poi dalle precedenti equazioni che è intanto

$$(a) \quad \frac{\partial X(t)}{\partial t_2} = g^{(2)}(t) + \sum_{k=1}^p X_k \cdot \varphi^{(2, k)}(t); \quad (b') \quad \frac{\partial \chi(t)}{\partial t_1} = g^{(1)}(t) + \sum_{k=1}^p \chi_k \cdot \varphi^{(1, k)}(t).$$

Considerando la $X(t)$, la derivazione rispetto a t_1 dà a sua volta

$$(8) \quad \frac{\partial X(t)}{\partial t_1} = g^{(1)}(t_1, t'_2) + \sum_{k=1}^p X_k(t_1, t'_2) \cdot \varphi^{(1, k)}(t_1, t'_2) + \\ + \int_{t'_2}^{t_2} \left\{ \frac{\partial g^{(2)}(t_1, s)}{\partial t_1} + \sum_{k=1}^p X_k(t_1, s) \cdot \frac{\partial \varphi^{(2, k)}(t_1, s)}{\partial t_1} \right\} \cdot ds + \int_{t'_1}^{t_1} \left\{ \sum_{k=1}^p \varphi^{(2, k)}(t_1, s) \cdot \frac{\partial X_k(t_1, s)}{\partial t_1} \right\} \cdot ds.$$

Ma, dalle (3), con ovvio mutamento dei simboli risulta che

$$(8') \quad \frac{\partial g^{(2)}}{\partial t_1} + \sum_{k=1}^p X_k \frac{\partial \varphi^{(2, k)}}{\partial t_1} \equiv \frac{\partial g^{(1)}}{\partial t_2} + \\ + \sum_{k=1}^p \left\{ \varphi^{(1, k)} \cdot g_k^{(2)} - \varphi^{(2, k)} \cdot g_k^{(1)} \right\} + X_k \left\{ \frac{\partial \varphi^{(1, k)}}{\partial t_2} + \sum_{l=1}^p \left\{ \varphi^{(1, l)} \cdot \varphi_l^{(2, k)} - \varphi^{(2, l)} \cdot \varphi_l^{(1, k)} \right\} \right\},$$

mentre nella (5) risulta essere la soluzione $X(t_1, s)$ [ch'è pur relativa alla (6)] appunto derivabile rispetto al parametro t_1 , con derivata $\partial X / \partial t_1$ continua, e ciò per il teorema di Lichtenstein dato che nella (5) le $g_k^{(2)}(t_1, s)$, $\varphi_k^{(2, i)}(t_1, s)$, $i = 1, 2, \dots, p$, sono derivabili rispetto al parametro t_1 con derivate continue.

Dopo di ciò e tenendo presenti le condizioni locali (3) d'integrabilità nonchè del fatto che $X(t_1, s)$ soddisfa la (5) per s nell'intervallo $t'_2 \leq s \leq t_2$,

si verifica, con opportuni passaggi elementari, che è valevole la *fondamentale relazione*

$$(9) \quad \frac{\partial g^{(2)}(t_1, s)}{\partial t_1} + \sum_{k=1}^p \left[X_k(t_1, s) \cdot \frac{\partial \varphi^{(2, k)}(t_1, s)}{\partial t_1} + \varphi^{(2, k)}(t_1, s) \cdot \frac{\partial X_k(t_1, s)}{\partial t_1} \right] \equiv \\ \equiv \frac{\partial}{\partial s} \left\{ g^{(1)}(t_1, s) + \sum_{k=1}^p \varphi^{(1, k)}(t_1, s) \cdot X_k(t_1, s) \right\} + \\ + \sum_{i=1}^p \varphi^{(2, i)}(t_1, s) \cdot \left[\frac{\partial X_i(t_1, s)}{\partial t_1} - \left\{ g^{(1)}(t_1, s) + \sum_{i=1}^p \varphi^{(1, i)}(t_1, s) \cdot X_i(t_1, s) \right\} \right].$$

In forza di tale relazione, la (8) dà

$$(10) \quad \frac{\partial X(t)}{\partial t_1} = g^{(1)}(t) + \sum_{k=1}^p \varphi^{(1, k)}(t) \cdot X_k(t) + \\ + \int_{t_2}^{t_2'} \left[\sum_{k=1}^p \varphi^{(2, k)}(t_1, s) \cdot \left[\frac{\partial X_k(t_1, s)}{\partial t_1} - \left\{ g^{(1)}(t_1, s) + \sum_{i=1}^p \varphi^{(1, i)}(t_1, s) \cdot X_i(t_1, s) \right\} \right] \right] ds.$$

Se si pone allora $Y(t) \equiv \frac{\partial X(t)}{\partial t_1} - \left\{ g^{(1)}(t) + \sum_{k=1}^p \varphi^{(1, k)}(t) \cdot X_k(t) \right\}$, dalla precedente relazione risulta, derivando rispetto a t_2 , che $Y(t)$ verifica l'equazione lineare (omogenea)

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial t_2} = \sum_{k=1}^p \varphi^{(2, k)}(t) \cdot Y_k(t),$$

sicchè, poichè per $t_2 = t_2'$ è $Y(t_1, t_2') = 0$, la $Y(t_1, \tau)$ è identicamente nulla. Risulta così che

$$(b) \quad \frac{\partial X(t)}{\partial t_1} = g^{(1)}(t) + \sum_{k=1}^p \varphi^{(1, k)}(t) \cdot X_k(t),$$

e con identico procedimento si vede che è pure

$$(a') \quad \frac{\partial \chi(t)}{\partial t_2} = g^{(2)}(t) + \sum_{k=1}^p \varphi^{(2, k)}(t) \cdot \chi_k(t).$$

Se si pone quindi $X(t) - \chi(t) = Z(t)$ si ha da quanto precede che la $Z(t)$ soddisfa l'equazione lineare (omogenea)

$$dZ = \left\{ \sum_{k=1}^p Z_k \cdot \Phi^{(k)}(t) \right\} dt$$

e si annulla per $t = t'$. $Z(t)$ è pertanto identicamente nulla, sicchè risulta $X(t) \equiv \chi(t)$ nel menzionato intorno di t' e chiamando $x(t)$ la loro comune espressione si ha che tale $x(t)$ soddisfa l'assegnato sistema lineare ai differenziali totali (2), per le (a), (b), (a'), (b').

Si può così concludere che a mezzo della integrazione della (2) lungo le due poligonali coordinate, ciascuna costituita di due lati, congiungenti t' con t

(e semprechè il rettangolo di vertici opposti t' , t sia contenuto in T), e partendo da una arbitraria condizione iniziale $x(t')$, si perviene coi due distinti cammini d'integrazione ad una medesima valutazione per $x(t)$ e questa inoltre verifica la equazione (2) assegnata. Ciò vale se in T son soddisfatte le condizioni locali (3) d'integrabilità relative alla (2).

Detta allora $C_{(t', t)}$ la poligonale coordinata semplice e chiusa, contorno del dominio rettangolare di vertici opposti t' , t , la x cui si è pervenuti è tale che

$$(C_{(t', t)}) \oint \left\{ G(\tau) + \sum_{k=1}^p x_k(\tau) \cdot \Phi^{(k)}(\tau) \right\} d\tau = 0,$$

e partendo così da l'arbitrario iniziale $x(t')$ si ritorna, dopo aver descritta tale linea chiusa $C_{(t', t)}$, al valore $x(t')$ di partenza.

3. Premessa tale NOTA, si tenga presente che, essendo T semplicemente connesso, se t è un arbitrario punto di T è possibile congiungere $t^{(0)}$ ($< T$) con t a mezzo di poligonali coordinate contenute in T . Considerate due di queste, distinte, poligonali coordinate $L_{(t^{(0)}, t)}^{(1)}$, $L_{(t^{(0)}, t)}^{(2)}$ tali da costituire nel loro insieme una poligonale coordinata chiusa semplice $C_{(t^{(0)}, t)}$ frontiera di un poligono coordinato Π , ovviamente contenuto in T , si suddivida Π in rettangoli $R_{h, k}$. Operando lungo il contorno di quello tra tali rettangoli che ha $t^{(0)}$ come uno dei quattro vertici (e ponendo $x(t^{(0)}) = x^{(0)}$) come si è visto nella NOTA si perviene alla definizione di x lungo tutto tale contorno e in particolare al valore di x nel vertice $t^{(1)}$, opposto a $t^{(0)}$. In possesso di tale valore si proceda lungo il contorno dei rettangoli aventi $t^{(1)}$ come vertice nel modo precisato nella NOTA, e così via. Si perviene così alla definizione di x lungo tutta la rete costituita dalla somma delle frontiere di tutti gli $R_{h, k}$ ed è chiaro che comunque ci si muova lungo tale rete con continuità si ritorna al punto di partenza col valore x da cui si è partiti inizialmente e ciò in forza del valore zero pel solito integrale curvilineo esteso al contorno di ciascun $R_{h, k}$. Infatti, eseguendo tali integrazioni per tutti gli $R_{h, k}$ e sommando, in modo opportuno ben evidente, si che le integrazioni lungo i lati interni a Π si elidano due a due, risulta che

$$(C_{(t^{(0)}, t)}) \oint \left\{ G(\tau) + \sum_{k=1}^p x_k(\tau) \Phi^{(k)}(\tau) \right\} d\tau = 0,$$

e quindi

$$\begin{aligned} (L_{(t^{(0)}, t)}^{(1)}) \int_{t^{(0)}}^t \left\{ G(\tau) + \sum_{k=1}^p x_k(\tau) \Phi^{(k)}(\tau) \right\} d\tau &= \\ &= (L_{(t^{(0)}, t)}^{(2)}) \int_{t^{(0)}}^t \left\{ G(\tau) + \sum_{k=1}^p x_k(\tau) \Phi^{(k)}(\tau) \right\} d\tau, \end{aligned}$$

e ciò, coi rilievi già indicati nella NOTA, che si possono ripetere ora nel caso più generale in esame, permette di affermare l'asserto del teorema.

Scienza delle costruzioni. — Instabilità laterale di travi inflesse e compresse. Nota di FRANK DI MAGGIO, ALEXANDER GOMZA, WILLIAM E. THOMAS e MARIO G. SALVADORI, presentata^(*) dal Socio M. PICONE.

L'energia elastica totale di una trave a doppio T pressoflessa lateralmente per effetto di carichi normali e di forze di compressione assiale è data da ^(1, 2, 3):

$$(1) \quad V = \frac{B}{2} \int_0^l (u'')^2 dz + \frac{Dh^2}{4} \int_0^l (\beta'')^2 dz + \frac{H}{2} \int_0^l (\beta')^2 dz + \\ + \int_0^l M\beta u'' dz - \frac{P}{2} \int_0^l (u')^2 dz,$$

in cui:

- B = minima rigidezza flessionale della trave,
- u = spostamento laterale della trave nel piano della rigidezza minima,
- l = lunghezza della trave,
- D = rigidezza flessionale di un'ala nel suo piano,
- h = altezza della trave,
- β = rotazione della sezione di ascissa z ,
- $H = C - PI_p/A$ = rigidezza torsionale equivalente della trave compressa,
- C = rigidezza torsionale della trave,
- P = forza di compressione distribuita uniformemente sulla sezione della trave,
- I_p = momento d'inerzia polare della sezione della trave,
- A = area della sezione della trave,
- M = momento flettente dovuto ai carichi normali nel piano di massima rigidezza della trave nella sezione di ascissa z ,
- z = ascissa misurata lungo l'asse della trave a partire da uno degli estremi.

(*) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) J. N. GOODIER, *Flexural-Torsional Buckling of Bars of Open Section*. «Bull.», No. 28, Cornell University Eng. Exp. Stat., genn. 1942.

(2) F. BLEICH, *The Buckling Strength of Metal Structures*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.

(3) S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1936.

I casi considerati in questa Nota sono fra quelli per i quali il diagramma dei momenti flettenti è lineare con valori M_2 all'estremo $z = l$ ed $M_1 = rM_2$ all'estremo $z = 0$:

$$(2) \quad M(z) = M_2 [r + (1 - r) z/l].$$

a) *Trave a doppio T semplicemente appoggiata, caricata da due momenti flettenti disuguali agli estremi* ⁽⁴⁾.

Le sezioni terminali di una trave « semplicemente appoggiata » sono libere di ruotare intorno ai loro assi principali d'inerzia, ma non possono ruotare intorno all'asse longitudinale della trave. Le condizioni ai limiti per le funzioni u e β sono quindi date in questo caso da:

$$(3) \quad \begin{cases} u(0) = u''(0) = u(l) = u''(l) = 0 \\ \beta(0) = \beta''(0) = \beta(l) = \beta''(l) = 0 \end{cases}$$

e le u e β possono svilupparsi in serie di seni:

$$(4) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \quad ; \quad \beta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \quad (x = z/l).$$

Se le forze assiali P sono nulle, la rigidezza torsionale equivalente H si riduce alla rigidezza torsionale C ed inoltre l'ultimo termine della (1) si riduce a zero. Il metodo di Rayleigh-Ritz applicato al funzionale (1) con $P = 0$, prendendo in considerazione un numero crescente di termini delle serie (4), dà i risultati della Tabella I. I valori critici del parametro:

$$(5) \quad K = \frac{M_2 l}{\sqrt{BC}}$$

in funzione del parametro:

$$(6) \quad \frac{l^2}{a^2} = \frac{2 l^2 C}{h^2 D}$$

sono stati calcolati per $r = 1, 1/2, 0, -1/2, -1$ mediante 1, 2, 2, 3 e 4 termini delle serie, rispettivamente. I valori di K corrispondenti a $l^2/a^2 = \infty$ (trave a sezione rettangolare) hanno errori inferiori all'1% rispetto ai valori esatti calcolati mediante funzioni di Bessel ⁽⁵⁾ e riportati nella Tabella I. Poichè per $l^2/a^2 = \infty$ l'ultimo termine delle serie preso in considerazione introduce una variazione percentuale minima nel valore di K , si può ritenere che i valori della Tabella I corrispondenti ad $r = 1, 1/2, 0, -1/2, -1$

(4) W. E. THOMAS, *Lateral Buckling of I Beams under Unequal End Moments*. Tesi No. 629, Dept. of Civil Engineering, Columbia University, maggio 1951.

(5) M. G. SALVADORI, *Lateral Buckling of Beams of Rectangular Cross-Section under Bending and Shear*. « Proc. First U. S. Congress of Applied Mechanics », Chicago, giugno 1951.

abbiano errori inferiori all'1 %. I rimanenti valori di K della Tabella I sono stati ottenuti mediante interpolazione parabolica⁽⁶⁾ ed hanno errori dell'ordine del 2 % per $l^2/a^2 = \infty$. Si può quindi ritenere che errori d'interpolazione dello stesso ordine di grandezza siano presenti negli altri valori di K .

TABELLA I.

Valori di $K = \frac{M_2 l}{\sqrt{BC}}$ in funzione di $\frac{l^2}{a^2} = \frac{2 l^2 C}{h^2 D}$ ed $r = \frac{M_1}{M_2}$

r	$\frac{l^2}{a^2}$	0,1	1,0	2,0	6,0	10	16	24	32	40	100	∞
1,0		31,40	10,36	7,66	5,11	4,43	4,00	3,73	3,59	3,51	3,29	3,14
0,9		33,80	11,16	8,25	5,50	4,76	4,29	4,00	3,84	3,75	3,50	3,31
0,8		35,75	11,81	8,73	5,82	5,03	4,54	4,23	4,06	3,97	3,70	3,48
0,7		37,53	12,40	9,16	6,11	5,28	4,77	4,44	4,27	4,17	3,89	3,68
0,6		39,35	13,01	9,61	6,41	5,55	5,01	4,67	4,49	4,38	4,10	3,89
0,5		41,40	13,68	10,11	6,75	5,84	5,27	4,92	4,73	4,62	4,33	4,12
0,4		43,82	14,47	10,70	7,14	6,18	5,58	5,21	5,01	4,89	4,59	4,37
0,3		46,69	15,41	11,39	7,60	6,58	5,93	5,54	5,33	5,20	4,87	4,64
0,2		50,07	16,52	12,21	8,14	7,04	6,34	5,92	5,69	5,55	5,20	4,93
0,1		53,95	17,79	13,14	8,75	7,57	6,81	6,35	6,10	5,95	5,55	5,24
0		58,30	19,22	14,19	9,44	8,16	7,33	6,83	6,55	6,38	5,94	5,56
-0,1		63,02	20,77	15,33	10,18	8,80	7,89	7,34	7,03	6,84	6,35	5,90
-0,2		67,99	22,40	16,52	10,97	9,46	8,47	7,88	7,54	7,33	6,77	6,25
-0,3		73,03	24,06	17,74	11,76	10,14	9,07	8,41	8,04	7,82	7,20	6,61
-0,4		77,92	25,67	18,92	12,53	10,80	9,65	8,94	8,54	8,30	7,61	6,97
-0,5		82,39	27,14	20,00	13,24	11,40	10,18	9,42	9,00	8,74	8,00	7,32
-0,6		86,13	28,38	20,91	13,84	11,91	10,64	9,83	9,46	9,12	8,34	7,66
-0,7		88,79	29,26	21,56	14,27	12,29	10,98	10,13	9,70	9,42	8,61	7,96
-0,8		89,97	29,66	21,86	14,48	12,48	11,16	10,30	9,88	9,59	8,78	8,19
-0,9		89,23	29,42	21,71	14,40	12,43	11,13	10,27	9,89	9,61	8,83	8,25
-1,0		86,07	28,40	20,98	13,95	12,07	10,85	10,01	9,69	9,43	8,72	8,03

(6) I valori interpolati sono stati calcolati dal dott. Tom F. H. T. Liu, che è stato all'uopo sovvenzionato dal Dipartimento di Stato degli Stati Uniti d'America.

b) *Trave a sezione rettangolare, semplicemente appoggiata, caricata da momenti flettenti disuguali alle estremità e da forze di compressione* ⁽⁷⁾.

L'energia elastica totale per questo tipo di trave si ottiene ponendo $D = 0$ nella (1). Le condizioni ai limiti per le funzioni u e β sono date in questo caso da:

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} u(0) &= u(l) = u''(0) = u''(l) = 0 \\ \beta(0) &= \beta(l) = 0 \end{aligned} \right\}$$

e le u e β possono svilupparsi in serie di seni.

La Tabella II contiene i valori critici del parametro:

$$(8) \quad K = \frac{M_2 l}{\sqrt{BH}}$$

in funzione del parametro:

$$(9) \quad \phi = \frac{P}{P_e} = \frac{P l^2}{\pi^2 B}$$

per $r = 1, 1/2, 0, -1/2, -1$, calcolati mediante il metodo di Rayleigh-Ritz prendendo in considerazione 1, 2, 2, 3 e 4 termini della serie. Gli altri valori di K della Tabella II sono stati ottenuti mediante interpolazione parabolica ⁽⁶⁾. I valori di K per $\phi = 0$ presentano errori inferiori all'1% rispetto ai valori esatti, calcolati mediante funzioni di Bessel ⁽⁵⁾ e riportati nella Tabella II. Poichè il valore di K per $\phi = 1$ è zero per qualunque valore di r e poichè l'ultimo termine delle serie preso in considerazione introduce una variazione percentuale minima nei valori di K , si può ritenere che i valori di K calcolati mediante il metodo di Rayleigh-Ritz siano affetti da errori dell'ordine dell'1%, mentre i valori interpolati sono affetti da errori dell'ordine del 2%, come dimostra il caso $\phi = 0$, per il quale si conoscono i valori esatti valutati mediante funzioni di Bessel ⁽⁵⁾.

È interessante notare che la curva dei K in funzione di ϕ corrispondente ad $r = -1$ presenta una discontinuità nella tangente per $\phi = 0,76$, il che sta ad indicare un cambiamento nella configurazione d'equilibrio per questo valore del parametro.

Tabelle di carattere più generale per la pressoflessione laterale di travi a doppio T inflesse e compresse sono in corso di calcolo presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, che ha ottenuto una speciale sovvenzione dal Column Research Council degli Stati Uniti d'America acciocchè questo studio di carattere pratico sia portato a compimento sotto la direzione del Prof. Mario Salvadori della Columbia University di New York.

(7) F. DI MAGGIO, *Lateral Buckling of Narrow Rectangular Beams under Bending, Shear and Compression*. Tesi No. 636, Dept. of Civil Engineering, Columbia University, maggio, 1951.

TABELLA II.

Valori di $K = \frac{M_2 l}{\sqrt{BH}}$ in funzione di $\phi = \frac{Pl^2}{\pi^2 B}$ ed $r = \frac{M_1}{M_2}$

$\phi \backslash r$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	3,14	2,81	2,43	1,99	1,40	0
0,9	3,31	2,99	2,60	2,13	1,49	0
0,8	3,48	3,16	2,75	2,25	1,58	0
0,7	3,68	3,33	2,89	2,37	1,66	0
0,6	3,89	3,51	3,04	2,49	1,76	0
0,5	4,12	3,70	3,21	2,63	1,86	0
0,4	4,37	3,92	3,40	2,79	1,98	0
0,3	4,64	4,16	3,62	2,97	2,12	0
0,2	4,93	4,44	3,88	3,19	2,28	0
0,1	5,24	4,75	4,16	3,44	2,48	0
0	5,56	5,08	4,48	3,73	2,70	0
-0,1	5,90	5,44	4,83	4,05	2,96	0
-0,2	6,25	5,81	5,20	4,40	3,25	0
-0,3	6,61	6,19	5,58	4,78	3,57	0
-0,4	6,97	6,56	5,97	5,18	3,94	0
-0,5	7,32	6,92	6,36	5,59	4,34	0
-0,6	7,66	7,25	6,73	6,00	4,78	0
-0,7	7,96	7,52	7,06	6,41	5,26	0
-0,8	8,19	7,73	7,34	6,80	5,77	0
-0,9	8,25	7,85	7,54	7,14	6,31	0
-1,0	8,03	7,85	7,65	7,44	6,89	0

c) *Trave a sbalzo di sezione rettangolare caricata mediante sforzi di compressione e taglio all'estremità libera* ⁽⁸⁾.

(8) A. GOMZA, *Lateral Buckling of a Cantilever Beam with Transverse and Axial Loads at the Free End*. Tesi No. 561, Dept. of Civil Engineering, Columbia University, maggio 1948.

TABELLA III.

Valori di $q = \frac{Ql^2}{4,013 \sqrt{BH}}$ in funzione di $p = \frac{4Pl^2}{\pi^2 B}$

p	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0	-0,2	-0,4	-1,0
q	0	0,4776	0,6623	0,7984	0,9078	1,0000	1,0782	1,1503	1,3227

In questo caso, indicando mediante $z = 0$ la sezione terminale libera e mediante Q lo sforzo di taglio applicato al baricentro di detta sezione, la (2) dà:

$$(10) \quad M(z) = Qz = M_z z/l.$$

Quindi la (1) in cui si ponga $D = 0$ dà l'energia totale elastica della trave, purché si ponga $r = 0$ nella (2).

Il calcolo delle variazioni permette di ricavare facilmente dalla (1) le equazioni differenziali e le condizioni ai limiti soddisfatte dalla u e dalla β :

$$(11) \quad \begin{cases} Bu^{IV} + Pu'' + (M\beta)'' = 0 \\ Mu'' - H\beta'' = 0 \end{cases}$$

e:

$$(12) \quad \begin{cases} u(l) = u'(l) = u''(0) = Bu'''(0) + Pu'(0) + Q\beta(0) = 0 \\ \beta(l) = \beta'(0) = 0. \end{cases}$$

I valori critici del parametro:

$$(13) \quad q = \frac{Q}{Q_{cr}} = \frac{Ql^2}{4,013 \sqrt{BH}}$$

in funzione del parametro:

$$(14) \quad p = \frac{P}{P_e} = \frac{4Pl^2}{\pi^2 B}$$

riportati nella Tabella III sono stati valutati mediante eliminazione della β e mediante sviluppo della u in serie di potenze. La curva delle q in funzione delle p può approssimarsi, con un errore inferiore al 2%, mediante la parabola:

$$(15) \quad p^{2,25} + q = 1.$$

Geometria. — *Le involuzioni ∞^d dello S_h e le loro proiezioni.*

Nota di MARIO BALDASSARRI, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

B. Segre ha, di recente, definite le involuzioni $I_{n,h}^d$ di dimensione d ed ordine n di uno S_h , aprendo così un nuovo ed ampio campo di ricerche (1). Egli stesso ha fatto vedere, con svariati esempi, che già le $I_{n,2}^d$ presentano aspetti assai diversi — quando sia $d > 2$ — dal caso usuale $d = 2$.

Qui, nell'intento di approfondire alcune fra le relazioni che intercedono fra le $I_{n,h}^d$ che abbiano ugual ordine e dimensione, mi propongo di studiare l'insieme I' dei gruppi che si ottengono proiettando da un punto generico dello S_h i gruppi di una data $I_{n,h}^d$ su di un S'_{h-1} . Mostrerò che, se $2 < h \leq d < 2h - 2$, l'insieme I' risulta, salvo una ben definita eccezione, una $I_{n,h-1}^d$ dello S'_{h-1} semplice (Teoremi 1, 2).

Il processo suddetto, se iterato, consente generalmente di proiettare una $I_{n,h}^d$ su di un $S'_{\delta+1}$ dove $\delta = [d/2]$, in modo che l'insieme dei gruppi $G'_{n,\delta+1}$ proiezione di quelli, $G_{n,h}$, della $I_{n,h}^d$ risulti una $I_{n,\delta+1}^d$: la corrispondenza che così si stabilisce fra i gruppi $G_{n,h}$ ed i $G'_{n,\delta+1}$ risulta birazionale (Teorema 3).

Ciò porge una rappresentazione analitica delle $I_{n,h}^d$, che si può chiamare monoidale, date le analogie ch'essa presenta con quella ben nota — di Cayley-Halphen — per le varietà: nel n. 6 ne dò un breve cenno, nel caso particolarmente notevole in cui sia $h = d$ dispari.

Il lavoro termina con la definizione di spazio S_H normale per una $I_{n,h}^d$: sul difficile problema di caratterizzare per dati d, n il valore H ($H \leq d$), esporrò altrove qualche osservazione preliminare.

1. È opportuno ricordare la definizione per induzione, data da B. Segre (2), delle involuzioni $I_{n,h}^d$, di dimensione d ed ordine n , in uno S_h .

Una $I_{n,h}^0$ è un gruppo non ordinato di n punti, distinti o coincidenti, dello S_h , e l'indicheremo anche con $G_{n,h}$; una $I_{n,h}^d$, se $d < h$, è una serie algebrica involutoria ∞^d su di una varietà a d dimensioni (irriducibile o no) dello S_h ; una $I_{n,h}^d$, se $d \geq h$, è infine un insieme algebrico puro ∞^d di $G_{n,h}$, tale che i resti di un generico punto P dello S_h rispetto ai $G_{n,h}$ che lo contengono costituiscano una $I_{n-1,h}^{d-h}$. Con ciò non si esclude che esista una certa varietà di S_h , generalmente impura, tale che i residui dei suoi punti siano più che ∞^{d-h} , e questi punti si diranno *fondamentali* per la $I_{n,h}^d$.

(*) Nella seduta del 10 maggio 1952.

(1) In una comunicazione al III Congresso dell'U.M.I. (« Atti », p. 124 (1951)) pubblicata in extenso nel « Bollettino dell'U.M.I. », III, 3, 196-200 (1948).

(2) Cfr. nota cit. in (1). Ivi la definizione è esposta per $h = 2$, ma, come l'Autore avverte, essa si trasporta subito al caso $h > 2$ secondo quanto è qui scritto.

Se s è tale che $0 \leq d - hs < h$, si potranno considerare i residui di un generico gruppo di s punti dello S_h , i quali - com'è subito visto - formano una $I_{n-s, h}^{d-hs}$. Quando questa risulti una serie razionale, e quindi una serie d'equivalenza ⁽³⁾, sulla V_{d-hs} da essa descritta, la $I_{n, h}^d$ si dirà un'involuzione *in senso stretto*.

Si noti che se $d = lh$, con l intero, la $I_{n, h}^d$ è sempre un'involuzione in senso stretto, perchè la $I_{n-l, h}^{d-hl}$ residua è allora un gruppo di punti.

2. Indicheremo con f la corrispondenza simmetrica associata ad una $I_{n, h}^d$, e quindi con $f(V)$ la varietà dei residui dei $G_{n, h}$ che contengano almeno un punto P della varietà V , presi rispetto a P .

Se P è un generico punto di S_h , la varietà $f(P)$, a $d-h$ dimensioni, descrive, al variare di P su di una retta generica r , la varietà $f(r)$, a $d-h+1$ dimensioni: non è infatti possibile che a due punti qualunque di r corrisponda in f la stessa varietà, poichè altrimenti, attesa la genericità di r , la $f(P)$ risulterebbe costante al variare di P in S_h , e ciò è assurdo.

Le $\infty^1 f(P)$ - con P su r - descrivono su $f(r)$ un fascio lineare, perchè il loro sistema è razionale e d'indice uno. Infatti, se A e B sono due punti distinti e generici di S_h , le varietà $f(A)$ ed $f(B)$ s'intersecano secondo una varietà che è in corrispondenza birazionale col sistema delle $f(P)$ passanti per A e B , stante l'involutorietà di f . Ma tal sistema o è vuoto o ha dimensione $2d-3h \geq 0$, e quindi l'insieme di quelle varietà intersezioni, quando A e B sono scelti comunque su r , ha al più dimensione $2d-3h+2$, inferiore dunque a $d-h+1$, perchè per ipotesi $d < 2h-2$. Tanto basta per dire che un punto generico della $f(r)$ non può esser contenuto nell'intersezione di due $f(P)$ - se P appartiene ad r - e che quindi il sistema di queste ha indice uno.

Da ciò risulta che l'insieme dei $G_{n-1, h}$ residui dei $G_{n, h}$ che hanno un punto su r , è una $I_{n-1, h}^{d-h+1}$: infatti per un punto della $f(r)$ passa una sola $f(P)$ - se P è su r - e, su questa, per quel punto, un solo $G_{n-1, h}$ residuo rispetto a P ⁽⁴⁾.

3. Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 1. - Una $I_{n, h}^d$ con $2 < h \leq d < 2h-2$ si proietta su di un S_{h-1} , da un generico punto dello S_h che la contiene, in un sistema algebrico puro Γ' di $G'_{n, h-1}$: se $n > 2$, la corrispondenza fra i $G_{n, h}$ di $I_{n, h}^d$ ed i $G'_{n, h-1}$

(3) Cfr. F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, vol. I (a cura di Conforto e Martinelli), Roma, p. 112 (1942). La proprietà è ancora vera se V_{d-hs} è riducibile perchè pura (ivi, p. 118).

(4) Convieni osservare che la generica $f(P)$ può provenire da più punti P dello S_h , i quali formerebbero allora una $I_{v, h}^h$ dello S_h . Ma per l'involutorietà di f i $G_{n, h}$ dovrebbero esser composti con questi $G_{v, h}$. Analogamente potrebbe dirsi se la generica $f(P)$ provenisse addirittura dai punti d'una V_l . In tal caso la $I_{n, h}^d$ risulterebbe composta con una $I_{v, h}^{h-l}$ con $l \leq d-h$. Noi escluderemo sempre che la $I_{n, h}^d$ sia di siffatto tipo composto.

riesce biunivoca, e Γ' è una $I_{n, h-1}^d$ sullo S'_{h-1} convenientemente multiplo o semplice, secondo che la varietà V_{d-h+1} luogo dei residui dei $G_{n, h}$ rispetto ai punti di una retta r generica dello S_h , ammette o non ammette ∞^{d-h} piani per r che la seghino lungo curve.

Si proietti infatti da un generico punto O dello S_h la totalità dei gruppi $G_{n, h}$ della $I_{n, h}^d$ su di un S'_{h-1} , e si dica Γ' il sistema dei $G'_{n, h-1}$ proiezioni: quest'insieme risulterà certo algebrico e puro.

Si supponga ora che fra Γ' e la $I_{n, h}^d$ interceda una corrispondenza Ω non biunivoca. Vorrà dire che un $G'_{n, h-1}$ proviene da più d'un $G_{n, h}$. D'altra parte i $G'_{n, h-1}$ che hanno un punto in un certo P' di S'_{h-1} provengono dai $G_{n, h}$ che contengono un punto P della retta $r \equiv OP'$; e poichè questi $G_{n, h}$ si muovono sulla $f(r)$, questa dovrà proiettarsi multiplamente da O sullo S'_{h-1} . Ciò, per di più, dovrà valere per un generico centro di proiezione su r - altrimenti il teorema I sarebbe subito vero - cosicchè la $f(r)$, se Ω non è biunivoca, ammette tutta la retta r come luogo di centri di proiezione multipla.

Se allora si applica a tal caso un notevole teorema di B. Segre⁽⁵⁾, si può senz'altro concludere che la generica $f(r)$ dev'esser tagliata dai piani per la retta r , che l'incontrino, lungo curve λ .

Anche se ciò accade la Ω resta tuttavia biunivoca quando O è scelto genericamente su r , a meno che la $I_{n-1, h}^{d-h+1}$ sulla $f(r)$ non sia trasformata in in se stessa dalle ∞^1 corrispondenze simmetriche associate alle serie involutorie γ_v^{d-h+1} segate sulla $f(r)$ dalle rette uscenti da un punto P di r e giacenti sui piani delle curve λ : ma ciò implica che un $G_{n-1, h}$ di $f(r)$ stia su almeno due rette e quindi si riduca ad un punto, ossia $n = 2$.

Dunque, per $n > 2$, Ω è biunivoca ed inoltre il sistema Γ' risulta una $I_{n, h-1}^d$ sullo S'_{h-1} semplice se i piani per r secanti $f(r)$ non la tagliano lungo curve: ciò perchè i resti di un punto P' variano sulla $f'(r)$, la quale è, in tal caso, la proiezione semplice della $f(r)$, e vi descrivono sopra, per un'osservazione del n. 2, una $I_{n-1, h-1}^{d-h+1}$, proiezione della $I_{n-1, h}^{d-h+1}$ che è su $f(r)$.

Se, invece, i piani per r secanti la $f(r)$ la tagliano lungo curve, il sistema Γ' risulta ancora una $I_{n, h-1}^d$, solo se lo S'_{h-1} si pensa convenientemente multiplo.

(5) Il teorema invocato è il seguente:

Se esistono punti da ciascuno dei quali una data V_k algebrica irriducibile di S_n si proietti almeno doppiamente, essi costituiscono un numero finito di spazi lineari (di dimensioni non necessariamente uguali). La dimensione l (≥ 0) di uno, S_l , qualsiasi di tali spazi è sempre $\neq k$ e non supera $k+1$, raggiungendo questo valore solo se V_k appartiene ad uno S_{k+1} (che allora coincide con S_l); se - invece - è $l < k$, V_k risulta luogo di $\infty^{k-1} V_l$ che appartengono a spazi di dimensione $l+1$ passanti per quell' S_l .

Cfr. B. SEGRE, *On the locus of points from which an algebraic variety is projected multiply*. «Proceedings of the Phys.-Math. Soc. of Japan», III, 18, 425 (1936); ed anche B. SEGRE, *Sul luogo dei punti da cui una data varietà algebrica iperspaziale è proiettata multiplamente*. «Atti 1° Congresso dell'U.M.I.», p. 264 (1938).

4. È facile vedere, su esempi, che i casi contemplati nel teorema 1 sono effettivamente possibili.

Si pensi dapprima ad una $I_{n,h}^h$ con una stella di rette unite in f . Se U è il centro della stella ed O un qualsiasi punto distinto da U dello S_h , il piano (rU) , dove r indica una qualsiasi retta per O , risulta unito in f ed $f(r)$ è una curva λ di quel piano, sulla quale i residui dei punti di r descrivono una serie lineare. Si ottengono appunto i due casi d'eccezione segnalati nel teorema 1, a seconda che $n > 2$ o $n = 2$.

Siffatto tipo d'involuzione si generalizza subito ad una $I_{n,h}^d$ con $h \neq d$. Si assuma perciò una $I_{n,h}^d$ che abbia uniti in f tutti gli S_{d-h+1} passanti per un certo S_{d-h} : essa risulta, evidentemente, luogo di $\infty^{2h-d-1} \cdot \Gamma_{n,d-h+1}^{2d-2h+1}$, ciascuna restando assegnata dentro uno degli S_{d-h+1} uniti. È chiaro che tali $I_{n,h}^d$ esistono e che per esse la $f(r)$ giace nello S_{d-h+2} che congiunge r col centro S_{d-h} della stella di spazi uniti, cosicchè è qui sempre soddisfatta la condizione che i piani per r , che incontrino la $f(r)$, la seghino lungo curve.

Interessa rilevare che questo esempio esaurisce il caso d'eccezione messo in evidenza nel teorema 1, in base al seguente:

TEOREMA 2. — *Se $2 < h \leq d < 2h - 2$, una $I_{n,h}^d$ si proietta da un generico punto O su di un S_{h-1} in una $I_{n,h-1}^d$ dello S_{h-1} , semplice, a meno che essa ammetta una S_{d-h} - stella di spazi S_{d-h+1} appartenenti all'involuzione.*

La sufficienza della condizione risulta senz'altro dall'osservazione che precede l'enunciato del teorema.

Per dimostrarne la necessità, basta riprendere le argomentazioni che ci son servite nella dimostrazione del teorema 1. Si è già visto ivi che la $f(r)$, nell'attuale ipotesi, è tagliata lungo curve λ dai piani seganti che contengano r . Ora il fascio lineare delle $f(P)$ — con P su r — sega sulla generica curva λ una serie lineare g_μ^1 , il cui ordine μ (attesa l'irriducibilità dell'insieme delle λ che è in corrispondenza unirazionale con una generica sezione iperpiana della $f(r)$) resta costante al variare della λ : in altre parole si può dire che la generica $f(P)$ — con P su r — è segata dai piani per r , che l'incontrino, secondo un numero costante (o infinito) di punti. Se O è un generico punto di r , ciò sarà anzi vero per ogni sistema di piani secanti $f(o)$ condotti per una generica retta s che passi per O : inoltre la conservazione dell'ordine μ varrà (sempre a meno che divenga infinito) anche per la totalità dei piani per O seganti $f(o)$. Infatti un sistema d'asse s ed il sistema d'asse r possono sempre esser connessi da una catena d'un numero finito di sistemi aventi a due a due un piano in comune, come subito si vede. In definitiva si conclude che, se O è generico, la $f(o)$ è tagliata dai piani secanti per O secondo un numero costante (od infinito) di punti.

Si proietti allora da O la $f(o)$ su di un S_{h-1} che non la contenga: si otterrà qui una V_{d-h} che dovrà essere segata da ogni retta incidente dello S_{h-1} in un numero costante di punti, e ciò implica che la V_{d-h} sia una forma dello S_{h-1} , ovvero uno S'_{d-h} , magari multiplo. La prima ipotesi è inaccettabile perchè se no sarebbe $d-h = h-2$, mentre, per ipotesi, $d < 2h-2$: non resta dunque che supporre che la $f(o)$ si proietti da O su

di un S_{h-1} , in uno spazio S'_{d-h} , semplice o multiplo. Ma ciò porta che O e la $f(O)$ giacciono in uno stesso S_{d-h+1} , quello appunto che congiunge O con lo S'_{d-h} .

Si può dunque affermare che un generico punto O dello S_h e la $f(O)$, descritta dai residui rispetto ad O , giacciono in uno stesso S_{d-h+1} . Si vede subito che questo S_{d-h+1} risulta unito in f . Infatti, preso un suo punto A diverso da O , la $f(A)$ dev'esser incontrata dai piani per A , giacenti nello S_{d-h+1} , secondo gruppi di punti e tanto basta per descrivere tutta la $f(A)$ che perciò giace nello S_{d-h+1} .

Il sistema di S_{d-h+1} uniti così trovato ha inoltre indice uno. Infatti, se per un punto P generico dello S_h ne passassero almeno due distinti, la $f(P)$ dovrebbe giacere sull'intersezione di questi, che sarebbe al più uno S_{d-h} ed unito. Quindi la $f(P)$ stessa dovrebbe essere uno S_{d-h} unito in f , e ciò è assurdo perchè $f(P)$ proverrebbe da tutti i suoi ∞^{d-h} punti ⁽⁶⁾: ciò anzi dimostra che, se due generici S_{d-h+1} uniti s'incontrano in uno S'_{d-h} , questo dev'esser luogo di punti fondamentali per la $I_{n,h}^d$.

Ogni S_{d-h+2} contenente uno di quegli S_{d-h+1} risulta pure - come si vede subito - unito, e pertanto contiene un fascio, di centro un certo S_{d-h} , di S_{d-h+1} , uniti; e, se si fa variare lo S_{d-h+2} intorno al prescelto S_{d-h+1} , lo S_{d-h} centro non può variare, altrimenti lo S_{d-h+1} , sarebbe luogo di punti fondamentali ⁽⁷⁾, e questo per uno S_{d-h+1} generico è da escludersi. Si generano dunque in tal modo ∞^{2h-d-1} S_{d-h+1} uniti, che esauriscono completamente il nostro sistema, in quanto esso ha proprio quella dimensione ed inoltre, essendo d'indice uno sui punti di S_h , è irriducibile. Tanto basta per dire che la $I_{n,h}^d$ ammette, come spazi uniti nella f , tutti gli S_{d-h+1} passanti per un certo S_{d-h} , che risulta luogo di punti fondamentali per l'involuzione.

5. Applicando successivamente il teorema 2, si può, con successive proiezioni da punti (ossia, globalmente, da un opportuno spazio $S_m, m \geq 0$), proiettare la $I_{n,h}^d$ in una $I_{n,h'}^d$, sinchè sia $2 \leq h' \leq d < 2h'$: il procedimento dunque termina quando sia $h' = \delta + 1$, con $\delta = [d/2]$. Naturalmente per la successiva applicabilità del teorema occorre supporre che la $I_{n,h}^d$ non ammetta come spazi uniti in f tutti gli S_l che passano per uno S_{l-1} , con $d-h' \geq l > d-h$. È chiaro quindi che le $I_{n,\delta+1}^d$ svolgono in certo modo l'ufficio di forme nella classe delle $I_{n,h}^d$ di data dimensione e dato ordine: infatti la loro proiezione da un punto O ricopre uno S'_δ multiplo, comunque si scelga O e lo S'_δ , nello $S_{\delta+1}$ della $I_{n,\delta+1}^d$. Tali osservazioni possono venir raccolte nel

TEOREMA 3. - Una $I_{n,h}^d$, che non ammetta una S_{l-1} - stella di spazi S_l uniti, con $d-\delta > l > d-h$, si proietta da un generico spazio $S_{h-\delta-2}$ in una $I_{n,\delta+1}^d$ di un $S'_{\delta+1}$ semplice, se $2 < h \leq d < 2h-2$ e $d = [d/2]$.

(6) Ciò è stato infatti escluso nella nota (4).

(7) Come segue dall'osservazione al capoverso precedente.

6. Il teorema 3 permette di rappresentare una $I_{n,h}^d$ come trasformata birazionale di una sua generica proiezione $I_{n,\delta+1}^d$ su di un $S'_{\delta+1}$ semplice, secondo un metodo analogo a quello, ben noto, di Cayley-Halphen per una V_k , detto della rappresentazione monoidale⁽⁸⁾. Vogliamo qui aggiungere qualche dettaglio nel caso – particolarmente significativo – d'una $I_{n,d}^d$ con d dispari, supposta sprovvista d'una S_{l-1} – stella di spazi S_l uniti per $0 < l < \delta + 1$, dove $d = 2\delta + 1$.

Si proietti perciò la $I_{n,h}^d$ da un generico $S_{\delta-1}$ su di un $S'_{\delta+1}$. Si trova qui – pel teorema 3 – una $I_{n,\delta+1}^d$ sullo $S'_{\delta+1}$, semplice, e pertanto vi sarà corrispondenza birazionale fra i $G_{n,d}$ della $I_{n,d}^d$ ed i $G'_{n,\delta+1}$ della proiezione $I_{n,\delta+1}^d$. Inoltre la $I_{n,\delta+1}^d$ risulta un'involuzione in senso stretto (cfr. n. 1), perchè la $I_{n-\delta-\frac{(\delta+1)}{2},\delta+1}^d$, luogo dei residui dei $G'_{n,\delta+1}$ rispetto ad un punto dello $S'_{\delta+1}$, risulta birazionalmente equivalente ad un S_δ e quindi è birazionale.

Introduciamo nello S_d un sistema di coordinate affini non omogenee (x_1, x_2, \dots, x_d) tale che lo spazio improprio dello S_δ di equazioni $x_1 = \dots = x_{\delta+1} = 0$ sia lo spazio centro di proiezione, e lo $S'_{\delta+1}$ su cui si proietta sia lo spazio fondamentale opposto. Indichiamo con (x) ed (x') le coordinate di due punti P e Q appartenenti ad uno stesso $G_{n,d}$.

Il luogo dei residui dei $G'_{n,\delta+1}$ rispetto ad un punto Q' dello $S'_{\delta+1}$ $[x'_1, x'_2, \dots, x'_{\delta+1}]$ è una forma dello $S'_{\delta+1}$, rappresentabile quindi con una equazione nelle $(x_1, x_2, \dots, x_{\delta+1})$ coi coefficienti funzioni razionali e – se si vuole – intere di $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{\delta+1})$, del tipo:

$$(1) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_{\delta+1}; x'_1, x'_2, \dots, x'_{\delta+1}) = 0,$$

avvertendo che il polinomio F dovrà essere simmetrico od alternante nelle due serie di variabili (x) ed (x') , stante l'involutorietà della $I_{n,\delta+1}^d$.

Ciascuna x'_l con $l > \delta + 1$ risulta poi una funzione biunivoca ed algebrica del punto P' variabile sulla forma $F=0$: e ciò perchè P', scelto su $F=0$, individua un $G'_{n-1,\delta+1}$, residuo di Q', e questo residuo individua a sua volta – per il teorema 3 – uno ed un solo $G_{n-1,d}$ che proverrà infine da un solo punto Q dello S_d ⁽⁹⁾. Notoriamente⁽¹⁰⁾ le x'_l in discorso possono allora esprimersi come funzioni razionali del punto P' $(x_1, x_2, \dots, x_{\delta+1})$ su $F=0$, ossia con le:

$$(2) \quad \Phi_l(x_1, x_2, \dots, x_{\delta+1}; x'_1, x'_2, \dots, x'_{\delta+1}) + \\ + x'_l \cdot \Psi_l(x_1, x_2, \dots, x_{\delta+1}; x'_1, x'_2, \dots, x'_{\delta+1}) = 0 \quad (l = \delta + 2, \dots, d),$$

dove le Φ_l e Ψ_l sono polinomi nelle variabili indicate.

(8) Cfr. il trattato di F. SEVERI citato in (2), p. 45 e sgg.

(9) Si ricordi che secondo la nota (4) si escludono sempre le $I_{n,d}^d$ composte.

(10) Cfr. ad esempio F. SEVERI, *Trattato di Geometria Algebrica*, Zanichelli, Bologna, p. 4 (1926).

Ma, per la simmetria di comportamento dei punti P e Q (e quindi P' e Q'), dovranno valere insieme alle (1) e (2) le:

$$(3) \quad \Phi_l(x'_1, x'_2, \dots, x'_{\delta+l}; x_1, x_2, \dots, x_{\delta+l}) + \\ + x_l \cdot \Psi_l(x'_1, x'_2, \dots, x'_{\delta+l}; x_1, x_2, \dots, x_{\delta+l}) = 0 \quad (l = \delta + 2, \dots, d),$$

ottenute con lo scambio delle (x) ed (x') nelle (2).

Le (1), (2) e (3) costituiscono assieme esattamente d equazioni, fornenti una rappresentazione analitica della $I_{n,d}^d$ come trasformata razionale di tipo monoidale della $I_{n,\delta+1}^d$. Questa risulta rappresentata indifferentemente dal gruppo delle (1) e (2) o (1) e (3) nelle quali le x'_i - o rispettivamente le x_i - con $l > \delta + 1$, si pensino come parametri: da questi vengono a dipendere i gruppi delle $I_{n-\delta-1,\delta+1}^{d-(\delta+1)}$ luogo dei residui dei $G_{n,\delta+1}$ rispetto ai punti $Q'(x'_1, x'_2, \dots, x'_{\delta+l})$, e queste involuzioni restano qui direttamente rappresentate come serie d'intersezione completa segate dai fasci di forme (2) sulla forma (1).

Senza soffermarci ad approfondire le particolarità della rappresentazione data, sottolineeremo piuttosto una conseguenza algebrica della rappresentazione esposta.

Si supponga perciò di avere un sistema di equazioni simmetriche nelle due serie, di $d = 2\delta + 1$ variabili ciascuna, (x) ed (x') , del tipo:

$$(4) \quad f_i(x_1, x_2, \dots, x_d; x'_1, x'_2, \dots, x'_d) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

il quale per generici valori delle (x') fornisca un numero finito n di soluzioni (x) . Un siffatto sistema rappresenta evidentemente una $I_{n,d}^d$ dello S_d , e quindi, per il teorema 3 e le osservazioni su esposte, si può affermare che: *o esistono certi l punti R_1, R_2, \dots, R_l dello S_d con $0 < l < \delta + 1$, tali che per ogni P' linearmente indipendente dagli R_j , il punto $P \equiv \lambda P' + \sum_{i=1}^l \mu_i R_i$ soddisfaccia alle (4) per opportuni valori dei parametri (λ, μ) , ovvero il sistema (4) può essere sostituito con le (1), (2) e (3).*

7. Vogliamo dare per ultimo una definizione che, dopo le cose dette sinora, si presenta spontaneamente.

Uno spazio S_H - con $H \leq d$ - si dirà normale per una involuzione $I_{n,h}^d$, se esiste una $I_{n,H}^d$ che si proietti, da un S_{H-h-1} dello S_H , nella $I_{n,h}^d$ semplice, senza che esista alcuno spazio $S_{h'}$ con $d \geq h' > H$ per cui accada l'analogo fatto.

Anche la $I_{n,h}^d$ si dirà normale nello S_H . La limitazione imposta $H \leq d$, traduce l'ovvio fatto che una involuzione di dimensione d riempie al più uno S_d .

Considereremo prossimamente il problema - che non sembra facile neppure in casi opportunamente ristretti - di caratterizzare il valore H rispetto al valore d ed n (ed eventualmente di altri caratteri).

Geometria. — *Piani tripli e piani quadrupli con la stessa curva di diramazione.* Nota di CESARINA TIBILETTI, presentata (*) dal Corrisp. O. CHISINI.

1. Fra i problemi riguardanti i piani multipli e le curve di diramazione si presenta particolarmente interessante quello della ricerca dei piani multipli, birazionalmente distinti, che ammettono una stessa curva di diramazione.

Ora, data la treccia caratteristica di una curva, risulta agevole leggersi se e per quali piani multipli la curva stessa è di diramazione e se tali piani multipli siano o meno *unici* (agli effetti dell'identità birazionale).

Avendo costruito le trecce di varie curve, ci è possibile risolvere per esse il problema indicato e ciò confermando risultati noti e conseguendone nuovi.

Fra l'altro, troviamo che la sestica con nove cuspidi è di diramazione, oltre che per un *solo* piano triplo, per tre piani quadrupli birazionalmente distinti.

Si ha così un esempio di piani multipli dello stesso ordine birazionalmente distinti, aventi la stessa curva di diramazione. Questo fatto non contraddice però il teorema di identità birazionale di O. Chisini ⁽¹⁾.

Fra i vari casi trattati, diamo ulteriori esempi di curve di diramazione di piani tripli che possono e di altre che non possono essere di diramazione per piani quadrupli.

Questi fatti ci portano a considerare il problema più generale di piani tripli e piani quadrupli con la stessa curva di diramazione. Dimostriamo che un piano triplo il quale ha la stessa curva di diramazione di un piano quadruplo ne è il risolvente cubico e riusciamo a dare un limite superiore (che può essere, o non, raggiunto) per il numero dei piani quadrupli aventi come curva di diramazione quella, data, di un piano triplo.

Avendo costruito un gruppo di trecce di curve senza flessi, fra esse, incidentalmente, consideriamo la curva dell'ottavo ordine per verificare che è di diramazione per un unico piano, quintuplo.

2. In un recente lavoro ⁽²⁾ abbiamo costruito la treccia caratteristica della sestica con nove cuspidi che riportiamo nella fig. 1 (ove le verticali tratteggiate indicano le divisioni fra i singoli 12 tratti).

(*) Nella seduta del 10 maggio 1952.

(1) Sulla identità birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione. « Rend. Ist. Lomb. », 1943-44.

(2) C. TIBILETTI, Costruzione a priori della sestica con nove cuspidi. « Rend. Ist. Lomb. », 1952.

Si sa che tale sestica è curva di diramazione per un piano triplo e un piano quadruplo⁽³⁾: esaminiamo ora questo fatto sulla treccia in base alle condizioni di invarianza di Enriques⁽⁴⁾.

Vediamo però prima come queste condizioni si traducano sulla treccia.

Sia una curva φ di cui abbiamo la treccia T_φ : sul piano π_x (della variabile complessa x) sia O l'origine del sistema fondamentale di cappi costruttore della T_φ . Siano y_1, y_2, \dots, y_r le determinazioni su π_y della $y(x)$ definita dalla φ , corrispondenti all'origine O .

Consideriamo su π_y un insieme di cappi rettilinei $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ verticali provenienti dal punto all'infinito dell'asse immaginario dalla parte, per così dire, negativa dell'asse stesso, che avvolgono y_1, y_2, \dots, y_r e associamo a

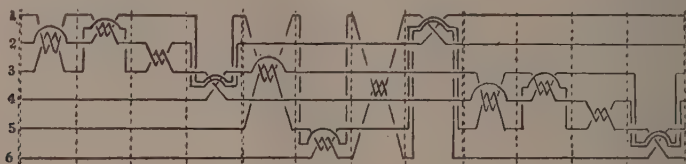


Fig. 1.

tali cappi $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ delle sostituzioni su n elementi che possiamo pensare determinazioni di una certa funzione $u(y)$ (per cui i punti y_1, y_2, \dots, y_r risultano i punti di diramazione).

Come è ben noto, il prodotto di queste sostituzioni relative a tutti i cappi (considerati ordinatamente) deve essere uguale all'identità.

Facciamo poi percorrere ad x il sistema fondamentale di cappi su π_x (che dà la treccia T_φ): le corrispondenti determinazioni y_1, y_2, \dots, y_r subiscono delle variazioni: precisamente quando un filo della treccia passa sopra ad un altro filo la sostituzione del cappio legato al primo filo risulta la propria trasformata mediante quella legata al secondo filo.

Un certo gruppo di sostituzioni (sulle determinazioni di u) legate ai cappi $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$, per x posto nell'origine O , soddisfa alle condizioni di invarianza di Enriques quando, percorrendo un qualunque tratto della treccia, le modificazioni delle sostituzioni dovute ai passaggi dei fili gli uni sopra gli altri sono tali che le sostituzioni corrispondenti ai vari posti sono uguali all'inizio e alla fine del tratto⁽⁵⁾.

(3) Cfr. O. CHISINI, *Sulla identità birazionale, ecc.*, loc. cit., § 3 e per un caso analogo B. SEGRE, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali*. «Mem. Acc. d'Italia», 1930.

(4) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione*. «Ann. Mat. pura e appl.», 1923, ed M. DEDÒ, *Algebra delle trecce caratteristiche: relazioni fondamentali e loro applicazione*. «Rend. Ist. Lomb.», 1950, § 9 e sgg.

(5) In particolare le condizioni di invarianza di Enriques danno quanto segue: nei tratti di treccia che corrispondono a punti di diramazione semplici i fili che si scambiano arrivano al loro punto d'incontro con la stessa sostituzione; nei tratti di treccia che corrispondono a cuspidi i fili che si scambiano arrivano al loro punto d'intreccio portando sostituzioni diverse ma concatenate; nei tratti che corrispondono a nodi i fili che si scambiano giungono al loro punto d'intreccio portando sostituzioni permutabili (uguali o diverse e in tal caso sconcate).

Riprendiamo ora la treccia della sestica con nove cuspidi sopra indicata e associamo all'inizio della treccia, ai fili 1, 2, 3, 4, 5, 6, rispettivamente gli scambi sulle determinazioni v_1, v_2, v_3 (di una funzione v a tre valori):

$$(v_1 v_2) (v_1 v_3) (v_2 v_3) (v_1 v_3) (v_2 v_3) (v_2 v_3)$$

(il cui prodotto è l'identità). Osservando i singoli dodici tratti della treccia si verifica che questi scambi soddisfano alle condizioni di invarianza di Enriques. Si vede anche – con verifica sistematica – che (a meno di cambiamenti inessenziali di nomi) queste sono le uniche sostituzioni su tre determinazioni che verificano le condizioni di invarianza.

Così risulta provato che *la sestica con nove cuspidi è di diramazione per un unico piano triplo* (cioè tutti i piani tripli aventi per curva di diramazione questa sestica sono birazionalmente identici).

Consideriamo ora come la stessa sestica possa essere di diramazione per piani quadrupli, esaminando i possibili modi di distribuire all'inizio della treccia (sui vari fili) degli scambi su quattro elementi.

Sul numero finito di casi che si presentano, scegliamo anzitutto (seguendo la treccia) le possibili distribuzioni di scambi su quattro determinazioni w_1, w_2, w_3, w_4 (di una funzione w), che soddisfano alle condizioni di invarianza di Enriques, e fra esse scartiamo quelle tali che il prodotto ordinato di tutti gli scambi deposti sui fili (successivi) non sia uguale all'identità.

A tal fine notiamo anzitutto che ove le sostituzioni del precedente piano triplo (poste sui fili) sono concatenate lo devono essere anche quelle del piano quadruplo e ove quelle del piano triplo sono uguali quelle del piano quadruplo *a priori* devono essere o uguali o sconcate. Questo fatto dà come possibili corrispondenze (sempre a meno di cambiamenti inessenziali di nomi) fra le sostituzioni del piano triplo e quelle del piano quadruplo (sullo stesso filo) solo le seguenti: a $(v_1 v_2)$ (del piano triplo) corrispondono $(w_1 w_4)$ o $(w_2 w_3)$ (del piano quadruplo): a $(v_1 v_3)$ corrispondono $(w_1 w_2)$ o $(w_3 w_4)$; a $(v_2 v_3)$ corrispondono $(w_1 w_3)$ o $(w_2 w_4)$.

In base ai criteri ora enunciati si verifica subito sulla treccia in esame che solo ⁽⁶⁾ le tre seguenti distribuzioni di scambi, deposti (ordinatamente) sui fili all'inizio della treccia soddisfano alle condizioni di invarianza di Enriques:

$$\begin{aligned} & (w_1 w_4) (w_1 w_4) (w_1 w_2) (w_1 w_2) (w_1 w_3) (w_1 w_3) \\ & (w_1 w_4) (w_2 w_3) (w_1 w_2) (w_3 w_4) (w_1 w_3) (w_2 w_4) \\ & (w_1 w_4) (w_2 w_3) (w_1 w_2) (w_3 w_4) (w_2 w_4) (w_1 w_3). \end{aligned}$$

È chiaro che queste tre distribuzioni sono essenzialmente distinte (non riducibili l'una all'altra con cambiamenti di nomi).

Ciò dimostra che *la sestica con nove cuspidi è curva di diramazione (oltre che per un piano triplo) per tre piani quadrupli birazionalmente distinti.*

(6) Sempre a meno di cambiamenti inessenziali di nomi.

3. Notiamo che la corrispondenza considerata nel paragrafo precedente fra le sostituzioni sui tre elementi v_1, v_2, v_3 e quella sui quattro elementi w_1, w_2, w_3, w_4 lega ad una sostituzione sulle v una partizione in coppie delle w . Poichè le tre partizioni in coppie delle soluzioni di un'equazione di quarto grado corrispondono biunivocamente alle radici della risolvente cubica della stessa equazione, ne viene il seguente

TEOREMA: *Un piano triplo che ha la stessa curva di diramazione di un piano quadruplo ne è il risolvente cubico.*

4. Il fatto di aver trovato tre piani quadrupli aventi per curva di diramazione quella di un piano triplo ci induce ad esaminare la treccia di altre curve che in particolare siano di diramazione per un piano triplo.

Per esempio consideriamo la treccia della *sestica con sei cuspidi poste su una conica* (del tipo $p^3 + q^2$) costruita già da M. Dedò⁽⁷⁾. Questo autore ha già verificato (con lo stesso metodo da noi usato nel paragrafo precedente) che essa è di diramazione per un piano triplo.

Si vede subito sulla treccia che quello indicato da M. Dedò è l'unico (sempre rispetto all'identità birazionale) piano triplo avente per curva di diramazione la sestica in esame.

Seguendo criteri analoghi a quelli usati nel paragrafo precedente si verifica sulla treccia che la *sestica con sei cuspidi su una conica non può essere di diramazione per un piano quadruplo*.

5. Prima di procedere all'esame di altre curve ci è necessario premettere la costruzione di alcune trecce.

La costruzione della sestica con nove cuspidi è data nella nostra Nota citata a partire da una forma limite utilizzando un recente teorema di O. Chisini⁽⁸⁾ di prossima pubblicazione negli «Annali di Matematica»; questo procedimento si presenta atto anche per la costruzione di trecce di curve che appartengono ad una notevole categoria: quella delle curve razionali senza flessi (che sono di diramazione per un piano multiplo d'ordine uguale alla classe della curva stessa).

Tali curve formano per ogni ordine un unico sistema continuo⁽⁹⁾ che contiene come caso limite la curva spezzata in una conica K e un certo numero di rette r_i doppie tangenti a K (ove in ogni punto di tangenza di K con le rette doppie confluiscono tre cuspidi e in ogni punto d'incontro di due rette doppie confluiscono quattro nodi).

(7) Cfr. M. DEDÒ, *Algebra ecc.*, loc. cit., § II.

(8) Il teorema afferma che: La treccia caratteristica di una curva ϕ , variabile con un parametro λ , dotata di tre cuspidi, la quale all'annullarsi di λ , si riduce ad una curva γ contata due volte contenente un punto di diramazione O e ad una parte residua ψ tangente a γ in O (ove O è il punto in cui convergono, solo, le tre cuspidi) per la parte relativa alle tre cuspidi ha necessariamente una certa forma determinata (salvo le solite operazioni a meno delle quali è definita una porzione di treccia).

(9) Le loro curve duali sono curve senza cuspidi (con soli nodi) e, come è noto, formano un unico sistema continuo. Cfr. C. F. MANARA, *Sulle curve di diramazione dei piani multipli*. «Rend. Ist. Lomb.», 1949.

Per costruire la treccia di tali curve è opportuno costruire prima una treccia ausiliaria, quella della curva formata dalla conica K e dalle rette r_i (considerate semplici); ci si arriva pensando la curva reale e seguendo il metodo usato da O. Chisini nella costruzione di una (seconda) forma canonica di treccia di una curva generale di ordine n ⁽¹⁰⁾.

In questa treccia ausiliaria costruita si sdoppiano poi i fili corrispondenti alle rette r_i costruendo (opportunamente):

1° tre cuspidi nei punti di tangenza della K con le rette r_i , e ciò in base al recente teorema poco sopra citato di O. Chisini;

2° quattro nodi nei punti d'incontro di due rette doppie;

3° e infine una seconda diramazione (o contatto) in ciascuna delle rette doppie (quella che non cade nel punto di tangenza con K) diramazione che è data da una torsione di mezzo giro fra i due fili relativi.

Così, dotando successivamente la conica K di 1, 2, 3 rette doppie tangenti, si hanno le trecce della quartica con tre cuspidi ⁽¹¹⁾, della sestica con sei cuspidi e quattro nodi e della curva dell'ottavo ordine con nove cuspidi e dodici punti doppi. Tali trecce sono date rispettivamente dalle figg. 2, 3, 4 (l'ultima disegnata in due parti successive).

6. Consideriamo ora le trecce costruite nel paragrafo precedente.

Nel solito modo si verifica sulla fig. 2 che *la quartica tricuspide* è di diramazione per l'unico piano triplo dato dalle seguenti sostituzioni poste sui fili 1, 2, 3, 4, all'inizio della treccia

$$(v_1 v_2) (v_1 v_3) (v_2 v_3) (v_2 v_4).$$

Naturalmente questa curva non è di diramazione per nessun piano quadruplo (le curve di diramazione dei piani quadrupli hanno almeno ordine 6).

Si verifica sulla fig. 3 che *la sestica con sei cuspidi e quattro nodi* è di diramazione per un unico piano triplo, quello per cui le sostituzioni sui fili 1, 2, 3, 4, 5, 6 all'inizio della treccia sono

$$(v_1 v_2) (v_1 v_3) (v_2 v_3) (v_2 v_4) (v_1 v_5) (v_1 v_6).$$

Notiamo che per questa curva pensata come curva di diramazione per un piano triplo i punti doppi (per cui i fili che li determinano hanno sostituzioni uguali) risultano singolarità inessenziali (cioè sono scindibili in due contatti).

Seguendo i criteri usati nel § 2 si vede che *la stessa sestica* è di diramazione per un unico piano quadruplo, quello corrispondente alle sostituzioni (all'inizio della treccia):

$$(w_1 w_4) (w_1 w_5) (w_1 w_6) (w_2 w_3) (w_2 w_4) (w_2 w_5).$$

(10) O. CHISINI, *Forme canoniche per il fascio caratteristico rappresentativo di una curva algebrica piana*. « Rend. Ist. Lomb. », 1937.

(11) Nella Nota citata M. Dedò aveva già dato una treccia di questa quartica con altra costruzione. Si verifica subito che, con le operazioni a meno delle quali è sempre definita una treccia, la nostra si può ridurre a quella di Dedò.



Fig. 2.

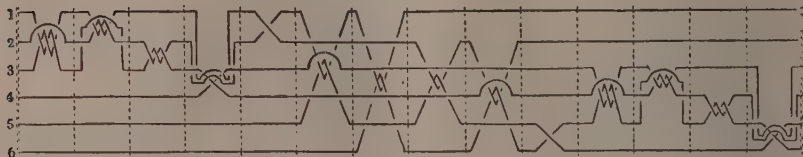


Fig. 3.

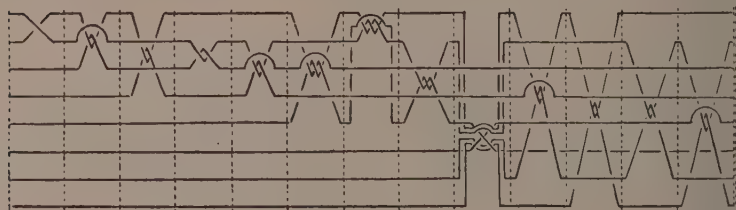
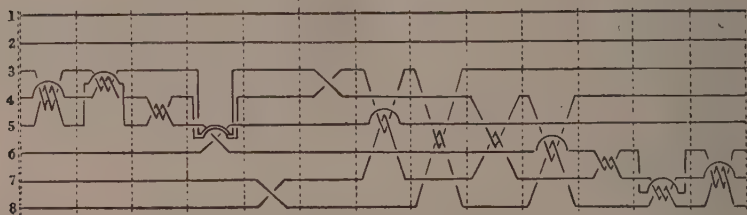


Fig. 4.

Si verifica infine sulla fig. 4 che la curva dell'ottavo ordine con nove cuspidi e dodici nodi è di diramazione per un unico piano quintuplo: precisamente quello individuato dalle seguenti sostituzioni poste sui fili successivi all'inizio della treccia:

$$(z_2 z_5) (z_2 z_5) (z_1 z_4) (z_1 z_4) (z_1 z_2) (z_1 z_2) (z_2 z_3) (z_2 z_3).$$

Sulla treccia si verifica anche che questa curva di ottavo ordine non può essere di diramazione per un piano triplo o un piano quadruplo.

I fatti ora esposti confermano risultati ottenuti per altra via da O. Chisini e C. F. Manara ⁽¹²⁾.

(12) Cfr. O. CHISINI. *Altre curve di diramazione dei piani n-pli*. « Rend. Acc. Lincei », 1939 e C. F. MANARA, *Sulle curve di diramazione dei piani multipli*, loc. cit.

7. Le considerazioni precedenti ci hanno dato, fra l'altro:

- a) una curva (sestica con nove cuspidi) simultaneamente di diramazione per un piano triplo e per tre piani quadrupli birazionalmente distinti;
- b) una curva (sestica con sei cuspidi e quattro nodi) di diramazione simultaneamente per un piano triplo e per un piano quadruplo;
- c) una curva (sestica con sei cuspidi) di diramazione per un piano triplo e non per un piano quadruplo.

Consideriamo ora il caso generale di un piano triplo rappresentato da una superficie le cui sezioni passanti per il centro di proiezione Z_∞ hanno genere p : la sua curva di diramazione φ , come è noto, ha ordine $2p + 4$.

Pensiamo alla treccia di φ e alle sostituzioni relative al piano triplo distribuite sui suoi fili (all'inizio della treccia): si può sempre modificare il sistema di cappi in π_y , o — il che equivale — operare un isomorfismo su π_y , lasciando i cappi rettilinei verticali (come è detto nel § 2) in modo che le sostituzioni poste successivamente sui vari fili della treccia risultino (nella cosiddetta forma di Lüroth Clebsch):

$$(v_1 v_2) (v_1 v_2) (v_2 v_3) \cdots (v_2 v_3) \cdot$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2 + 2p \text{ volte}}$

Tenendo conto dell'osservazione fatta al § 2 circa la corrispondenza fra le sostituzioni legate allo stesso filo della treccia, relative le une al piano triplo e le altre al piano quadruplo, i possibili piani quadrupli aventi φ come curva di diramazione sono dati da sostituzioni — indicate sempre a meno dei soliti inessenziali cambiamenti di nomi — distribuite sui vari fili della treccia di φ (successivamente) nel modo seguente:

1) $(w_1 w_4) (w_2 w_3)$ e poi, comunque distribuiti $(w_1 w_3)$ o $(w_2 w_4)$ in modo da dare altri $2 + 2p$ scambi;

2) $(w_1 w_4) (w_1 w_4) (w_1 w_3)$ e poi, comunque distribuiti, $(w_1 w_3)$ in numero dispari di volte e $(w_2 w_4)$ in numero pari di volte (fino a formare $1 + 2p$ scambi).

Il caso 1) appare subito impossibile in quanto il prodotto (ordinato) di tutti gli scambi non è mai l'identità.

Il caso 2) dà luogo a 2^{2p} distribuzioni possibili. Fra queste va eliminata la distribuzione data da $(w_1 w_4) (w_1 w_4)$ e poi tutti $(w_1 w_3)$, poichè, mancando sostituzioni che operino su w_2 , essa fornisce un piano triplo (quello iniziale).

Dunque, dato un piano triplo con curva di diramazione di ordine $2p + 4$ possono esistere al massimo

$$2^{2p} - 1$$

piani quadrupli aventi la stessa curva di diramazione φ .

Questo limite superiore può anche essere raggiunto, ma non lo è sempre, come indicano i casi delle precedenti sestiche per cui $p = 1$; il raggiungere o non raggiungere questo limite superiore dipende dalla natura topologica della curva di diramazione, cioè dalla treccia.

Meccanica. — *Piccole oscillazioni dell'acqua contenuta da pareti piane.* Nota di EDOARDO STORCHI, presentata^(*) dal Corrisp. B. FINZI.

Anni addietro⁽¹⁾ mi occupai del seguente problema: determinare qual'è nelle piccole lente oscillazioni di un liquido perfetto in moto piano irrotazionale entro un recipiente il legame funzionale che intercede fra la configurazione del pelo libero e quella del recipiente che racchiude il liquido, legame nel quale siano conglobate tutte le ipotesi fisiche e le condizioni al contorno.

Disposto nel piano di movimento un asse orizzontale x lungo il pelo libero in condizioni statiche e un asse y verticale ascendente, l'ordinata η di un punto generico del pelo libero, in condizioni di movimento, risulta una funzione della x e del tempo t : $\eta = \eta(x, t)$

Sfruttando le ipotesi seguenti:

a) la lentezza del movimento ($1/2 v^2$ trascurabile nel teorema di Bernouilli);

b) la piccolezza delle oscillazioni (η trascurabile di fronte alla profondità del recipiente);

c) la irrotazionalità del moto e quindi la presenza di un potenziale cinetico $\varphi(x, y, t)$;

d) la struttura analitica: $\varphi(x, y, t) = \theta(x, y) T(t)$ di quest'ultimo (prodotto di un fattore spaziale per un «fattore tempo»), il risultato cui pervenni è il seguente:

« Se:

$$(1) \quad \eta(t, x) = F'(x) \cdot \Psi(t)$$

rappresenta la configurazione del pelo libero di un liquido in modo lento irrotazionale entro un recipiente, il contorno del recipiente deve forzatamente essere una linea di equazione:

$$(2) \quad F(x + iy) + F(x - iy) + i\hbar [F'(x + iy) - F'(x - iy)] = K$$

(\hbar, K costanti)

mentre $\Psi(t)$ deve essere funzione sinusoidale del tempo con pulsazione: $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$. La stessa equazione (2) definisce tutte le linee di flusso. Inoltre il moto superficiale nella forma (1) è possibile se e solo se il primo membro della (2), per l'assegnata $F(z)$, risulta reale.

La (2) rappresenta il legame funzionale che intercede fra la $F = F(z)$ e la $y = y(x)$ ossia fra la forma del pelo libero e quella del recipiente nell'ipotesi che alla prima possa attribuirsi l'espressione analitica (1) (prodotto di un fattore spaziale e di un fattore tempo). Nota la configurazione

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1951.

(1) E. STORCHI, *Legame fra la forma del pelo libero e quella del recipiente nelle oscillazioni di un liquido*. « Rend. dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXXII, 1949.

del pelo libero la (2) fornisce immediatamente le linee di flusso e quindi i profili dei recipienti per i quali il movimento superficiale nella forma assegnata è possibile. In particolare alla luce della (2) ho invertito il ben noto risultato di Kirchoff, provando che se il pelo libero si mantiene nelle piccole lente oscillazioni rigorosamente rettilineo, allora la sezione del recipiente deve essere necessariamente una iperbole equilatera (degenere o non degenere) avente per asintoti le bisettrici degli assi cartesiani.

Un problema che presenta grande interesse è il problema inverso di quello già risolto:

« Nelle ipotesi poste circa la struttura del potenziale cinetico e quindi della $\eta(t, x)$, nota la forma del recipiente nel quale il liquido è racchiuso, quale sarà la configurazione del pelo libero ? ».

Dal punto di vista strettamente matematico la risoluzione di un siffatto problema equivale alla risoluzione dell'equazione (2) cioè ad un problema di tipo misto per l'equazione di Laplace ⁽²⁾.

Un procedimento per l'integrazione della (2) che si mostra fecondo di risultati interessanti è il seguente:

Si consideri una coppia di assi cartesiani ortogonali x, y (x orizzontale, y verticale) con l'origine sul pelo libero in condizioni statiche e si indichi con $y = y(x)$ l'equazione del profilo del recipiente, « che supporremo analitico ». Si indichi inoltre con a una delle intercette del profilo con l'asse delle x . Siccome la $y(x)$ è analitica, esistono finite tutte le derivate $y'(a), y''(a), \dots, y^{(n)}(a), \dots$ e allora con successive derivazioni totali rispetto ad x eseguite sulla (2) è possibile in generale attraverso equazioni di 1° grado procurarsi le derivate della $F(x)$, di tutti gli ordini, calcolate nel punto $x=a, y=0$. Se tutte queste derivate $F'(a), F''(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$ risultano determinate e per di più la serie:

$$(.) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n+1)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

converge in un intorno del punto $x=a$, la serie stessa rappresenterà la cercata $F'(x)$ e quindi tramite la (1) si potrà determinare la configurazione del pelo libero ⁽³⁾.

(2) Posto infatti: $\varphi(x, y) = F(x + iy) + F(x - iy)$ la (2) si scrive:

$$(2') \quad \varphi(x, y) + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} = k$$

e il problema generale consiste nel determinare la funzione $\varphi(x, y)$ armonica nel campo di moto e soddisfacente la (2') sul contorno. Una seconda fase del problema consisterà poi nel risalire dalla φ alla F .

(3) Può sembrare a prima vista assurdo che $F'(x)$ possa esprimersi mediante i valori che $y(x)$ e le sue derivate assumono nel punto $A(x=a, y=0)$, in quanto, alterando il contorno del recipiente in una regione del piano che escluda A , si può pensare che i valori $y(a), y'(a), \dots, y^{(n)}(a)$ rimangano immutati mentre ovviamente (per quanto dimostrato nel primo lavoro) deve mutare la configurazione del pelo libero. Una tale convinzione viene però demolita dalla circostanza che, essendo il contorno analitico, la sua alterazione anche in una regione del piano che non includa A , si ripercuote in effetti sui valori che la $y(x)$ e le sue derivate assumono in A .

Nella presente Nota non mi occuperò del caso generale ma soltanto della determinazione della configurazione del pelo libero di un liquido

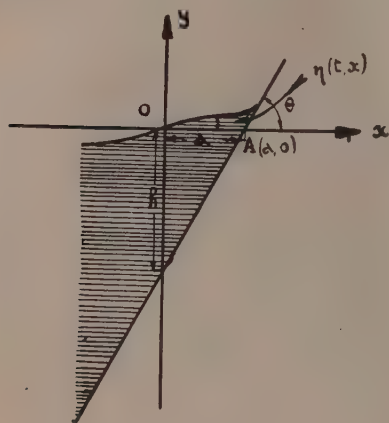


Fig. 1.

perfetto a contatto di pareti piane inclinate, dotato di moto lento irrotazionale, nell'intento di scoprire la legge che connette i due soli casi noti in questo campo, quello di Kirchhoff (parete a 45° sull'orizzonte, pelo libero rettilineo) e quello di Greenhill (parete a 30° sull'orizzonte, pelo libero parabolico).

Supponiamo in un primo tempo che il liquido sia a contatto di una sola parete piana inclinata dell'angolo $\theta \neq \pi/2$ sull'orizzonte.

Disposto l'asse orizzontale x coincidente col pelo libero in condizioni statiche e l'asse y verticale ascendente, il recipiente risulta in queste condi-

zioni illimitato a sinistra e chiuso sulla destra dal profilo analitico:

$$(3) \quad y = \frac{h}{a}x - h$$

Nella (3) a ed h denotano le intercette del profilo con gli assi e affinché sia rispettata la condizione (b) si dovrà ritenere la sopraelevazione η del pelo libero trascurabile di fronte ad h (fig. 1).

Per la (3) risulta allora:

$$y'(x) = \frac{h}{a} = \tan \theta \quad ; \quad y''(x) = y'''(x) = y^{IV}(x) \dots \equiv 0$$

e dalla (2) pertanto, derivando reiteratamente ambo i membri rispetto ad x , si trae:

$$\left(1 + i \frac{h}{a}\right)^k F^{(k)}(x + iy) + \left(1 - i \frac{h}{a}\right)^k F^{(k)}(x - iy) + i h \left[\left(1 + i \frac{h}{a}\right)^k F^{(k+1)}(x + iy) - \left(1 - i \frac{h}{a}\right)^k F^{(k+1)}(x - iy) \right] = 0$$

e quindi, nel punto $A(a, 0)$:

$$F^{(k)}(a) \left[\left(1 + i \frac{h}{a}\right)^k + \left(1 - i \frac{h}{a}\right)^k \right] + i h \left[\left(1 + i \frac{h}{a}\right)^k - \left(1 - i \frac{h}{a}\right)^k \right] F^{(k+1)}(a) = 0.$$

Posto poi:

$$1 + i \frac{h}{a} = \rho [\cos \theta + i \sin \theta]$$

e quindi:

$$1 - i \frac{h}{a} = \rho [\cos \theta - i \sin \theta]$$

con:

$$\rho = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta}; \theta = \operatorname{arctg} \frac{h}{a},$$

ne segue in generale:

$$(4) \quad \boxed{F^{(k)}(a) \cos \hat{k}\theta - h F^{(k+1)}(a) \operatorname{sen} \hat{k}\theta = 0} \quad (k \geq 1).$$

La (4) esprime la semplice legge ricorrente con cui si succedono le derivate. Esaminiamo separatamente i due casi che si possono presentare:

1° sia θ incommensurabile con π ;

2° sia θ commensurabile con π .

Primo caso. — Posto: $\theta = \pi/\beta$ (β irrazionale), è possibile provare che la serie (.) non converge per alcun valore di x , escluso $x = a$. Invero in queste condizioni non esistono valori di k per i quali sia: $k\theta = q\pi$ con q intero, giacchè quest'ultima equazione implica $\beta = k/q$ contro l'ipotesi che β sia irrazionale. Allora, non esistendo interi k per i quali $\operatorname{sen} \hat{k}\theta = 0$, dalla (4) si trae:

$$F^{(k+1)}(a) = \frac{F'(a)}{h^k} \operatorname{ctg} \theta \cdot \operatorname{ctg} 2\hat{\theta} \cdot \operatorname{ctg} 3\hat{\theta} \dots \operatorname{ctg} \hat{k}\theta$$

e la serie (.) diviene:

$$(5) \quad F'(a) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left(\frac{x}{h} - \operatorname{ctg} \theta\right)^k}{k!} \cdot \operatorname{ctg} \theta \cdot \operatorname{ctg} 2\hat{\theta} \dots \operatorname{ctg} \hat{k}\theta \right\} \right].$$

Lo studio del carattere della serie (5) non si presenta molto semplice, tuttavia sfruttando un criterio generale di Kummer riusciremo a provare che la (5) non converge per alcun valore di x escluso $x = a$.

Cominciamo col provare che se $\theta = \pi/\beta$ con β numero irrazionale, non esiste:

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\operatorname{ctg} n\hat{\theta}}{n} \right|$$

mentre:

$$(7) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\operatorname{ctg} n\hat{\theta}}{n} \right| = +\infty$$

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\operatorname{ctg} n\hat{\theta}}{n} \right| = 0.$$

Si osservi infatti che se q è un intero qualsiasi, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow q\beta} \left| \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\beta} x}{x} \right| = +\infty.$$

Preso pertanto un numero $M > 0$ ad arbitrio è possibile in corrispondenza determinare un $\epsilon_M > 0$ tale che, se $|x - q\beta| < \epsilon_M$, risulti:

$$\left| \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\beta} x}{x} \right| > M.$$

D'altra parte, dalla teoria degli irrazionali è noto che se $\varepsilon > 0$ è un numero (piccolo) a piacere, è possibile in corrispondenza determinare infinite coppie di interi p e q in modo che sussista l'ineguaglianza: $|p - q\beta| < \varepsilon$.

Ne segue allora che, dato $M > 0$ ad arbitrio, è possibile determinare in corrispondenza un numero $\varepsilon_M > 0$ ed in corrispondenza ad ε_M infinite coppie di interi p e q in modo che per $|p - q\beta| < \varepsilon_M$ risulti:

$$\left| \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\beta} p}{p} \right| = \left| \frac{\operatorname{ctg} \theta p}{p} \right| > M.$$

In definitiva: « Se $M > 0$ è un numero (grande) a piacere, esistono infiniti interi p per i quali risulta:

$$(9) \quad \left| \frac{\operatorname{ctg} \theta p}{p} \right| > M.$$

Osservando d'altra parte che se h è un intero qualsiasi, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2h+1}{2}\beta} \left| \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\beta} x}{x} \right| = 0$$

e tenendo ancora presente la teoria degli irrazionali, si perviene ragionando come sopra alla conclusione che: « Se $\delta > 0$ è un numero (piccolo) a piacere, esistono infiniti interi h per i quali si ha:

$$(10) \quad \left| \frac{\operatorname{ctg} h\theta}{h} \right| < \delta.$$

Dalle (9) e (10) che sono verificate per infiniti valori di h e p discende che non esiste il limite (6) mentre nel contempo attraverso alle stesse vengono provate le (7) e (8).

Ciò premesso si noti che la serie (5) è una serie di potenze e quindi nei punti interni all'intervallo di convergenza, se converge, deve convergere assolutamente. Se pertanto riusciremo a provare che per nessun valore $x \neq a$ la serie converge assolutamente, avremo in pari tempo provato che essa per $x = a$ non converge neppure semplicemente. Ora per dimostrare la divergenza della serie:

$$(5') \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\left(\frac{x}{\hat{k}} - \operatorname{ctg} \theta \right)^k}{k!} \operatorname{ctg} \theta \cdot \operatorname{ctg} 2\theta \dots \operatorname{ctg} k\theta \right|$$

si può ricorrere al criterio generale di Kummer: « Se $d_n > 0$ è il termine generale di una serie divergente e risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{d_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}} \right) < 0,$$

la serie: $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \dots$ ($a_n > 0$) diverge (4).

(4) Vedasi ad esempio A. PRINGSHEIM, « Math. Ann. », 35, pp. 297-394 (1890).

Nel caso della serie (5'), fissato un valore $\bar{x} \neq a$, risulta:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left| \frac{n+1}{\operatorname{ctg}(n+1)\theta} \right| \cdot \left| \frac{h}{\bar{x}-a} \right|$$

e siccome la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n+1}{\operatorname{ctg}(n+1)\theta} \right|$$

è una serie divergente in quanto come si è dimostrato:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n+1}{\operatorname{ctg}(n+1)\theta} \right|$$

non esiste, si può assumere:

$$dn = \left| \frac{n+1}{\operatorname{ctg}(n+1)\theta} \right|.$$

Allora, poichè:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \left| \frac{\operatorname{ctg}(n+1)\theta}{n+1} \right| \cdot \left| \frac{n+1}{\operatorname{ctg}(n+1)\theta} \right| \cdot \left| \frac{h}{\bar{x}-a} \right| - \left| \frac{\operatorname{ctg}(n+2)\theta}{n+2} \right| \right\} = \\ = \left| \frac{h}{\bar{x}-a} \right| - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\operatorname{ctg}(n+2)\theta}{n+2} \right| = -\infty < 0 \end{aligned}$$

per il criterio enunciato, qualunque sia $\bar{x} \neq a$ la (5') diverge e di conseguenza la (5) non può convergere per alcun valore $x \neq a$ come volevasi dimostrare.

Caso 2. — Supponiamo ora θ commensurabile: con $\pi: \theta = m/n\pi$ con m, n interi primi fra loro. Sia in un primo tempo n dispari. Allora si osservi che l'equazione: $k m/n\pi = \pi/2 + r\pi$ è irresolubile in interi k ed r in quanto essa implica: $2 km = n(2r+1)$, relazione assurda per essere n dispari. Invece l'equazione: $k m/n\pi = q\pi$ ha soluzioni in interi e il minimo valore di k che vi soddisfa, per essere m ed n primi fra loro è: $k = n$. Dalla (4) segue poi

$$\left\{ \begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & F^{(n-1)}(a) \cos \left[\frac{(n-1)m}{n} \pi \right] - h F^{(n)}(a) \operatorname{sen} \left[\frac{(n-1)m}{n} \pi \right] = 0 \\ & F^{(n)}(a) \cdot (-1)^m - h F^{(n+1)}(a) \cdot 0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Di qui si trae:

$$\left\{ \begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & F_{(a)}^{(n)} = \frac{F'(a)}{h^{n-1}} \operatorname{ctg} \frac{m}{n} \pi \operatorname{ctg} 2 \frac{m}{n} \pi \dots \operatorname{ctg} \frac{(n-1)m}{n} \pi \end{aligned} \right.$$

mentre $F^{(n+1)}(a)$ non risulta determinata e finita. La serie (5) non può quindi convergere.

Sia infine $\theta = \frac{m}{n} \pi$ (m, n primi fra loro) e sia n pari (e quindi m dispari).

In queste condizioni l'equazione: $k \frac{m}{n} \pi = \frac{\pi}{2} + q\pi$ ossia: $\frac{km}{2p} = \frac{2q+1}{2}$ ha soluzioni e il minimo valore di k che vi soddisfa è $k=p$. La (4) fornisce.

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{(p-1)}(a) \cos \left[\frac{(p-1)m}{2p} \pi \right] - h F^{(p)}(a) \sin \left[\frac{(p-1)m}{2p} \pi \right] = 0 \\ F^{(p)}(a) \cos \frac{m\pi}{2} - h F^{(p+1)}(a) \sin \frac{m\pi}{2} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ F^{(2p)}(a) \cos m\pi - h F^{(2p+1)}(a) \sin m\pi = 0 \\ F^{(2p+1)}(a) \cos \left[\frac{(2p+1)m\pi}{p} \right] - h F^{(2p+2)}(a) \sin \left[\frac{(2p+1)m\pi}{p} \right] = 0 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

e quindi.

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{(p)}(a) = \frac{F'(a)}{h^{p-1}} \operatorname{ctg} \frac{m}{2p} \pi \operatorname{ctg} \frac{2m}{2p} \pi \dots \operatorname{ctg} \left[\frac{(p-1)m}{2p} \pi \right] \\ F^{(p+1)}(a) = F^{(p+2)}(a) \dots = F^{(2p)}(a) = 0 \\ F^{(2p+1)}(a) \dots \dots \dots \text{arbitraria} \\ F^{(2p+2)}(a) = F^{(2p+1)}(a) \operatorname{ctg} \frac{m}{2p} \pi \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

In particolare si trova una soluzione del sistema assumendo: $F^{(2p+1)}(a) = F^{(2p+2)}(a) \dots = 0$. In corrispondenza si trova che la serie (5) converge per tutti i valori di x riducendosi al polinomio seguente:

$$(11) \quad P(x) = F'(a) \left[1 + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\left(\frac{x}{h} - \operatorname{ctg} \theta \right)^k}{k!} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} 2\theta \dots \operatorname{ctg} k\theta \right].$$

Se si immagina invece il recipiente illimitato alla destra e chiuso sulla sinistra dal profilo analitico $y = -h/ax - h$ si perviene col procedimento già sfruttato alla formula ricorrente:

$$F^{(k)}(-a) \cos k\hat{\theta} + h F^{(k+1)}(-a) \sin k\hat{\theta} = 0$$

nella quale $\theta = \operatorname{arctg} h/a$ denota ancora l'angolo indicato in figura 1. Ancora si deduce che la serie (5) non converge a meno che sia: $\theta = m/n\pi$ con m ed n primi fra loro e $n = 2p$ pari, nel qual caso la serie degenera nel polinomio.

$$(12) \quad \bar{P}(x) = F'(-a) \left[1 + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\left(-\frac{x}{h} - \operatorname{ctg} \theta \right)^k}{k!} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} 2\theta \dots \operatorname{ctg} k\theta \right].$$

I due polinomi $P(x)$ e $\bar{P}(x)$ a meno di una costante moltiplicativa incorporabile in K si ottengono l'uno dall'altro cangiando x in $-x$ e pertanto $\bar{P}(x)$,

a meno della costante moltiplicativa, coincide con $P(x)$ se quest'ultimo « è un polinomio simmetrico o emisimmetrico ». Ne segue che il polinomio in queste condizioni fornisce il fattore spaziale della $\eta(t, x)$ qualora il liquido oscilli in un recipiente delimitato da ambedue le rette: $y = \pm h/ax - h$.

Si rivela così un fatto interessante ed inatteso: quelli di Kirchhoff e di Greenhill non sono che casi particolari di una legge ben più generale che costituisce il risultato cui volevo giungere nel presente lavoro.

« Se la sezione del recipiente è delimitata da due rette ugualmente inclinate dell'angolo θ sull'orizzonte e simmetriche rispetto all'asse y e: $\theta = m/n \pi$ con $n = 2p$ e m dispari primo con p , allora una configurazione possibile del pelo, libero è.

$$(13) \quad \eta(t, x) = A P(x) \cos(\omega t + B)$$

dove $P(x)$ è il polinomio simmetrico od emisimmetrico di grado $p - 1$ rappresentato dalla (11) e la pulsazione ω dell'oscillazione vale $\sqrt{g/h}$ denotando h la profondità del recipiente ».

Per esempio se $\theta = \pi/6 = \pi/2 \cdot 3$ (caso di Greenhill), si ha $p = 3$, $\text{ctg } \theta = \sqrt{3}$, $\text{ctg } 2\theta = 1/\sqrt{3}$, il polinomio (11) si riduce al polinomio simmetrico:

$$P(x) = F'(a) \left[1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{x}{h} - \sqrt{3} \right) \sqrt{3} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{h} - \sqrt{3} \right)^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right] = \frac{F'(a)}{2h^2} (x^2 - h^2)$$

e la configurazione del pelo libero per il recipiente chiuso delimitato dalle rette: $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x - h$, risulta:

$$(13') \quad \eta(t, x) = A (x^2 - h^2) \cos \left(\sqrt{\frac{g}{h}} t + B \right).$$

Se il polinomio $P(x)$ non è nè simmetrico nè emisimmetrico (come avviene ad esempio nel caso $\theta = 3/8 \pi$ in cui risulta: $P(x) = C(x^3 - 3xh^2 - 2(1 + \sqrt{2})h^3)$, la (13) fornisce la configurazione del pelo libero qualora il recipiente sia illimitato a sinistra e chiuso sulla destra dal profilo: $y = h/ax - h$ ma non nel caso in cui il recipiente sia chiuso dalla coppia di rette: $y = \pm h/ax - h$.

È interessante rilevare tuttavia che in tutti i casi, anche in quello del recipiente lateralmente illimitato, una volta individuata la $F'(x)$ con la (11) si può per integrazione risalire alla $F(x)$ e quindi tramite la (2) determinare la famiglia delle linee di flusso. Si trova così:

$$F(x) = F'(a) \left[x + h \sum_{k=1}^{p-1} \left\{ \frac{\left(\frac{x}{h} - \text{ctg } \theta \right)^{k+1}}{(k+1)!} \text{ctg } \theta \cdot \text{ctg } 2\theta \cdot \dots \cdot \text{ctg } k\theta \right\} \right] + C$$

e quindi inserendo nella (2), dopo alcune semplificazioni e posto: $x/h = X$, $y/h = Y$, si ottiene la seguente equazione globale delle linee di flusso:

$$\begin{aligned} 4) \quad X + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\text{ctg } \theta \text{ctg } 2\theta \dots \text{ctg } k\theta}{(k+1)!} \left\{ (X - \text{ctg } \theta)^{k+1} - \binom{k+1}{2} (X - \text{ctg } \theta)^{k-1} Y^2 + \dots \right\} + \\ + (k+1) \left[-\binom{k}{1} (X - \text{ctg } \theta)^{k-1} Y + \binom{k}{3} (X - \text{ctg } \theta)^{k-3} Y^3 \dots \right] = H. \end{aligned}$$

Ora, dalla teoria esposta segue che il primo membro della (14) si annulla identicamente per $Y = X \operatorname{tg} \theta - 1$ (con $H = \bar{H}$ costante conveniente) e che quindi è divisibile per $Y = X \operatorname{tg} \theta + 1$. Il quoziente risulta inoltre

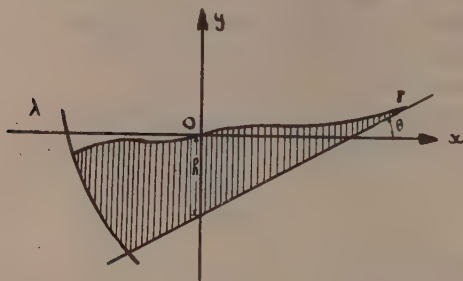


Fig. 2.

un polinomio $Q(x, y)$ di grado $p-1$ che eguagliato a zero fornisce ancora una o più linee di flusso. Fra queste può rientrare poi la retta simmetrica $Y = -X \operatorname{tg} \theta - 1$ (e ciò avviene quando $P(x)$ è simmetrico od emisimmetrico) e può non rientrarvi. In ogni caso per chiudere il recipiente già delimitato a destra dal profilo $y = \operatorname{tg} \theta \cdot x - h$ si può assumere una delle curve

λ definite implicitamente da $Q(x, y) = 0$ (fig. 2). «La configurazione del pelo libero per il liquido oscillante nel recipiente chiuso da r e λ sarà in tal modo ancora individuata dalla (13)». Ad esempio nel caso già esaminato in cui $\theta = \pi/6$, la (14) dà:

$$X [X^2 - 3Y^2 - 6Y - 3] = H.$$

Il primo membro con $H = 0$ è divisibile per $Y = \frac{\sqrt{3}}{3} X + 1$ e risulta $Q(x, y) = X \left(Y + \frac{\sqrt{3}}{3} X + 1 \right)$. L'equazione $Q(x, y) = 0$ definisce allora due rette: l'una è la retta di equazione: $Y = -X \operatorname{tg} \theta - 1$ che accoppia con la $Y = X \operatorname{tg} \theta - 1$ dà luogo al recipiente considerato da Greenhill, l'altra è l'asse delle Y . Si scopre così un caso nuovo (recipiente delimitato da una retta verticale e da una inclinata di 60° sulla verticale) in cui la η è ancora data dalla (13').

Segnaliamo infine a chiusura del lavoro una circostanza notevole:

«La soluzione trovata relativa al caso della parete piana inclinata dell'angolo $\theta = m/2 p\pi$ sull'orizzonte è sostanzialmente la soluzione generale per la parete piana, nell'ipotesi che alla $\eta(t, x)$ competa la struttura analitica (1)».

Invero notando che ogni numero reale α si può comunque approssimare con numeri razionali della forma $m/2 p$ e che a causa della natura stessa del fenomeno fisico a variazioni infinitesime dell'inclinazione della parete non possono corrispondere che variazioni pure infinitesime della configurazione del pelo libero, si conclude che se l'inclinazione della parete sull'orizzonte è $\theta = \alpha\pi$ con α irrazionale o razionale della forma $r/2s + 1$, la configurazione del pelo libero è ancora sensibilmente data dalla (13) qualora in essa $\theta = m/2 p\pi$ rappresenti un valore convenientemente approssimato di θ .

Meccanica quantica. — *Determinazione di tutte le grandezze fisiche possibili in un universo quantico.* Nota di LUIGI FANTAPPIÈ, presentata^(*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. In una Nota precedente⁽¹⁾ è stato dimostrato che le due esigenze di una grandezza fisica (scalare), rappresentata da un operatore funzionale lineare K , di essere *osservabile* e *obiettiva* si traducono per l'operatore K , rispettivamente, nelle due condizioni *necessarie e sufficienti* espresse dalle relazioni

$$(1) \quad K\varphi(\mathbf{x}) = F_{\alpha} [T_{\alpha}^{-1} \varphi(\mathbf{x})]$$

$$(2) \quad KT\varphi = TK\varphi \quad \text{o anche} \quad (2)' \quad T^{-1}KT\varphi = K\varphi.$$

La (1), che traduce l'esigenza della *osservabilità* della grandezza, attraverso un rilevamento descritto da una « definizione operativa », ci dice che l'operatore K si ottiene applicando un funzionale lineare *puro* F_{α} alla funzione $T_{\alpha}^{-1} \varphi(\mathbf{x})$, e cioè alla $\varphi(\mathbf{x})$, in cui si sia effettuato un generico *cambiamento di coordinate* T_{α}^{-1} , in quanto tale funzione dipende dai parametri α_k di questa trasformazione di coordinate, e non dalle coordinate x_k del punto (che si pensano costanti).

La (2) invece traduce l'esigenza che la grandezza *abbia significato obiettivo* nella condizione per K di essere *invariante* (o « permutabile ») *rispetto a tutte le trasformazioni* T del gruppo fondamentale G^r , che serve a definire l'uguaglianza nell'universo o sistema fisico considerato, e anche ad effettuare i cambiamenti di coordinate, come abbiamo già visto nella Nota citata.

Vogliamo ora far vedere, con questo lavoro, come le condizioni necessarie e sufficienti (1), (2) siano talmente restrittive da *permetterci di costruire facilmente tutti e soli questi operatori* K , che possono rappresentare le grandezze fisiche scalari dell'universo quantico, o sistema fisico, considerato, non appena sia noto il gruppo fondamentale G^r , che supporremo sempre *continuo* e a un numero finito r di parametri *reali*, che serve a definirvi l'uguaglianza.

2. Cominciamo perciò col precisare una buona volta quello che può essere chiamato *il campo naturale di definizione* delle funzioni φ che rappresentano lo stato di un sistema fisico, per cui sia assegnato il gruppo continuo finito *fondamentale* G^r , che definisce l'uguaglianza. Poichè una tale funzione φ rappresenta una *densità di probabilità* (o di *frequenza relativa*), di particelle *uguali* a una data, e quindi, in sostanza, una *distribuzione* di

(*) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) L. FANTAPPIÈ, *Caratterizzazione analitica delle grandezze della meccanica quantica*. « Questi Rend. », vol. 12, fasc. 3, 285-290 (1952).

particelle uguali, solo *diversamente situate*, si può osservare che ogni possibile situazione di una tale particella deve dunque potersi ottenere da quella di una particella fissa P_0 (da considerarsi come campione, e alla quale possiamo immaginare collegato un osservatore O) *con una particolare trasformazione* T_x del detto gruppo fondamentale G^r .

Viceversa, per ogni tale trasformazione T_x del gruppo dell'uguaglianza, applicata alla particella campione P_0 , si ottiene (per definizione) *una possibile situazione* di una particella P « uguale » a P_0 , situazione per cui *deve dunque essere definita la funzione* φ .

Si presenta quindi spontaneo di assumere sempre, come campo di definizione delle « funzioni di stato » φ di un sistema fisico proprio il gruppo fondamentale G^r che definisce l'uguaglianza. Tale gruppo G^r sarà dunque un gruppo totale di Lie, a r parametri reali, in cui le singole trasformazioni T_x (in numero di ∞^r) vengono concepite come *elementi o punti* di una varietà V^r a r dimensioni e *omogenea*, costituenti anzi non solo un gruppo, ma un *gruppo topologico*, in quanto per ogni elemento, o punto, sono sempre definiti naturalmente degli « intorni ».

È da osservare che dalla *regolarità* della funzione φ (che supporremo sempre analitica) su tutta la varietà V^r , rappresentante del gruppo G^r , segue necessariamente anche l'*uniformità* della funzione φ *soltanto se la varietà* V^r *ha una connessione lineare semplice*, cioè, come anche si dice, se il gruppo G^r è *semplicemente connesso*, poichè in tal caso, effettuando i prolungamenti analitici di φ lungo un qualunque cammino chiuso, si deve certamente ritornare nel punto iniziale con la determinazione di partenza (dato che il cammino chiuso si può ridurre con continuità a detto punto, senza mai incontrare punti singolari). Se invece il gruppo G^r è *più volte connesso*, esistendo cammini chiusi non riducibili con continuità a un punto, il prolungamento analitico della funzione φ , ovunque regolare, lungo tali cammini, porta *in generale* a determinazioni *diverse* di φ in uno stesso punto. Ciò accade, per esempio, già per il gruppo Os_3^1 delle rotazioni dello spazio ordinario, che può rappresentarsi col gruppo dei *quaternioni* di modulo 1, e quindi coi punti di una ipersfera di S_4 di raggio 1, in cui però due punti diametralmente opposti (due quaternioni eguali e contrari) rappresentano la stessa rotazione. In tal caso la varietà rappresentativa del gruppo Os_3^1 è, più esattamente, solo un emisfero della detta sfera di S_4 , in cui siano identificati i punti al contorno opposti, e quindi i semicerchi massimi di detto emisfero sono curve chiuse *non riducibili* a un punto, e ogni funzione φ *regolare* sul gruppo Os_3^1 *non è in generale uniforme*. Poichè però la riemanniana di una tale funzione φ , in tal caso, si costruisce subito, completando i semicerchi massimi nei cerchi massimi e l'emisfero nell'ipersfera completa, *che è a connessione lineare semplice*, vediamo allora che ogni tale funzione φ è in generale a due valori, quelli assunti in punti diametralmente opposti sulla ipersfera, che rappresentano lo stesso punto o elemento di Os_3^1 .

Quando dunque si dice, in meccanica quantica, che per tenere conto dello *spin* si deve considerare, per le funzioni di stato φ , oltre alle comuni

variabili, anche un'altra variabile, capace però di assumere due soli valori $+1$ e -1 , e cioè, in realtà, una coppia di funzioni φ_1 e φ_2 (o una funzione φ con due determinazioni), questo fatto che dai fisici è presentato come un dato di esperienza ⁽²⁾ può invece spiegarsi immediatamente, nel modo più semplice, con le considerazioni ora svolte.

Ogni funzione di stato φ , definita e regolare per un sistema fisico che ammette il gruppo Os_3 delle rotazioni (e cioè uno « spin ») è infatti, come abbiamo visto, sempre a due valori (eventualmente coincidenti), essendo sempre univocamente definita sulla riemanniana a due fogli (data dalla ipersfera dei quaternioni) del gruppo Os_3 .

3. Assumendo ora come coordinate di un elemento \mathbf{x} del gruppo topologico G^r proprio un sistema di parametri canonici x_1, x_2, \dots, x_r , avremo che ogni punto reale dello spazio cartesiano S_r rappresenta sempre uno e uno solo elemento

$$(3) \quad e^{\mathbf{x}} f = e^{x_1 X_1 + x_2 X_2 + \dots + x_r X_r} f$$

del gruppo G^r (indicando con X_1, X_2, \dots, X_r r trasformazioni infinitesime generatrici di G^r), ma in generale potranno esistere più punti distinti di S_r che rappresentano uno stesso elemento di G^r , e che diremo perciò equivalenti. Per brevità indicheremo con $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_r)$ o con un altro qualunque dei punti equivalenti l'elemento di G^r da essi rappresentato, e la classe stessa di questi punti equivalenti, e con

$$(4) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{z}$$

l'elemento prodotto (in G^r) o la classe dei punti rappresentativi di questo prodotto. Si dirà poi campo fondamentale ogni dominio di S_r i cui punti rappresentino biunivocamente tutto G^r , con la sola eccezione dei punti al contorno (che debbono essere identificati con altri punti equivalenti del contorno).

Sia allora $\varphi(\mathbf{x})$ una funzione di stato, definita e regolare su tutto G^r e cioè in tutti i punti reali di S_r . Essa avrà valori uguali in punti equivalenti se è uniforme; il che si può sempre ottenere, del resto, ampliando convenientemente G^r con la sua riemanniana massima, che è data dal gruppo universale di ricoprimento di G^r ⁽³⁾, e cioè prendendo, se necessario, come campo fondamentale la riunione di più campi fondamentali contigui, quindi sarà sempre uniforme su tutto S_r .

Con un cambiamento di coordinate, dovuto a uno spostamento dell'osservatore da O a O' , mediante una trasformazione T_a del gruppo fondamentale G^r rappresentata dal punto a del gruppo topologico (astratto), le coordinate $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_r)$ si mutano nelle altre coordinate

(2) Ved. per esempio L. VAN DER WAERDEN, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*. Springer, Berlin, § 22, p. 89 (1932).

(3) Ved. per esempio L. PONTRJAGIN, *Topological Groups*, Princeton University Press, p. 225 (1946).

$\mathbf{x}' \equiv (x'_1, x'_2, \dots, x'_r)$ con la trasformazione (del 2° gruppo parametrico di G^r)

$$(5) \quad \alpha \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x}$$

dato che, per arrivare alla posizione \mathbf{x} di una particella P dalla posizione iniziale di P_0 nell'origine O posso prima passare alla posizione di O' con la T_α e poi con la $T_{\mathbf{x}'}$ alla posizione finale, essendo così $T_\alpha T_{\mathbf{x}'} = T_{\mathbf{x}}$.

Corrispondentemente la funzione $\varphi(\mathbf{x})$, con questo cambiamento di coordinate T_α , si muta nell'altra funzione

$$(6) \quad \varphi'(\mathbf{x}') = \varphi(\alpha \cdot \mathbf{x}')$$

e quindi la condizione (1) della *osservabilità* di una grandezza, rappresentata dall'operatore funzionale lineare K (indicando con T_t la trasformazione T_α^{-1}) si esprimerà con la formula

$$(7) \quad K\varphi(\mathbf{x}) = F_t[\varphi(t \cdot \mathbf{x})] = p(\bar{t}) \nabla \varphi(t \cdot \mathbf{x}) = \varphi_t(\mathbf{x})$$

ove col 3° membro abbiamo indicato il *prodotto funzionale proiettivo* della « indicatrice proiettiva » $p(\bar{t}) = p(t^1, t^2, \dots, t^r)$, che caratterizza il funzionale puro F_t , per la funzione $\varphi(t \cdot \mathbf{x})$ delle variabili t_1, t_2, \dots, t_r (contragredienti alle t^1, t^2, \dots, t^r) poichè, per risultati noti ⁽⁴⁾, il valore di F è dato proprio da questo prodotto funzionale proiettivo, e cioè dall'integrale multiplo

$$(8) \quad p(\bar{t}) \nabla \varphi(t) = \frac{1}{(2\pi i)^r} \frac{\partial^{r-1}}{\partial t^{r-1}} \int_{C_1} d\alpha_1 \dots \dots \int_{C_r} d\alpha_r \int_{\Omega} \frac{t^{r-1}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} p\left(\frac{-\tau_1}{\alpha_1}, \frac{\tau_1 - \tau_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{\tau_{r-1} - 1}{\alpha_r}\right) \cdot \varphi(t\alpha_1, t\alpha_2, \dots, t\alpha_r)$$

ove Ω indica la piramide dello spazio $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1}$ con vertici nell'origine e nei punti unitari degli assi, $d\omega = d\tau_1 \cdot d\tau_2 \dots d\tau_{r-1}$ e C_1, C_2, \dots, C_r sono curve chiuse nei piani complessi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ rispettivamente, tali che su esse e all'interno è regolare il fattore φ della funzione integranda, e su esse e all'esterno è regolare l'altro fattore p .

4. Per tener conto poi della condizione espressa dalla (2) e cioè *del carattere obiettivo* della grandezza fisica, rappresentata dall'operatore lineare K, osserviamo che col cambiamento di coordinate T_α passiamo dalla funzione $\varphi(\mathbf{x})$ alla funzione $\varphi' = \varphi(\alpha \cdot \mathbf{x})$; applicando poi a questa l'operatore K si ha

$$(9) \quad K\varphi' = K T_\alpha \varphi(\mathbf{x}) = K\varphi(\alpha \cdot \mathbf{x}) = p(\bar{t}) \nabla \varphi(\alpha \cdot t \cdot \mathbf{x}).$$

(4) Ved. L. FANTAPPIÈ, *L'indicatrice proiettiva, ecc.* « Ann. di Matem. », ser. 4^a, vol. 22 (1943).

Applicando invece prima K e poi T_α , si ha:

$$(10) \quad T_\alpha K\varphi = T_\alpha \varphi_i = \varphi_i(\alpha \cdot x) = p(i) \nabla \varphi(t \cdot \alpha \cdot x)$$

e poichè questi risultati, per la (2), devono essere uguali, deve essere identicamente

$$(11) \quad p(i) \nabla \varphi(\alpha \cdot t \cdot x) = p(i) \nabla \varphi(t \cdot \alpha \cdot x)$$

e per $x = \alpha^{-1}$ (elemento reciproco di α)

$$(12) \quad p(i) \nabla \varphi(\alpha \cdot t \cdot \alpha^{-1}) = p(i) \nabla \varphi(t).$$

Ma $\alpha \cdot t \cdot \alpha^{-1}$ è l'elemento t' trasformato di t mediante la sostituzione del gruppo aggiunto

$$(13) \quad t' = \mathfrak{A}^{-\alpha} t = (\alpha^{-1})^{-1} \cdot t \cdot \alpha^{-1}$$

che in parametri canonici è sempre una sostituzione *lineare* sulle t_k , a coefficienti costanti (dipendenti solo dalle α_k), e quindi, per una nota proprietà di invarianza del prodotto funzionale proiettivo (ved. cap. 2° della Mem. degli Annali già citata), cambiando le variabili nel 1° membro della (11), con le sostituzioni

$$(14) \quad t = \mathfrak{A}^\alpha t', \quad i = \mathfrak{A}^\alpha i'$$

(una *duale* dell'altra) nella φ e nella p rispettivamente, questo 1° membro è dato anche da

$$(15) \quad p(i) \nabla_i \varphi(\alpha \cdot t \cdot \alpha^{-1}) = p_i(i') \nabla_{i'} \varphi(t') = p_i(i) \nabla_i \varphi(t)$$

ove abbiamo indicato con $p_i(i')$ la funzione

$$(16) \quad p_i(i', \alpha) = p(\mathfrak{A}^\alpha i')$$

ottenuta da p con la seconda sostituzione (14).

Dovrà dunque essere

$$(17) \quad p_i(i) \nabla \varphi(t) = p(i) \nabla \varphi(t)$$

identicamente, qualunque sia la funzione φ . Segue di qui, allora, che l'operatore K , può sempre caratterizzarsi con una indicatrice proiettiva p che deve coincidere con la p_i , qualunque sia α :

$$(18) \quad p(i) = p_i(i) = p(\mathfrak{A}^\alpha i)$$

cioè che tale indicatrice proiettiva deve essere un invariante del gruppo duale \mathfrak{A}^α del gruppo aggiunto, condizione che è evidentemente necessaria e sufficiente.

Ma gli invarianti di tale gruppo \mathfrak{A}^α sono determinati dalla matrice « caratteristica » $\Delta(\rho)$ formata con le costanti di struttura del gruppo G^r ,

poichè sono tutti delle funzioni di *pochi invarianti fondamentali indipendenti* (tanti quanto è la differenza fra l'ordine r della matrice $\Delta(\rho)$ e la sua caratteristica, per $\rho = 0$) e quindi possiamo concludere che anche *tutte le grandezze fisiche scalari* di un universo quantico, col gruppo fondamentale G_r , essendo individuate da tali indicatrici, dipendono in realtà da *poché grandezze fisiche fondamentali*, caratterizzate da quegli invarianti del gruppo \tilde{G} .

5. Così, per esempio, per il gruppo T^2 delle rotazioni del piano attorno a un punto (a un parametro), si trova che c'è *un solo operatore fondamentale*, l'operatore xD , dato da

$$(19) \quad x D \varphi = x \varphi'$$

con le autofunzioni x^n , corrispondenti agli autovalori interi n ($n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$), e può quindi rappresentare il « rotatore » della meccanica quantica.

Invece, per il gruppo Os_3 delle rotazioni dello spazio ordinario, o meglio per il suo gruppo di ricoprimento $Spin_3$ (rappresentato biunivocamente dai quaternioni di modulo 1, e cioè da un'ipersfera di S_4) si trova che, per il gruppo aggiunto, che coincide col suo duale, e con lo stesso gruppo Os_3 , con gli ordinari parametri canonici già indicati, v'è un solo invariante fondamentale, e cioè *la somma dei quadrati*, o una sua qualunque funzione.

Corrispondentemente, in un universo quantico con tale gruppo, v'è un solo *operatore fondamentale*, per esempio l'operatore Δ_n di Laplace su quella ipersfera (a meno di una costante), che ha gli autovalori $-n(n+2)$ (n intero non negativo), a cui corrispondono, come autofunzioni, le $(n+1)^2$ *funzioni ipersferiche* d'ordine n . Invece di Δ_n si può prendere come operatore fondamentale l'operatore $(1 - \Delta_n)^{-1}$, che ha le stesse autofunzioni e gli autovalori $1/n^2$ proporzionali ai *livelli energetici dell'atomo di idrogeno*, cosicchè è da pensare che tale operatore possa eventualmente rappresentare proprio l'operatore « energia ».

Per il gruppo O_4^6 delle rotazioni di S_4 e per il gruppo di De Sitter Ds_{3+1}^{10} , si trovano invece *due invarianti fondamentali* del gruppo aggiunto o del suo duale, uno dato da una forma di 2° grado nei parametri canonici, come pel gruppo $Spin_3$, a cui corrisponde verosimilmente un operatore del tipo di quello di Laplace, e poi un secondo invariante del tutto nuovo, dato da una forma di 4° grado negli stessi parametri, a cui dovrebbero corrispondere un operatore, e quindi una grandezza scalare, di un tipo finora inaspettato.

In una comunicazione al Congresso dell'Unione Matematica Italiana di Taormina (ottobre 1951) ho studiato poi anche le grandezze fisiche *vettoriali* e *tensoriali*, mentre in prossimi lavori mi propongo di sviluppare la teoria di sistemi rappresentati non più da una, ma da *più funzioni di stato*, che indicheremo come *sistemi spinoriali* (considerazioni svolte in una parte del mio corso 1950-51 dell'Istituto di Alta Matematica).

Astronomia (Astrofisica). — *Risultati preliminari relativi allo spettro della corona esterna ottenuti nell'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952.* Nota di ATTILIO COLACEVICH, presentata (*) dal Socio G. ABETTI.

La missione scientifica italiana diretta da G. Abetti, che si recò a Khar-toum nel Sudan per osservare l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952, aveva nel suo programma anche l'osservazione dello spettro della corona esterna. Mentre la corona interna presenta caratteristiche righe di emissione

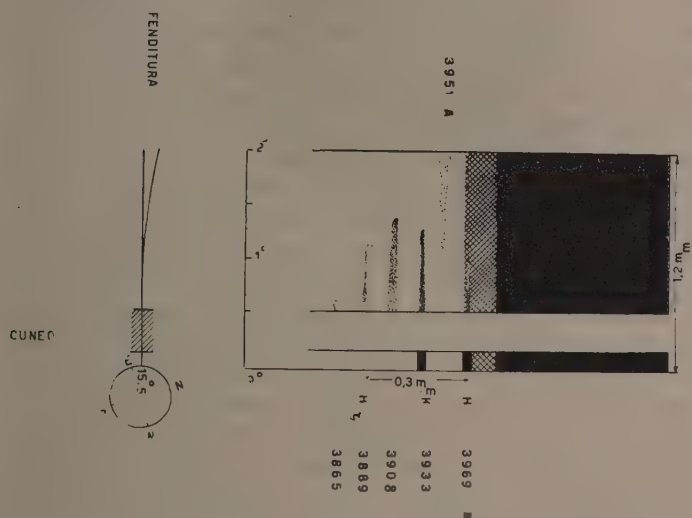


Fig. 1.

di altissima eccitazione, quella esterna, per quanto si sapeva, non presenta altro che uno spettro continuo con righe di assorbimento molto evanescenti, per cui si ritiene che essa rifletta principalmente la luce del Sole.

Lo scrivente aveva preparato per tale occasione uno spettrografo ad alta luminosità. Lo strumento completo consisteva di un obiettivo che formava sul piano della fenditura un'immagine del Sole di circa 13 mm; la fenditura aveva un labbro rettilineo e l'altro opportunamente sagomato (ved. figura). Il collimatore dello spettrografo aveva una focale di 160 cm. e i raggi andavano quindi ad investire un prisma di flint a sezione triangolare equilatera di 15 cm., gentilmente prestato dalle Officine Galileo di Firenze. La camera dello spettrografo ha un'apertura relativa utile 1/0.5 e si mette

(*) Nella seduta del 19 aprile 1952.

a fuoco con sicurezza e rapidità⁽¹⁾. La dispersione media degli spettrogrammi è di 300 Å per mm. attorno ai 3900 Å.

Lo strumento venne disposto orizzontalmente e l'obbiettivo veniva alimentato da un celostato. Sulla fenditura, per scopi che esulano da questa esposizione, era disposto un cuneo (come in figura) e la sagomatura della fenditura era tale che, tenendo conto dell'andamento dello splendore della corona, la densità dello spettrogramma risultasse quasi invariata, se il disco del Sole veniva messo come in figura. Il Sole venne effettivamente posto in tal modo e la fenditura, essendo verticale, risultò normale al lembo solare a partire da un punto in angolo di posizione N 75° E e si estendeva per una distanza dal Sole di circa 2°. Venne adoperato film Ferrania Pancro C6.

L'esposizione principiò 10 secondi dopo l'inizio della totalità e terminò 9 secondi prima della fine per una durata complessiva quindi di 170 secondi. La densità dello spettrogramma è buona dai 3860 Å ai 4000 Å. Nella figura sono rappresentati i dettagli percettibili in questa zona; la parte sovraesposta è rappresentata in nero.

Il cuneo divide la larghezza dello spettrogramma in due parti: una prossima al Sole è di larghezza 10', poi il cuneo che maschera i 20' successivi ed infine la parte più larga di valore pari a 90'.

In questa regione spettrale non si osservano altro che righe di emissione. Sono ben evidenti le righe H e K del calcio ionizzato ed è individuata con sicurezza (dato che si conosce la curva di dispersione dello strumento) la riga H_ε della serie di Balmer dell'idrogeno. Le altre righe presenti sono: una molto debole a 3865 Å, un'altra ben visibile a 3908 Å, larga nettamente più delle altre e cioè 8 Å. Tutte queste righe sono visibili nelle regioni più prossime al Sole, la riga K e la riga a 3908 Å arrivano a percepirsi fino a circa 70', ossia oltre due diametri solari dal lembo. Poi esse scompaiono piuttosto bruscamente. Nella parte più lontana dello spettrogramma sembra invece presente una riga in emissione a 3951 Å circa che si restringe avvicinandosi al Sole e scompare a circa 70' dal suo lembo.

Infine nella regione molto più densa, si nota a 4315 Å una intensa riga di assorbimento che deve identificarsi con la banda G e vicino si intravede nello spettro molto sovraesposto la riga H_γ dell'idrogeno. La banda G si estende attraverso tutta la larghezza dello spettro, cioè fino a 2° circa dal Sole.

L'interpretazione dello spettrogramma è piuttosto delicata, anche perchè esso presenta risultati inaspettati.

La prima domanda da porsi è quella riguardante la possibilità che questo spettro sia dovuto a luce solare indiretta come potrebbe aversi attraverso una sua diffusione nell'atmosfera terrestre. A questo riguardo è utile ricordare lo spettrogramma della corona solare ottenuto da A. Jenvall⁽²⁾

(1) Ved. « Il Nuovo Cimento », vol. VI, n. 2 1949.

(2) « Stockholm Observatoriums Annaler », Bd. 11, n. 8, 1932.

in occasione dell'eclisse totale del 29 giugno 1927. In questo spettrogramma si vede un gruppo di righe in emissione (le righe H e K, quelle della serie di Balmer e una dell'elio) anche nella regione coronale ed anche sulla parte del disco solare ricoperto dalla luna. È chiaro che le righe di quest'ultima zona non provengono direttamente dal Sole, ma sono righe delle protuberanze solari che illuminano l'atmosfera terrestre che a sua volta le diffonde in tutte le direzioni. Le righe visibili sono infatti quelle delle protuberanze solari. È da notare però che in quest'ultimo caso le righe si osservano solamente fino alla distanza di un raggio solare e cioè 16'.

Nel nostro caso vi sono però motivi evidenti per ritenere che le caratteristiche spettrali osservate spettino veramente alla corona più esterna del Sole o, con meno probabilità, a particolari condizioni della zona osservata in quell'istante.

La luce del cielo terrestre durante un eclisse totale di Sole ed in prossimità del Sole, può ritenersi come dovuta a tre cause: *a*) luce delle protuberanze solari non eclissate, diffusa dalle molecole atmosferiche; *b*) luce del Sole non del tutto eclissato diffusa una prima volta da zone dell'atmosfera terrestre fuori appunto della totalità in quell'istante e diffusa una seconda volta dalle zone osservate; *c*) emissioni proprie dell'atmosfera terrestre come si trovano nella luce del cielo notturno. Per la prima causa è da aspettarsi uno spettro con le righe di emissione delle protuberanze; per la seconda un duplicato dello spettro solare normale, con le righe di assorbimento; per terza origine si possono trovare righe di emissione analoghe a quelle del cielo notturno.

A quest'ultima origine deve attribuirsi la probabile riga in emissione a 3951 Å che si vede unicamente nella parte più lontana dal Sole. Questa radiazione potrebbe essere identificata con una banda di emissione a circa 3946 Å fotometrata da D. Barbier ⁽³⁾ e dovuta alla banda della molecola di azoto nel sistema di Vegard-Kaplan ed alla banda di Herzberg dell'ossigeno.

Più difficile è scindere il contributo dell'atmosfera terrestre, per i primi due motivi, da una parte spettrale proveniente direttamente dalla corona. Questa nella sua parte più interna presenta righe di emissione che non coincidono con quelle qui osservate. Oltre queste righe si trova poi su tutta la corona uno spettro continuo con righe di assorbimento che si ritiene dovuto a luce solare riflessa. Le righe risultano molto allargate e solo le più intense dello spettro solare possono essere identificate come ad esempio le righe H e K del calcio ionizzato e la banda G. Risulta naturalmente difficile scindere il contributo vero e proprio della corona dal contributo portato dalla diffusione terrestre, uno dei metodi per farlo consiste nell'esame dello stato di polarizzazione della radiazione.

La banda G, osservata come si è detto in questa occasione, e che si vede senza sensibile variazione di intensità su tutta l'estensione fino a 2° dal lembo solare, ha origine in armonia con quanto detto qui sopra.

(3) « Annales d'Astrophysique », Tom. 10, p. 145, 1947.

La presenza della banda G male si accorda però con l'assenza delle righe H e K in assorbimento. Le righe osservate sono solamente in emissione e non si apprezza alcun accenno di assorbimento sul continuo successivo più lontano dal Sole. Lo spettrografo venne usato sia prima che dopo dell'eclisse nello studio del cielo crepuscolare e si ottenne sempre oltre alla banda G due nettissime e forti righe H e K in assorbimento, rimane perciò esclusa una causa strumentale per la mancata presenza di queste due righe.

Il comportamento di queste due righe è veramente peculiare. Anche in quest'eclisse è stato verificato che esse risultano in assorbimento negli spettrogrammi ottenuti con lo spettrocoronografo U della spedizione italiana. Naturalmente questo andamento può essere verificato per una distanza di una decina di primi dal Sole, oltre i quali non si hanno dati spettrali relativi alla corona. Nel nostro caso si hanno invece le due righe in notevole emissione subito vicino al Sole, questo potrebbe essere spiegato dall'esistenza di due piccole e deboli protuberanze presenti proprio in quella zona del lembo solare al momento dell'eclisse. Poi le righe permangono in emissione e la K si vede ancora in emissione fino a circa $1'70''$ dal lembo solare. La mancanza delle righe di assorbimento per distanze maggiori potrebbe essere dovuta alla sovrapposizione di righe di emissione con righe di assorbimento, quantunque sia ben curiosa una compensazione tanto esatta da non permettere di distinguere alcun dettaglio sullo spettro continuo corrispondente. Certo è pure che le righe di emissione delle protuberanze non risultano più visibili allo spettrocoronografo oltre $1'$ dal lembo solare e quindi le righe osservate, che corrispondono al grande pennacchio orientale della corona, non si devono ritenere come dovute a quelle due protuberanze.

Il fatto più notevole è la presenza di una riga a 3908 Å. Nell'esame degli spettrogrammi ottenuti con strumenti molto più potenti proprio per queste due protuberanze non risulta osservata alcuna riga tra 3889 e 3933 Å. In genere nelle righe di emissione delle protuberanze vi sono alcune righe notevoli in emissione come le due righe a 3913.55 Å e 3900.54 Å dovute al titanio ionizzato che compaiono insieme, avendo origine dallo stesso livello. Queste due righe si dovrebbero vedere ancora distinte se esistenti, qui non risulta che un'unica riga a 3908 Å di notevole larghezza (circa 8 Å) ma che non dovrebbe confondersi con le due suddette. D'altra parte la sua intensità è notevolmente maggiore della H_{ϵ} , mentre secondo il Mitchell ⁽⁴⁾ queste risultano nello spettro-lampo circa 4 volte più deboli. Questa riga dovrebbe quindi ritenersi una nuova riga della corona più esterna e la sua stessa presenza sta ad indicare che i fenomeni osservati nelle altre righe devono ritenersi come reali della corona stessa. L'identificazione di questa riga è da stabilirsi. Notevole anche il fatto che questa riga risulta più debole nelle regioni più prossime al Sole e si rinforza poi per cessare

(4) « Astrophysical Journal », vol. 105, p. 15, 1947.

piuttosto bruscamente ad una distanza dal lembo di circa 80' (e cioè maggiore di quella della riga K).

Altra riga in emissione è la riga H_{ϵ} , più debole delle precedenti e che si vede larga e sicura fino ad una distanza di circa 50' dal Sole e poi si apprezza anche più lontano ma con minore sicurezza. La presenza della H_{ϵ} fa presumere l'esistenza delle righe precedenti della serie di Balmer che la sovraesposizione maschera. Si intravede però in emissione come già si disse una traccia della riga H_{γ} . Più in là nel violetto si intravede anche una riga verso 3865 Å, ma la sua debole intensità rende la misura poco precisa.

La conclusione dell'esame preliminare di questo spettrogramma è che esistono probabilmente righe in emissione proprie della corona solare più esterna, fino ed oltre i 70' dal lembo solare in quest'occasione (cioè oltre due diametri solari). Nel caso che esse non rappresentino una condizione particolare di quella regione in quell'istante, si dovrebbe ritenere che esiste una debole luminosità che circonda il Sole fino ad una distanza di quest'ordine.

Si comprende come conseguenze di questo rilievo non possano poggiare su un unico documento. Risulta perciò molto raccomandabile uno studio per l'esecuzione di spettrogrammi durante la totalità nelle prossime eclissi per confermare quanto qui descritto.

Astronomia (Astrofisica). — *Lo spettro della corona solare nell'eclissi del 25 febbraio 1952.* Nota di GUGLIELMO RIGHINI, presentata (*) dal Socio G. ABETTI.

Lo spettro della corona solare è stato fotografato con lo spettrocronografo doppio già impiegato per lo stesso scopo nella eclissi del 19 giugno 1936 (1). Lo strumento è composto di due spettrografi l'uno con ottica in flint (spettrografo V), l'altro con ottica in uviol (spettrografo U) montati con gli assi paralleli, agli estremi di un asse di declinazione di una montatura equatoriale. L'immagine del Sole sulla fenditura veniva data da due obbiettivi, rispettivamente in flint ed in uviol, del diametro di 150 mm. ed aventi una focale di 1500 mm. Ambedue gli spettrografi sono dotati di un collimatore a specchio parabolico fuori asse, di due prismi e di un obbiettivo tripletto. La dispersione sulla lastra è di 65 Å/mm per lo spettrografo U e di 24 Å/mm per lo spettrografo V alla lunghezza d'onda di H_{γ} .

Le fenditure degli spettrografi sono state puntate al bordo solare in angolo di posizione 70° dal punto nord verso est (cioè normali all'equatore solare) allo scopo di avere lo spettro della zona più intensa della corona. La larghezza delle fenditure di ambedue gli spettrografi era di 0.08 mm. equivalenti a circa 10" sul sole.

(*) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) «Mem. della Accademia d'Italia», vol. IX, 147 (1938).

Durante la totalità il prof. Abetti, che operava con questo strumento, ha eseguito tre pose sulla corona per la durata di 10, 30 e 90 secondi iniziando 10 secondi dopo l'inizio della totalità e terminando 10 secondi prima della fine. Gli spettri U sono stati presi su lastra Ferrania etichetta verde, quelli V su lastra Eastman 1N che è sensibile fino ad oltre 8000 Å. Nei giorni seguenti l'eclisse sono state pure eseguite le lastre di calibrazione con la luce del cielo e con la lampada campione; queste lastre sono state poi sviluppate insieme agli spettri in rivelatore Refinex Gevaert mantenuto a 17° mediante un bagno refrigerato, fissate e lavate con la solita tecnica.

Gli spettri U mostrano chiaramente la divisione fra corona interna (spettro continuo con righe di emissione) e corona esterna (spettro di assorbimento solare). Nello spettro della corona interna oltre alle righe di emissione tipiche della corona si vedono numerose altre righe di emissione dovute ad una piccola protuberanza che si trovava nell'angolo di posizione della fenditura. Queste righe, visibilissime nello spettro di 10 secondi, scompaiono quasi tutte negli altri avendo la luna eclissato anche la protuberanza.

TABELLA I.

Righe della corona osservate negli spettri V.

λ	Elemento	Pot. Ionizzazione
3986.88	Fe XI $^3P_1 - ^1D_2$	261 Volt
4086.5	Ca XIII $^3P_2 - ^3P_1$	655
4231.4	Ni XII $^2P_{3/2} - ^2P_{1/2}$	318
5116.03	Ni XIII $^3P_2 - ^3P_1$	350
5302.86	Fe XIV $^2P_{1/2} - ^2P_{3/2}$	355
6374.51	Fe X $^2P_{3/2} - ^2P_{1/2}$	233
6701.83	Ni XV $^3P_0 - ^3P_1$	422
7059.62	Fe XV $^2P_2 - ^3P_1$	390
7891.94	Fe XI $^3P_2 - ^3P_1$	261

Gli spettri V appaiono divisi in due parti avendo la luna mascherato la parte centrale della fenditura. Questo fatto è probabilmente da imputarsi ad una flessione strumentale o ad un piccolo errore nel parallelismo degli assi ottici dei due strumenti. Anche gli spettri V mostrano numerose righe della protuberanza oltre alle righe della corona. Le righe della protuberanza scompaiono quasi tutte negli spettri di 30 e 90 secondi di posa come per gli spettri U.

Le lunghezze d'onda delle righe coronali sono state determinate prendendo alcune righe di protuberanza come righe di riferimento e misurando le distanze col macromicrometro Mioni. L'errore medio di una misura era

di ± 3 micron; l'identificazione delle righe trovate negli spettri con quelle già note è quindi assai sicura.

Le tabelle contengono le righe coronali reperite negli spettri U e V.

Nessuna nuova riga appare nei nostri spettrogrammi; le nuove righe coronali osservate da Menzel e Petrie ⁽²⁾ nel 1936 sono state ricercate ma senza successo.

TABELLA II.

Righe della corona osservate negli spettri U.

λ	Elemento	Pot. Ioniz- zazione
3388.10	Fe XIII $^3P_2 - ^1D_2$	325
3454.13	—	—
3600.97	Ni XVI $^2P_{1/2} - ^2P_{3/2}$	455
3642.87	Ni XIII $^3P_1 - ^1D_2$	350
3800.77	—	—
3986.88	Fe XI $^3P_1 - ^1D_2$	261
4086.3	Ca XIII $^3P_2 - ^3P_1$	655
4231.4	Ni XII $^2P_{3/2} - ^2P_{1/2}$	318
4567	—	—

Confrontando gli spettri attuali con quelli presi nel 1936 con gli stessi strumenti si nota che nello spettro V del 1936 manca la riga 3986 che compare invece negli spettri del 1952 con notevole intensità anche con soli 10 secondi di posa. Nel 1936 la posa dell'unico spettro coronale V era stata di 90 secondi e anche tenuto conto che l'emulsione allora impiegata era probabilmente meno sensibile della 1N Eastman si deve concludere che la 3986 era molto più debole nel 1936 che nel 1952.

Maggiori differenze si notano nello spettro U nel quale manca in questa eclissi la riga 3533 osservata invece nel 1936. Anche le due righe 3388 e 3454 che nel 1936 erano state osservate con buona intensità sono molto deboli negli spettri del 1952 e sono visibili soltanto nello spettro di 90 secondi di posa. A proposito della 3533 è da notare che questa riga fu osservata in due sole eclissi: quella del 1908 dal Lewis e quella del 1936 dalla missione italiana. È probabile che questa riga, la cui identificazione è ancora sconosciuta, sia soggetta a forti variazioni di intensità.

Ulteriori dati sulla distribuzione di intensità delle righe e dello spettro continuo si potranno ottenere dallo studio fotometrico degli spettri che è attualmente in corso.

(2) « Ap. J. », 96, 395 (1942).

Geodesia. — *Determinazione dell'angolo fra la tangente in un estremo e la corrispondente sezione normale contenente l'altro estremo, per un arco finito di geodetica su di una superficie qualunque.* Nota di ANTONIO MARUSSI, presentata^(*) dal Socio P. DORE.

1. Il classico problema di determinare l'angolo fra la tangente ad un breve arco di geodetica in un suo estremo, ed il piano normale in questo contenente l'altro estremo, ha notevole interesse in Geodesia operativa, e viene risolto nel caso particolare in cui la superficie è quella di un ellissoide rotondo; di esso darò qui una generalizzazione per una superficie qualunque, che presenta il vantaggio di conferire al classico teorema una forma generale ed espressiva, facendo intervenire soltanto elementi intrinseci della superficie; e di consentirne in particolare l'applicazione al geode.

Il problema viene per lo più risolto sull'ellissoide servendosi dei classici sviluppi di Puiseux-Weingarten, che forniscono mediante una serie di potenze dell'arco s della geodetica considerata, le coordinate cartesiane di un suo punto; e qui mi servirò ancora di tali sviluppi, dopo averli però generalizzati per una superficie qualunque, prescindendo da qualsiasi riferimento in coordinate, col vantaggio dunque di far intervenire in tal modo soltanto elementi caratteristici della superficie.

2. Sia Σ l'assegnata superficie a curvatura totale positiva e con raggi principali di curvatura R_1 ed R_2 in ogni punto fra di loro non molto diversi (come si verifica ad esempio quando la Σ stia a rappresentare un lembo di geode); con ciò la torsione geodetica sarà piccola in ogni direzione. Siano poi P_1 e P_2 gli estremi di un arco di geodetica, di lunghezza s , che supporremo abbastanza limitata in confronto ai raggi di curvatura considerati più sopra, tanto che si possano trascurare le potenze quarte del suo rapporto ad essi.

Assunto come origine il punto P_1 , e positivo il verso che, lungo la geodetica, porta da P_1 a P_2 , indicheremo con $\mathbf{t} = d\mathbf{P}/ds$ il versore tangente alla geodetica avente tale verso, con \mathbf{n} la normale a Σ rivolta verso la sua convessità, e con \mathbf{b} il versore normale ad entrambi, in modo che il triedro superficiale $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ sia destrorso.

Ciò posto, le formule di Frenet generalizzate si scrivono, tenuto conto che la curva assegnata è geodetica, nel seguente modo

$$(I) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n} \quad ; \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \quad ; \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}$$

(*) Nella seduta del 19 aprile 1952.

κ e τ essendo, rispettivamente, la curvatura normale e la torsione geodetica secondo \mathbf{t} di Σ ; per la particolare scelta fatta del triedro fondamentale, κ risulta nelle nostre ipotesi sempre negativa, e τ è positiva allorchè il triedro fondamentale ruota, procedendo da P_1 verso P_2 , in senso orario per un osservatore disposto secondo \mathbf{t} .

3. Ciò premesso, avremo per il punto P_2

$$(2) \quad P_2 = P_1 + s\mathbf{t} + \frac{s^2}{2!} \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \frac{s^3}{3!} \frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2} + \frac{s^4}{4!} \frac{d^3\mathbf{t}}{ds^3} + \dots$$

ed in questa formula tutti gli elementi che vi figurano sono ovviamente presi in P_1 .

Derivando le ricordate formule di Frenet, e sostituendo, si ha subito

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} P_2 = P_1 + s \left(1 - \frac{s^2}{6} \kappa^2 - \frac{s^3}{8} \kappa \frac{d\kappa}{ds} \right) \mathbf{t}_1 + \\ + \frac{s^2}{2} \left[\kappa + \frac{s}{3} \frac{d\kappa}{ds} + \frac{s^2}{12} \left(\frac{d^2\kappa}{ds^2} - \kappa \omega^2 \right) \right] \mathbf{n}_1 + \\ + \frac{s^3}{6} \left[\kappa \tau + \frac{s}{4} \left(\kappa \frac{d\tau}{ds} + 2\tau \frac{d\kappa}{ds} \right) \right] \mathbf{b}_1 + \dots \end{aligned} \right.$$

in cui $\omega^2 = \kappa^2 + \tau^2$ rappresenta il quadrato del vettore cinematico di Darboux.

Sono questi in forma assoluta, gli sviluppi di Puiseux-Weingarten dai quali, volendo, facilmente si risale alla loro espressione cartesiana classica, riferendoli alla terna $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{n})$ formata mediante i versori \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 delle direzioni principali di Σ , e la normale \mathbf{n} alla superficie in P_1 .

4. Osserviamo ora che il vettore superficiale su Σ

$$(4) \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{n}_1 \wedge (P_2 - P_1)$$

è perpendicolare al piano normale a Σ in P_1 che contiene P_2 ; ed il suo modulo è dato da

$$(5) \quad \text{mod } \mathbf{B}_1 = \sigma \sin \zeta_1$$

in cui σ rappresenta la lunghezza della corda $P_1 P_2$, e ζ_1 è la distanza zenitale di P_2 su P_1 .

Il calcolo di $\sigma \sin \zeta_1$ è immediato, ricordando che $\sigma \cos \zeta_1 = (P_2 - P_1) \times \mathbf{n}_1$; e si ha precisamente:

$$(6) \quad \sigma \sin \zeta_1 = s \left(1 - \frac{s^2}{6} \kappa^2 - \frac{s^3}{8} \kappa \frac{d\kappa}{ds} + \dots \right)$$

Ciò premesso, il seno dell'angolo α_i formato dalla geodetica (contato a partire da t_i in senso orario) con il piano normale in P_i contenente P_a , è dato ovviamente dalla relazione

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} -\sigma \sin \zeta_i \sin \alpha_i &= \mathbf{n}_i \wedge (P_a - P_i) \times \mathbf{t}_i = \\ &= \frac{s^3}{6} \left[\kappa \tau + \frac{s}{4} \left(\kappa \frac{d\tau}{ds} + 2 \tau \frac{d\kappa}{ds} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

onde, nell'approssimazione scritta ed a meno del segno,

$$(8) \quad \sin \alpha_i = \frac{s^2}{6} \left[\kappa \tau + \frac{s}{4} \left(\kappa \frac{d\tau}{ds} + 2 \tau \frac{d\kappa}{ds} \right) \right].$$

In particolare dunque: *la parte principale dell'angolo cercato uguaglia il prodotto della curvatura per la torsione nella direzione assegnata, a meno di un fattore $s^2/6$ indipendente dalla superficie; tale angolo ha poi, secondo le convenzioni fatte, il segno della torsione geodetica.*

5. Quando ci si riferisca alle sezioni principali della superficie in P_i , e si dicano κ_1 e κ_2 le curvature principali, e θ l'angolo (contato in senso orario) di una direzione superficiale t a partire dalla sezione di curvatura κ_1 , si ha per la formula di Eulero

$$(9) \quad \kappa = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta$$

e poi

$$(10) \quad \tau = \frac{\sin 2\theta}{2} (\kappa_1 - \kappa_2);$$

onde il termine principale della (8) può scriversi

$$(11) \quad \frac{s^2}{6} \kappa \tau = \frac{s^2}{12} \sin 2\theta (\kappa_1 - \kappa_2) (\kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta).$$

Nel caso dell'ellissoide di rotazione, questa formula fornisce subito, con alcune approssimazioni, la consueta espressione

$$(12) \quad \frac{s^2}{6} \kappa \tau \approx \frac{s^2}{12 a^2} e^2 \cos^2 \varphi \sin 2\theta \quad (\text{ellissoide rotondo})$$

con evidente significato dei simboli.

Fisica. — *Le deformazioni relativistiche di un cilindro rotante.* Nota II di MARIO GALLI, presentata (*) dal Corrisp. L. TIERI.

1. Abbiamo mostrato in una Nota precedente (1) che nella risoluzione del problema posto è implicita la soluzione di un altro problema relativamente particolare ma di grande importanza nella teoria della relatività: la determinazione delle deformazioni relativistiche di un disco rotante.

Questo problema non ha avuto tuttora una soluzione al riparo da ogni obiezione, sebbene sia stato affrontato da insigni relativisti, quali Lorentz (2) ed Eddington (3). Il gran numero dei tentativi di risoluzione e la non concordanza dei risultati acquisiti dimostrano ad un tempo la difficoltà e l'importanza del problema.

Il principio da cui siamo partiti, tenuto presente anche da chi adotta altri metodi di risoluzione, si può così enunciare: Anche quando il moto di un corpo rigido non è uniforme, ciascun elemento infinitesimo del corpo mobile subisce la stessa contrazione di Lorentz che compete alla velocità istantanea dell'elemento considerato. Si tratta di una ardita estrapolazione di un risultato ben noto della relatività ristretta. Applicato al caso attuale (sia direttamente sia indirettamente, come abbiamo fatto nella Nota precedente) esso induce ad ammettere che la periferia di un disco rotante con velocità angolare uniforme ω è contratta rispetto all'osservatore fisso secondo il rapporto $\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$: 1. Poichè d'altra parte, applicando lo stesso principio, si deve ritenere invariata la lunghezza del raggio (in quanto la velocità istantanea è costantemente ad esso normale) ne conseguono simultaneamente le due relazioni:

$$(1) \quad C = C' \sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} ; \quad (2) \quad r = r'.$$

Questa conseguenza non si accorda, almeno a prima vista, con i postulati della geometria euclidea. (Paradosso di Ehrenfest) (4).

2. Per evitare questo inconveniente H. Ives (5) ammette che la superficie del disco rotante non permanga piana, ma s'incurvi in modo tale che

(*) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) « Rend. Linc. », ser. VIII, vol. XII, p. 87 (1952).

(2) A. S. EDDINGTON, « Mathematical Theory of Relativity », Cambridge University Press, p. 112 (1923).

(3) H. A. LORENTZ, « Collected Papers », vol. V, p. 356.

(4) Poichè fu rilevato per la prima volta da P. EHRENFEST, « Phys. Zeit. », p. 918 (1909).

(5) H. IVES, « Journal of Optical Society of America », 29, p. 472 (1939). La stessa ammissione era stata fatta precedentemente da G. STEED e H. DONALDSON, « Phil. Mag. », XX, p. 92 (1910).

le due proposizioni ora dedotte diventino compatibili. Ammesso ciò, è evidente, per ragioni di simmetria, che la superficie del disco diventerà una superficie di rivoluzione. Non è difficile assegnare l'equazione differenziale

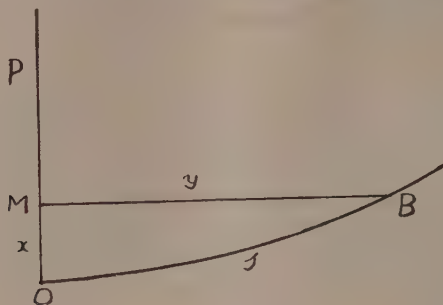


Fig. 1.

della curva meridiana. Sia OB un arco di tale curva, essendo O il centro del disco. Indichiamo con y la distanza del punto B dall'asse di rotazione OP, con x la distanza da O della sua proiezione M sull'asse medesimo. Allora dalle relazioni (1) e (2) consegue immediatamente:

$$(3) \quad y = s \sqrt{1 - \frac{\omega^2 y^2}{c^2}}$$

o anche:

$$s = \frac{y}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 y^2}{c^2}}}$$

da cui differenziando:

$$(4) \quad \frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2 y^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

ed infine (ponendo $\beta = \frac{\omega}{c}$)

$$(5) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\beta y (3 - 3\beta^2 y^2 + \beta^4 y^4)^{1/2}}{(1 - \beta^2 y^2)^{3/2}}$$

Se $\frac{\omega}{c} \ll 1$ si può scrivere approssimativamente: $dx = 3\beta y dy$. Da cui:

$$(6) \quad x = \frac{3}{2} \beta y^2.$$

Ossia, in prima approssimazione, il disco assumerebbe la forma di un paraboloide di rivoluzione ⁽⁶⁾.

3. A questo modo il paradosso di Ehrenfest è eliminato, ma a prezzo di una ammissione alquanto artificiosa. Vi sono alcune difficoltà che rendono inverosimile una cosiffatta deformazione. Infatti:

(6) Uno studio alquanto dettagliato della curva in questione si può trovare nella già citata Nota di G. STEED e H. DONALDSON.

a) La deformazione del disco ora ammessa non è simmetrica rispetto al piano normale all'asse di rotazione e passante per il centro del disco. Questa asimmetria è del tutto incomprensibile. Si potrebbe forse pensare che essa è legata dal verso di rotazione ma non se ne comprende il motivo.

b) Nè sembra agevole conciliarla con il principio di equivalenza. L'osservatore solidale col disco rotante deve poter descrivere i fenomeni che accadono nel suo ambiente in modo analogo a quanto fa l'osservatore fisso, salvo a tener conto di un opportuno campo di gravitazione. Ora non c'è dubbio che il vettore rappresentante il campo di gravitazione centrifugo è normale all'asse di rotazione. Ammessa la distorsione in questione esso non sarebbe parallelo alla tangente alla superficie del disco. Questo fatto permetterebbe di discernere un campo di gravitazione da un campo di accelerazione e sarebbe quindi incompatibile con il principio di equivalenza.

Secondo la grande maggioranza dei fisici che hanno trattato la presente questione il disco rotante si conserva piano. Alcuni ammettono ⁽⁷⁾ la contrazione periferica e radiale nella stessa misura sia pure secondo un rapporto diverso da quello fissato con la (1); altri ammettono contrazione periferica ma non radiale ⁽⁸⁾.

Di queste soluzioni la prima non offre difficoltà alcuna di carattere logico ma non è compatibile con il principio da cui siamo partiti. La seconda sembra logicamente incompatibile. Precisamente per evitare questa presunta incompatibilità taluni hanno fatto l'ipotesi alquanto strana dell'incurvamento del disco. Come è chiaro, il dissidio tra i vari autori è molto forte.

A nostro avviso, questo dissidio è acuito da una deplorabile confusione che vogliamo eliminare. Bisogna precisare il significato della contrazione di Lorentz riferita alla periferia del disco rotante. La formola (1) deve essere analizzata conformemente al concetto di definizione operativa, che costituisce il fondamento epistemologico della relatività. La distinzione che vogliamo fare è abbastanza elementare, eppure essa non è stata sufficientemente avvertita da alcuni autori che hanno trattato il presente problema, e ciò ha recato non poca confusione.

Indichiamo con K e K' gli osservatori solidali rispettivamente col sistema fisso e con il disco rotante. Ciò posto, il significato della formola (1) può essere duplice.

I. — Essa può esprimere una contrazione vera e propria per l'osservatore K. Cioè la circonferenza C' (ad esempio l'orlo del disco rotante) inizialmente sovrapposta alla circonferenza C del sistema fisso, dopo che si è stabilita la rotazione, si sovrappone ad una circonferenza C₁ più piccola di lunghezza $C' \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$. Secondo questa interpretazione la formola (1) descriverebbe i risultati di un confronto che fa lo stesso osservatore K tra la lun-

(7) Per esempio i già citati LORENTZ ed EDDINGTON.

(8) Tra gli altri A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity* (Princeton University Press), p. 60 (1946).

ghezza di una circonferenza C' (materializzata nel sistema rotante) per i due casi: quiete e moto angolare uniforme.

Solo in questo senso si può parlare di contrazione vera e propria ed in questo senso se ne parla in relatività ristretta.

Volendosi conformare a questa interpretazione è manifesto che le formule (1) e (2) non sono compatibili se non ricorrendo alla strana distorsione del disco di cui abbiamo dianzi parlato.

II. - Ma si può intendere la formola (1) anche in quest'altro modo. La circonferenza C' rimane sovrapposta alla circonferenza C , quindi per l'osservatore K la lunghezza di C' è quella stessa di C . Ma l'osservatore mobile K' , compiendo l'operazione di misura nel suo sistema trova per la lunghezza dell'orlo del disco un valore C' tale che sia soddisfatta la (1). Ammettiamo invece che le misure radiali, così intese concordino. Allora poichè: $C = 2\pi r$ ne consegue necessariamente $\frac{C'}{r} > 2\pi$. Cioè per l'osservatore K' non vale la geometria euclidea. Questo potrebbe essere falso, ma non può certo essere escluso con ragioni logiche.

Comunque sia, questi due diversi significati non devono essere confusi.

Ma, aderendo a questa seconda interpretazione, bisogna accettarne una conseguenza. L'osservatore K' determina la lunghezza di C' confrontandola con la sua unità di misura realizzata mediante una sbarra rigida ⁽⁹⁾. Ora è evidente che se l'orlo del disco rotante ed il regolo di misura si contraessero allo stesso modo (rispetto all'osservatore fisso) il risultato dell'operazione di misura non sarebbe alterato. Bisogna quindi ammettere il contrario. Cioè, se A e B sono gli estremi della sbarra unitaria, o di un suo sommultiplo, coincidenti, in condizioni di quiete con i punti A' e B' della periferia da misurare, stabilita la rotazione, essi coincidono con i punti A' ed M' essendo M' compreso tra A' e B' . Questo non si verifica nella relatività ristretta, dove tanto il regolo unitario quanto la lunghezza L da misurare si contraggono, rispetto all'osservatore fisso, allo stesso modo. Questa considerazione deve renderci molto cauti nel trasferire al caso attuale i risultati della relatività ristretta. La forza della premessa posta all'inizio ne risulta molto indebolita.

5. La plausibilità della premessa fondamentale deve essere esaminata più da vicino. Essa appare a prima vista molto plausibile, poichè è una naturale estrapolazione di un risultato ben noto della relatività ristretta, dove consegue logicamente dal principio di relatività.

Per renderci conto del fatto che tale estrapolazione non è peraltro sicura, prendiamo in esame le presunte trasformazioni tra la variabile in questione. È facile convincersi che queste non possono senz'altro identificarsi con le trasformazioni di Lorentz.

Siano r, θ, z, t e r', θ', z', t' le coordinate di un punto evento per i due osservatori K, K' , dianzi definiti. Si potrebbe essere tentati di scrivere:

(9) Confr. il passo già citato di A. EINSTEIN.

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} r\theta = \frac{r'\theta' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad z = z' ; \quad r = r' \\ t = \frac{t' + \frac{vr'\theta'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Questa supposizione è stata effettivamente fatta ⁽¹⁰⁾. Il criterio costruttivo può sembrare molto plausibile, ma analizzando le conseguenze si può concludere che queste non possono rappresentare le autentiche leggi di trasformazione.

In primo luogo si potrebbe segnalare un difetto abbastanza frequente presso gli autori che hanno trattato l'attuale problema. Non ci si preoccupa debitamente di determinare con cura i metodi di misura che dovrà adoperare l'osservatore K' , o le convenzioni che egli dovrà adottare. Non si pensa minimamente che le convenzioni valide per un sistema inerziale dovrebbero essere rivedute quando si passa ad un sistema rotante. Consideriamo, ad esempio, la definizione di sincronismo. Per semplicità supponiamo che i due orologi da sincronizzare α e β siano collocati su due punti diversi A e B di una stessa circonferenza. Che cosa significa esattamente che i due orologi sono sincroni? Se si accetta la consueta definizione di sincronismo si giunge ad una incongruenza. I due orologi potrebbero essere sincronizzati nel modo seguente. Si faccia partire da A un impulso luminoso quando α indica il tempo t . L'impulso luminoso raggiunga B percorrendo l'arco di cerchio congiungente A e B. Se con d indichiamo la lunghezza dell'arco AB, diremo che l'orologio β è sincrono con α se esso registra, all'arrivo del segnale, il tempo ⁽¹¹⁾ $t_t = t + \frac{d}{c}$.

Ci si potrebbe intanto chiedere: perchè l'osservatore K' deve far procedere il segnale luminoso secondo l'arco congiungente A e B? Non sarebbe più comodo inviare la luce direttamente da A a B? Ma il sincronismo così stabilito è incoerente. Bisogna fissare il verso. Supponiamo, ad esempio, che A e B siano allineati col centro del disco. Allora la sincronizzazione ottenuta inviando l'impulso luminoso secondo l'una e l'altra delle due semicirconferenze congiungenti A e B non è coerente. È difficile pensare che un cosiffatto modo di sincronizzare gli orologi sia accettabile.

Ma sviluppando le conseguenze delle equazioni (7) si giunge ad altre incongruenze. Ne segnaliamo qualcuna:

a) Le trasformazioni (7), se per semplicità ci si limita a considerare quanto avviene lungo due cerchi sovrapposti, si identificano formalmente con le stesse trasformazioni di Lorentz. Ora queste stabiliscono, come è ben noto, una perfetta reciprocità tra le osservazioni dei due osservatori K e K' . Ad esempio, se è vero che l'orologio di K' rallenta rispetto a quello di K, altrettanto deve dirsi dell'orologio di K rispetto a quello di K' . Questa reci-

(10) Cfr. M. G. TROCHERIS, « Phil. Mag. », vol. XL, p. 1143 (1949).

(11) È questo il criterio adottato dall'autore ora citato.

procità non può certo accettarsi nel caso attuale. È evidente infatti che quando l'orologio di K' , coincidente al tempo t con quello di K , ha compiuto un giro completo, esso ha rallentato rispetto a quello di K . Questa non coincidenza di due orologi collocati (posti cioè nel medesimo punto dello spazio) è un dato obbiettivo che non può essere valutato diversamente dai due osservatori. È impossibile quindi che valga la reciprocità consueta.

b) Consideriamo ancora una conclusione deducibile dalle (7). Si considerino due orologi A e B nel medesimo punto del sistema rotante ed indicanti lo stesso tempo per entrambi gli osservatori. Si faccia fare una rotazione completa a B . Dopo ciò, B segna la stessa ora per l'osservatore mobile, ma per l'osservatore fisso si avrebbe una differenza data da ⁽¹²⁾:

$$\Delta t = \frac{2\pi r'}{c} \sinh \frac{\omega r'}{c}.$$

La conclusione non ci appare probabile per la stessa ragione. Se A e B sono collocati, il fatto che essi segnino un tempo identico o diverso è un dato obbiettivo che non può essere diversamente valutato dai due osservatori.

6. Da queste e da altre considerazioni che si potrebbero aggiungere emerge chiaramente che le trasformazioni autentiche tra le variabili r, θ, z, t e r', θ', z', t' devono differire dalle trasformazioni di Lorentz. Se ciò è vero, allora i corollari delle trasformazioni di Lorentz non devono essere estrapolati con troppo facilità al caso attuale. Quindi il presupposto da cui abbiamo preso le mosse è alquanto discutibile. L'unica via per renderlo plausibile è quella da noi seguita: Applicarlo ad un problema più vasto, in modo che il complesso dei risultati possa essere controllato con altri mezzi. È quanto di meglio si possa fare, almeno a nostro avviso, ma con ciò il presupposto diventa probabile non già certo.

È verosimile che fondandosi sui criteri della relatività generale si possa giungere più sicuramente alla soluzione giusta. Tuttavia coloro che hanno seguito questa via non sono giunti a risultati concordanti. Questa constatazione deve bastare a renderci cauti e diffidenti. A noi sembra che in tutte le trattazioni del presente problema ispirate ai metodi della relatività generale, si introduce surrettiziamente, in principio o nel corso della trattazione, qualche affermazione arbitraria. Ma dobbiamo rinunciare a fare una analisi critica delle varie trattazioni, poichè questa per essere esauriente e rigorosa, richiederebbe molte pagine.

In breve ci sembra di potere concludere che la soluzione di H. Ivès, pur con le debite riserve, è migliore di quelle proposte da altri autori. Infatti:

a) Essa è logicamente connessa con il presupposto comunemente ammesso.

b) Il presupposto stesso, non essendo derivabile in modo rigoroso dal principio di relatività, è collaudato mediante l'applicazione alla determinazione di altre deformazioni che sono sicuramente valide in quanto conseguenze certe del principio di relatività.

(12) Questo secondo l'autore dianzi citato.

Fisica. — *Studio di una lente elettronica con il metodo W. K. B.*

Nota di CALOGERO MUSCIA, presentata ^(*) dal Corrisp. E. PERSICO.

1. La presente Nota ha per scopo di sperimentare il metodo di approssimazione noto col nome di Wentzel, Kramers e Brillouin nella integrazione dell'equazione parassiale delle lenti elettroniche, e precisamente nel caso di una lente puramente magnetica, il cui campo sia riconducibile a quello prodotto da una sola spira di raggio opportuno.

2. Per una lente elettronica puramente magnetica, è noto come, nei limiti della approssimazione di Gauss, la « traccia » degli elettroni e l'angolo di rotazione tra oggetto ed immagine soddisfino alle relazioni

$$(1) \quad r''(z) = -\frac{e}{8mc^2 V} H^2(z) r(z)$$

$$(2) \quad \theta = \frac{1}{\sqrt{2meV}} \frac{e}{2c} \int_{z_{ob}}^{z_{im}} H(z) dz,$$

in cui $r(z)$ è la distanza di un punto generico, di ascissa z , della traccia elettronica dall'asse ottico del sistema; e la carica, m la massa dell'elettrone; c la velocità della luce; V il potenziale acceleratore del fascio elettronico; $H(z)$ l'intensità del campo magnetico nei punti dell'asse ottico, e θ l'angolo di rotazione della immagine di ascissa z_{im} rispetto all'oggetto di ascissa z_{ob} .

W. Glaser in una fondamentale Memoria ⁽²⁾ cui si riferiscono anche i più recenti Trattati di Ottica Elettronica, nell'assegnare ai campi magnetici « a campana », quali si presentano in supermicroscopia, di massima intensità H_0 , espressioni della forma $H_z = H_0 \left[1 + \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right]^{-\mu}$, discute il caso di $\mu = 1$. Introdotta perciò in (1) l'espressione

$$(3) \quad H_z = \frac{H_0}{1 + \left(\frac{z}{a} \right)^2},$$

ed assunte le posizioni

$$(4) \quad a) \quad y = \frac{r}{a} \quad ; \quad b) \quad x = \frac{z}{a} \quad ; \quad c) \quad k^2 = \frac{eH_0^2 a^2}{8mc^2 V},$$

l'A. perviene all'equazione differenziale della traccia

$$(5) \quad y''(x) + \frac{k^2}{(1+x^2)^2} y(x) = 0,$$

(*) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) W. GLASER, *Strenge Berechnung magnetischer Linsen der Feldform* $H_z = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$
« Z. f. Phys. », 117, pp. 285-315 (1941).

che, con il cambiamento di variabile definito da

$$(6) \quad x = \cotg \varphi$$

fornisce l'integrale rigorosamente esatto

$$(7) \quad y(x) = \sqrt{1+x^2} [C_1 \operatorname{sen} \sqrt{1+k^2} \operatorname{arc} \cotg x + C_2 \cos \sqrt{1+k^2} \operatorname{arc} \cotg x].$$

Le condizioni asintotiche imposte dallo stesso problema elettronico:

$$(8) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \text{numero finito} & (\text{poniamo uguale ad } 1) \\ (\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = 0) & (2) \end{cases}$$

portano alla definitiva espressione parametrica

$$(9) \quad y(\varphi) = \frac{C}{\operatorname{sen} \varphi} \operatorname{sen} \sqrt{1+k^2} \varphi, \quad \text{con } C = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \quad \text{per } [y(\varphi)]_{\varphi \rightarrow 0} = 1.$$

Su tali presupposti W. Glaser deduce, oltre che l'effettivo andamento delle traccie elettroniche, i punti focali e le distanze focali della lente, la posizione dei piani principali, l'ingrandimento, il numero delle immagini e l'angolo di rotazione di esse, le costanti di aberrazione cromatica e sferica.

3. Oltre al caso $\mu = 1$, trattato da Glaser per la sua relativa semplicità, è particolarmente interessante il caso $\mu = \frac{3}{2}$, cioè $H_s = H_0 \left[1 + \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right]^{-3/2}$. Esso infatti rappresenta rigorosamente il campo prodotto da una spira circolare di raggio a percorsa da corrente, e può inoltre essere adottato in molti casi per rappresentare approssimativamente il campo di una bobina di più spire. Ci proponiamo appunto di calcolare, per una lente magnetica siffatta, le traccie elettroniche aventi un asintoto parallelo all'asse ottico.

L'equazione differenziale del raggio (1), con le stesse posizioni (4), si presenta allora sotto la forma

$$(10) \quad y''(x) + \frac{k^2}{(1+x^2)^3} y(x) = 0.$$

Questo problema fu studiato da R. Wallauschek e P. Bergmann ⁽³⁾. L'integrale generale da essi A. fornito

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad \text{con} \\ y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(1+x^2)^n} \quad \text{e} \quad y_2(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(1+x^2)^n},$$

(2) La seconda condizione è esuberante. Cfr. A. GHIZZETTI, *Un teorema sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali omogenee*. « Rend. di Matematica e delle sue Applicaz. », ser. V, vol. 8^o, fasc. I e 2, 1948.

(3) R. WALLAUSCHEK e P. BERGMANN, *Zur Theorie des Elektronenmikroskops mit Anwendung auf rein magnetische Felder*. « Zs. f. Phys. », 94, pp. 329-347 (1935).

essendo

$$a_n = 2 \frac{n-1}{2n+1} a_{n-1} - \frac{k^2}{2n(2n+1)} a_{n-2}, \quad b_n = 2 \frac{n-1}{2n-1} b_{n-1} - \frac{k^2}{2n(2n-1)} b_{n-2},$$

porta ad un computo di serie ovviamente laborioso, che, se permette il calcolo numerico delle tracce elettroniche, mal si presta ad uno studio completo delle costanti ottiche di una lente elettronica, per cui invece può essere agevole una soluzione di (10) espressa sotto forma compendiosa.

Non sembrando d'altra parte possibile esprimere in modo diverso da una combinazione di serie l'integrale generale di (10), si vuole esaminare se un suo integrale approssimato non possa dare per lenti corte risultati praticamente accettabili, almeno per valori di k compresi entro certi limiti.

La sostituzione di variabile (6) operata in (10) porta a considerare la equazione

$$(II) \quad y''(\varphi) + 2 \cotg \varphi y'(\varphi) + k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi y(\varphi) = 0.$$

Ove si ponga

$$(I2) \quad y(\varphi) = u(\varphi) v(\varphi),$$

è facile vedere che, con $u(\varphi) = \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi}$, sarà

$$(I3) \quad v''(\varphi) + [(1+k^2) - k^2 \cos^2 \varphi] v(\varphi) = 0.$$

Quest'ultima è l'equazione di Mathieu, meglio conosciuta sotto la forma classica, cui si può ricondurre,

$$v''(\varphi) + (a - 2q \cos 2\varphi) v(\varphi) = 0.$$

È noto quali e quanti siano stati nel passato i problemi ad essa connessi ⁽⁴⁾, e come anche se ne avvalga la più moderna tecnica ⁽⁵⁾. La nostra soluzione approssimata di (10) vuol essere ancora una applicazione della equazione di Mathieu.

Sottoponiamo la (I3) al procedimento W. K. B. ⁽⁶⁾. Posto $v = \sqrt{1+k^2}$ e

$$v(\varphi) = e^{\int s(\varphi) d\varphi}, \quad \text{sarà } v'(\varphi) = v s v, \text{ e}$$

$$v''(\varphi) = v (s' v + v s^2 v) = v v (s' + v s'^2).$$

Sostituendo in (I3), dividendo per $v^2 = 1 + k^2$, e semplificando,

$$(I4) \quad \frac{s'}{v} + s^2 + \left(1 - \frac{k^2}{1+k^2} \cos^2 \varphi\right) = 0.$$

Posto ancora $\beta^2 = \frac{k^2}{1+k^2}$, e $\rho^2 = 1 - \beta^2 \cos^2 \varphi$ (termine finito e $\neq 0$, anche per $\varphi = 0$, cioè $x = +\infty$), si ha l'equazione (di Riccati)

$$(I4') \quad \frac{1}{v} s' + s^2 + \rho^2 = 0.$$

(4) Cfr. ad esempio H. POINCARÉ, *Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris, vol. II, cap. VII (1893).

(5) Cfr. ad esempio N.W. MC LACHLAN, *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford at the Clarendon Press, 1951.

(6) WENTZEL, KRAMERS, BRILLOUIN. Cfr. quasi tutti i Trattati di Meccanica Quantistica, che ne fa frequente uso.

Secondo le note modalità del procedimento W. K. B., con

$$(15) \quad s(\varphi) = s_0(\varphi) + \frac{1}{v} s_1(\varphi) + \frac{1}{v^2} s_2(\varphi) + \dots,$$

si avrà poi

$$(16) \quad \begin{cases} s_0(\varphi) = \pm i\rho \\ s_1(\varphi) = -\frac{1}{2} \frac{s'_0}{s_0} \\ s_2(\varphi) = -\frac{s'_1 + \frac{1}{2} s_1^2}{2 s_0} \\ \dots \end{cases}$$

Limitandoci al secondo termine della serie (15), integrando tra 0 e φ , e conglobando in A le varie costanti, avremo

$$(17) \quad v(\varphi) = A \rho^{-\frac{1}{2}} e^{\pm i \sqrt{1+k^2} \int_0^\varphi \sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi} d\varphi} = \frac{A}{\sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi}} e^{\pm i \sqrt{1+k^2} \int_0^\varphi \sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi} d\varphi}.$$

Potremmo, volendo, spingerci oltre nel calcolo dei termini della serie (15). L'integrale generale (approssimato) di (13) è perciò

$$(18) \quad v(\varphi) = \frac{C_1}{\sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi}} \cos \left\{ \sqrt{1+k^2} \int_0^\varphi \sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \right\} + \\ + \frac{C_2}{\sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi}} \sin \left\{ \sqrt{1+k^2} \int_0^\varphi \sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \right\},$$

e, ricordando (12),

$$(19) \quad y(\varphi) = \frac{1}{\sin \varphi \sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi}} \left[C_1 \cos \left\{ \sqrt{1+k^2} \int_0^\varphi \sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \right\} + \right. \\ \left. + C_2 \sin \left\{ \sqrt{1+k^2} \int_0^\varphi \sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \right\} \right],$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie da determinarsi in base alle condizioni supplementari.

Poichè è

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

con $E\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ l'integrale ellittico di seconda specie di ampiezza $\frac{\pi}{2} - \varphi$ e di modulo

$$(20) \quad \alpha = \arcsin \beta = \arctg k,$$

si potrà ancora scrivere:

$$I) \quad y(\varphi) = C_1 \frac{\cos \left\{ \sqrt{1+k^2} \left[E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \right] \right\}}{\sin \varphi \sqrt[4]{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi}} + C_2 \frac{\sin \left\{ \sqrt{1+k^2} \left[E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \right] \right\}}{\sin \varphi \sqrt[4]{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi}}.$$

La condizione

$$(22) \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} y(\varphi) = 1$$

ci porta a considerare nulla la costante C_1 . Indicando allora C_2 semplicemente con C

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0} y(\varphi) &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} C \frac{\sqrt{1+k^2} \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi} \cos \left\{ \sqrt{1+k^2} \left[E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \right] \right\}}{\cos \varphi \sqrt[4]{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\beta^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{2 \sqrt[4]{(1 - \beta^2 \cos^2 \varphi)^3}}} = \\ &= C \frac{\sqrt{1+k^2} \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt[4]{1 - \beta^2}} = C \sqrt[4]{1+k^2} = 1, \end{aligned}$$

e perciò

$$(23) \quad C = \frac{1}{\sqrt[4]{1+k^2}}.$$

In definitiva

$$(24) \quad y(\varphi) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+k^2}} \frac{\sin \left\{ \sqrt{1+k^2} \left[E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \right] \right\}}{\sin \varphi \sqrt[4]{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi}},$$

che per la (20) può più omogeneamente scriversi

$$(24') \quad y(\varphi) = \sqrt{\cos \alpha} \frac{\sin \left\{ \frac{1}{\cos \alpha} \left[E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \right] \right\}}{\sin \varphi \sqrt[4]{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}}.$$

Nel rilevare l'analogia formale tra la soluzione (24) della (10) e la soluzione Glaser (9) della (5), potremmo ancora osservare che, se il parametro k^2 è assai piccolo, e tale che il termine $\beta^2 \cos^2 \varphi$ possa trascurarsi di fronte

all'unità, sarà $\int_0^\varphi \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi} \, d\varphi \cong \varphi$, e quindi, discutendo la (19),

$$y(\varphi) = \frac{C_2}{\sin \varphi} \sin \sqrt{1+k^2} \varphi,$$

cioè la stessa soluzione Glaser.

4. La soluzione approssimata (24) ha permesso di disegnare agevolmente, per diversi valori del parametro k^2 , le traccie elettroniche nel campo $H_z = H_0 \left[1 + \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right]^{-3/2}$. Come poteva prevedersi, a parità di H_0 , V ed a , la deflessione delle traccie si presenta più « ritardata » che non nel campo (3).

Si è voluto indagare quanto l'approssimazione fornita da (24) potesse essere accettabile per i casi pratici di prima focalizzazione, esplorando tre zone: di k^2 basso, medio ed elevato. Aderendo alla richiesta - e di ciò particolarmente molto si ringrazia il Direttore prof. Mauro Picone - l'Istituto

per le Applicazioni del Calcolo presso il Consiglio Nazionale delle Ricerche, ha eseguito un'accurata integrazione numerica dell'equazione differenziale (10), servendosi delle sostituzioni e degli integrali seguenti:

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} a) \frac{1}{1+x^2} = \sin^2 \varphi, \quad y(\varphi) = 1 - \frac{k^2}{20} \sum_n a_n \sin^{2n} \varphi, \\ \quad \text{per } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ b) \frac{x^2}{1+x^2} = \cos^2 \varphi, \quad y(\varphi) = A \sum_n b_n \cos^{2n} \varphi + B \sum_n c_n \cos^{2n+1} \varphi, \\ \quad \text{per } \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \\ c) \frac{1}{1+x^2} = \sin^2 \varphi, \quad y(\varphi) C \left(1 - \frac{k^2}{20} \sum_n a_n \sin^{2n} \varphi \right) + D \sum_n d_n \sin^{2n+1} \varphi, \\ \quad \text{per } \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi, \end{array} \right.$$

spingendo il computo fino al ventesimo termine delle serie, ed operando i raccordi nei punti $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. I risultati si mettono a confronto nella tabella I, e si riportano nel grafico di fig. 1.

TABELLA I.

Valori di $y(\varphi)$ in confronto tra i risultati forniti da (24) e l'integrazione numerica di (10) eseguita dall'Istituto Applicazioni Calcolo per $k^2 = 0, 5; 7; 18$.

k^2 $\varphi =$ $= \arccotg x$	0.5		7		18	
	da (24)	int. num.	da (24)	int. num.	da (24)	int. num.
0°	1	1	1	1	1	1
10°	0.99	0.99	0.99	0.99	0.97	0.99
20°	0.99	0.99	0.98	0.99	0.95	0.98
40°	0.98	0.99	0.93	0.92	0.86	0.80
60°	0.96	0.97	0.72	0.65	0.37	0.24
80°	0.92	0.92	0.26	0.15	—0.32	—0.36
90°	0.89	0.88	—0.03	—0.13	—0.47	—0.42
100°	0.85	0.83	—0.32	—0.39	—0.38	—0.26
120°	0.73	0.66	—0.71	—0.69	0.30	0.38
140°	0.50	0.36	—0.85	—0.59	0.90	0.72
160°	0	—0.39	—0.75	0.06	1.28	0.40
170°	—1.02	—1.82	—0.58	1.34	1.79	—0.40
180°	∞	∞	∞	∞	∞	∞

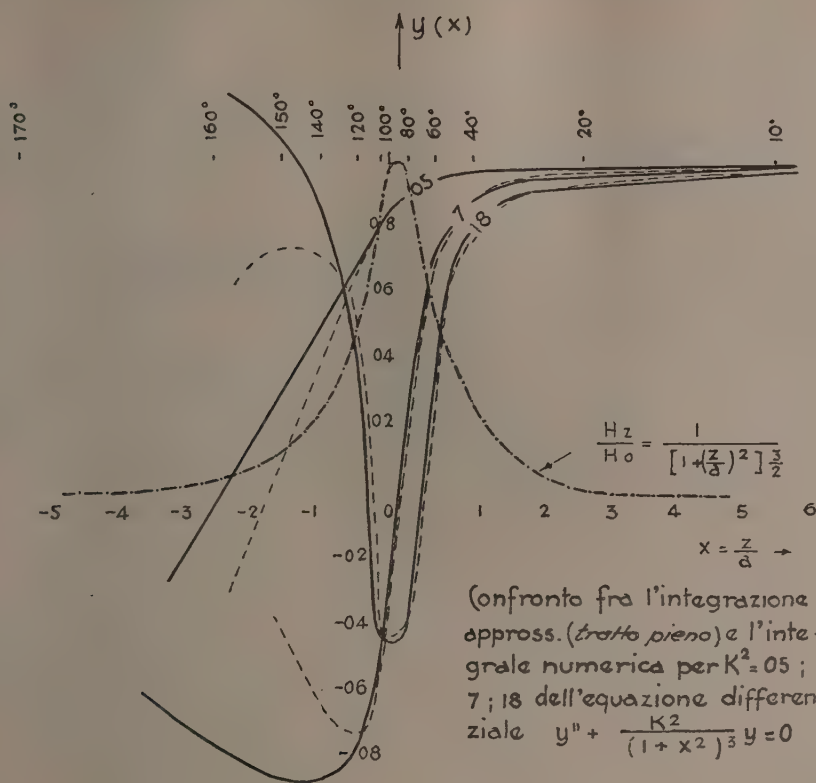


fig. 1.

Lo scarto notevole nella prima focalizzazione per basso valore di k^2 diviene assai minore per valori più elevati di tale parametro, e per questi ultimi valori il metodo esposto si presenta a nostro parere particolarmente adatto.

La fig. 2 rappresenta le tracce, calcolate con il nostro metodo, per $k^2 = 0.5; 1; 3; 7; 12; 18$.

La formula approssimata (24') si presta (assai meglio della soluzione in serie di Wallauschek e Bergmann) a calcolare le posizioni dei fuochi della lente, cioè dei punti in cui è $y(\varphi) = 0$: essi si ottengono risolvendo con l'uso delle tavole degli integrali ellittici l'equazione in φ

$$(26) \quad E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = n\pi \cos \alpha$$

con n intero. La fig. 3 rappresenta le posizioni del primo punto focale ($n = 1$) per 15 valori particolari di k^2 .

Sembra dunque poter concludere che il metodo W.K.B. può rendere utili servizi nel calcolo delle lenti elettroniche.

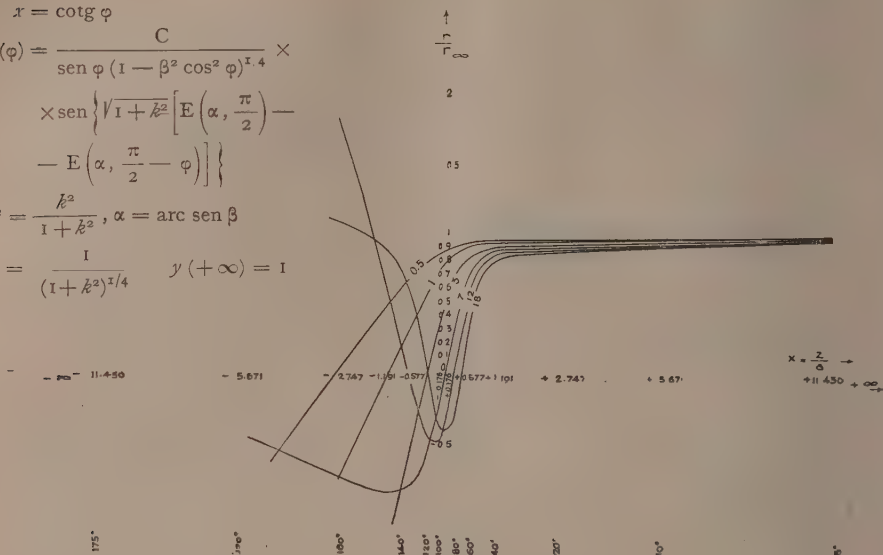
$$x = \cotg \varphi$$

$$y(\varphi) = \frac{C}{\sin \varphi (1 - \beta^2 \cos^2 \varphi)^{1/4}} \times$$

$$\times \sin \left\{ \sqrt{1 + k^2} \left[E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \right] \right\}$$

$$\beta^2 = \frac{k^2}{1 + k^2}, \alpha = \arcsin \beta$$

$$C = \frac{1}{(1 + k^2)^{1/4}} \quad y(+\infty) = 1$$



Traccie dell'elettrone con forma di campo $H_z = \frac{H_0}{\left[1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^{3/2}}$

$$k^2 = \frac{e H_0^2 a^2}{8 m c^2 V} = 0.5 ; 1 ; 3 ; 7 ; 12 ; 18.$$

fig. 2.

Posizione del fuoco più vicino
a $\frac{z}{a} = 0$ ($n=1$) per K^2 da 0.5 a 20

$$E(\alpha, \frac{\pi}{2} - \varphi) = -\frac{n\pi}{\omega} + E(\alpha, \frac{\pi}{2})$$

$$\omega = \sqrt{1 + K^2}$$

$$K^2 = \frac{e H_0^2 a^2}{8 m c^2 V}$$

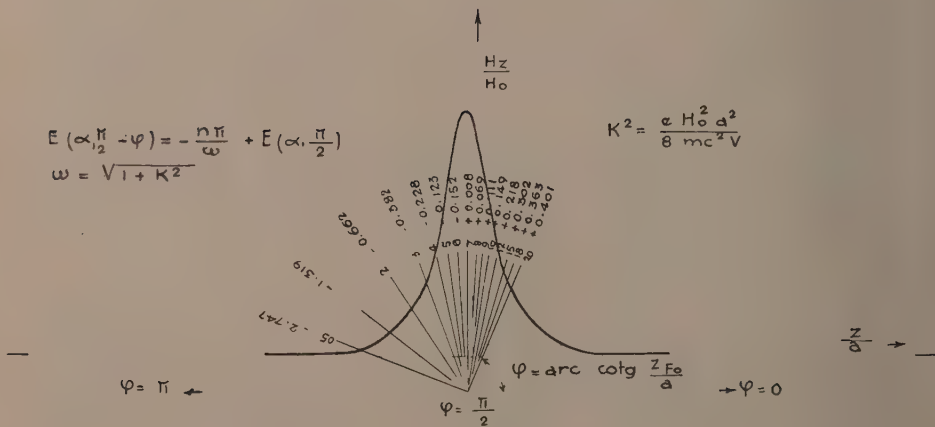


fig. 3.

Chimica. — *Spettro ultrarosso e costituzione del 3,5-dimetilpirazolo* ^(*). Nota di PAOLO MIRONE e MARIA VAMPIRI, presentata ^(**) dal Socio G. B. BONINO.

Per quanto ci consta, gli spettri ultrarossi del pirazolo e dei suoi derivati non sono ancora stati oggetto di studio, ad eccezione del 3,5 dimetilpirazolo, il cui spettro è pubblicato nella nota opera *Infrared determination of organic structures* ⁽¹⁾. Un tale studio dovrebbe avere particolare interesse, sia per il confronto degli spettri ultrarossi con gli spettri Raman, esaminati e discussi già nel 1935 da Bonino e Manzoni Ansidei ⁽²⁾, sia in relazione agli interessanti risultati ottenuti da Hayes e Hunter ⁽³⁾ con misure crioscopiche, e da Hückel e Jahnentz ⁽⁴⁾ con misure crioscopiche e di polarizzazione dielettrica, risultati che mostrano l'esistenza di forti associazioni intermolecolari nelle soluzioni dei pirazoli non sostituiti all'azoto.

Ci siamo serviti per le misure di uno spettrofotometro Beckman mod. IR2 a registrazione diretta, usando il monocromatore a prisma in fluoruro di litio nella zona tra 2 e 5 μ , e il monocromatore a prisma in salgemma nella zona tra 5 e 15 μ . Il 3,5-dimetilpirazolo impiegato era di provenienza Eastman Kodak, ed è stato distillato prima delle esperienze. P. F. 1060,5.

La tabella I raccoglie i massimi di assorbimento osservati sulla sostanza allo stato solido, insieme ai massimi dati da Randall, Fowler etc. ⁽¹⁾ e alle righe Raman osservate da Bonino e Manzoni Ansidei per il 3,5-dimetilpirazolo e il pirazolo ^(*).

I campioni solidi sono stati esaminati sia sotto forma di sottile pellicola depositata da una soluzione cloroformica, sia sotto forma di pasta con olio di vasellina.

Le osservazioni sono state estese allo spettro del 3,5-dimetilpirazolo in soluzione di tetracloruro di carbonio e di diossano nella zona intorno a 3 μ . I risultati ottenuti sono raccolti in Tabella II.

La banda a 2,87 μ , appena sensibile nelle soluzioni in CCl_4 a $\gamma = 0,05$ e $\gamma = 0,02$, diviene molto più intensa in una soluzione a $\gamma = 0,0005$, osservata sotto uno spessore di 10 mm.

(*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi del C.N.R. nell'Istituto Chimico « G. Ciamician » di Bologna, diretto dal prof. G. B. Bonino.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1952.

(1) H. M. RANDALL, R. G. FOWLER, N. FUSON, J. R. DANGL, *Infrared determination of organic structures*. New York, p. 223 (1949).

(2) G. B. BONINO e R. MANZONI ANSIDEI, « Atti R. Acc. Naz. Lincei », 22, 438 (1935).

(3) H. T. HAYES e L. HUNTER, « J. Chem. Soc. », 1 (1941).

(4) W. HÜCKEL e W. JAHNENTZ, « Berichte », 75 B 1438 (1942); « Berichte », 77 810 (1944).

TABELLA I.

3, 5 - DIMETILPIRAZOLO				PIRAZOLO	
<i>Spettro ultrarosso</i> (sost. solida)				<i>Spettro Raman</i> (soluz. in CHCl_3 e in CH_3OH) $\bar{\nu}$ (cm^{-1}) (BONINO e MANZONI)	<i>Spettro Raman</i> (soluz. in CHCl_3 , CH_3OH , $(\text{CH}_3)_2\text{CO}$) $\bar{\nu}$ (cm^{-1}) (BONINO e MANZONI)
λ (μ) (questo lavoro)	λ (μ) (RANDALL, etc.)	$\bar{\nu}$ (cm^{-1}) (questo lavoro)	I		
3,14	—	3185	f	—	3149 (2)
3,21	3,21	3115	f	—	—
3,24	—	3086		3081 ($1/2$)	3062 ($1/2$)
3,31	—	3021	f	2995 ($1/2$)	—
3,43	—	2915	f	2933 (5 dif.)	—
3,48	—	2873	f	—	—
—	6,03	(1658)	d	—	—
6,28	6,27	1592	f	—	—
—	6,44	(1553)	d	—	—
6,74	—	1484	f	1475 (3 dif.)	—
7,06	7,05	1416	f	1418 (4)	1395 (2)
				1377 (1)	1354 (3)
7,67	7,66	1304	f	1304 ($1/2$)	—
7,89	7,90	1267	m	—	1259 (4)
8,66	8,66	1155	m	1155 (1 dif.)	1149 (6)
8,70	8,71	1149			
9,55	—	1047	dd	—	—
9,74	—	1027	f	1038 (1)	1041 (1)
9,92	—	1008	f	—	—
10,19	—	981	dd	969 ($1/2$)	969 ($1/2$)
11,70	—	855	f	—	916 (1)
12,81	—	781	f	—	—
13,56	—	737	f	738 (1)	—

La fenditura si restringeva automaticamente durante le registrazioni, assumendo le seguenti larghezze:

a 15μ : 1,08 mm ($6,2 \text{ cm}^{-1}$)

a 10μ : 0,34 mm ($6,8 \text{ cm}^{-1}$)

a 6μ : 0,12 mm ($11,1 \text{ cm}^{-1}$)

a 5μ : 0,64 mm ($14,4 \text{ cm}^{-1}$)

a 3μ : 0,26 mm ($29,0 \text{ cm}^{-1}$)

I valori delle lunghezze d'onda dati con due cifre decimali possono ritenersi esatti entro $\pm 0,01 \mu$, e quelli dati con tre cifre decimali entro $\pm 0,005 \mu$.

TABELLA II.

<i>Spettro ultrarosso in soluzione</i>					
di tetracloruro di carbonio ($\gamma = 0,05$ e $\gamma = 0,02$; sp. = $0,1$ mm)			di diossano ($\gamma = 0,15$; sp. = $0,03$ mm)		
$\lambda (\mu)$	$\bar{\nu} (\text{cm}^{-1})$	I	$\lambda (\mu)$	$\bar{\nu} (\text{cm}^{-1})$	I
2,87	3484	d	3,024	3307	f
3,14	3185	f	3,134	3191	f
3,21	3115	f	3,200	3125	f
3,24	3086		3,234	3092	
3,31	3021	f	—	—	—
3,37	2967	f	—	—	—
3,41	2932		—	—	—
3,43	2915	f	—	—	—
3,49	2865	d	—	—	—
3,60	2778	d	—	—	—
3,63	2725	d	—	—	—
3,84	2604	dd	—	—	—

DISCUSSIONE. — Come abbiamo già accennato, il comportamento crioscopico e dielettrico dei pirazoli non sostituiti in posizione 1 rivela l'esistenza di forti associazioni intermolecolari. Così Hayes e Hunter ⁽³⁾ ottengono per il 3,5-dimetilpirazolo un grado di associazione eguale a 2,3 in soluzioni benzeniche di molalità superiore a 0,3. Essi suppongono che le molecole formino dei dimeri per mezzo di ponti a idrogeno, e che questi dimeri possano esistere in due forme tautomere:



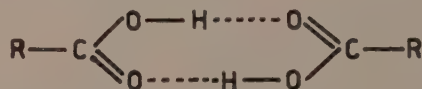
Questo tipo di tautomeria starebbe in accordo con l'identità dei pirazoli sostituiti in posizione 3 e in posizione 5.

Le determinazioni crioscopiche eseguite sul pirazolo da Hückel e Jah-nentz ⁽⁴⁾ danno, se si ammette la formazione di doppie molecole, un grado di associazione del 139 % in soluzione benzenica 0,5 molale, e dell'11 % in soluzione 0,5 molale di diossano. Le misure di polarizzazione dielettrica eseguite dagli stessi autori confermano, nell'ipotesi che le doppie molecole abbiano momento nullo, una totale dimerizzazione delle molecole di pirazolo in soluzione benzenica; invece per le soluzioni in diossano si ricava dai risultati delle misure un momento elettrico troppo piccolo, cui corrisponderebbe circa il 60 % di molecole associate, cioè il sestuplo della percentuale data dalle misure crioscopiche fatte nelle stesse condizioni. Questa discordanza è, secondo gli autori, inspiegabile.

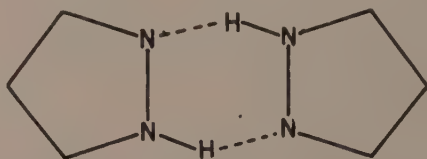
L'esame dello spettro ultrarosso nella zona intorno a $3\ \mu$ conferma qualitativamente i risultati delle misure crioscopiche. Infatti al gruppo NH libero non si può attribuire che la stretta banda a $2,87\ \mu$, la quale compare solo in soluzione di tetracloruro di carbonio, solvente apolare come il benzolo, e acquista un'intensità notevole solo a concentrazioni bassissime ($\gamma = 0,0005$). A concentrazioni dell'ordine di $\gamma = 0,05$, essa è talmente debole che quasi tutte le molecole si possono ritenere associate per mezzo di ponti a idrogeno formati dai gruppi NH.

In soluzione di diossano la banda dell'NH libero manca del tutto e compare invece una intensa e larga banda con massimo a $3,024\ \mu$. Ci sembra ragionevole attribuire questa banda all'oscillazione di gruppi NH impegnati in legami a idrogeno con gli atomi di ossigeno del diossano.

Per l'interpretazione del complesso sistema di bande compreso fra $3,1$ e $3,5\ \mu$, riteniamo utile un confronto con lo spettro d'assorbimento degli acidi carbossilici nella stessa zona. Infatti le molecole degli acidi carbossilici sono anch'esse associate in dimeri ⁽⁵⁾:



che presentano un anello ottoatomico di simmetria C_{2h} . Nelle doppie molecole dei pirazoli si forma invece un anello esaatomico:



il quale però possiede la stessa simmetria C_{2h} dei dimeri degli acidi carbossilici. Ora, lo spettro dell'acido acetico, per esempio, presenta tra 3 e $4\ \mu$ due massimi sdoppiati, a $3,30$ – $3,49\ \mu$ e a $3,71$ – $3,78\ \mu$, oltre a un massimo semplice a $3,91\ \mu$ ⁽⁶⁾. Buswell, Rodebush e Roy interpretano così la presenza

(5) L. PAULING, *Nature of the chemical bond*. Ithaca, 1948, p. 306.

(6) A. M. BUSWELL, W. H. RODEBUSH e M. F. ROY, « J. Am. Chem. Soc. », **60**, 2239 (1938); F. T. WALL e W. F. CLAUSSEN, « J. Am. Chem. Soc. », **61**, 2812 (1939).

dei due doppietti: « If We assume that the hydrogen atoms are placed unsymmetrically in the eight membered ring formed by the two carboxyl groups, i. e., each hydrogen being nearer to the oxygen to which it was originally attached, then there are two modes of vibration involving the stretching of the hydrogen bonds which are active in infrared absorption. Each vibration is antisymmetric with respect to a center of symmetry but they differ in the relative motions of the oxygen atoms on either side of the hydrogen atoms... Because of the fact that there are alternative positions for each hydrogen and consequently a double minimum in the potential energy curve, the doublets themselves might be expected... This is, of course, to say nothing of the possibility of resonance between the O-H and C-H vibrations which have nearly the same frequency. Since the C-H absorption is small this effect is probably unimportant although the C-H absorption might be considerably increased by the resonance itself ».

Analoghe considerazioni si possono fare per l'anello esaatomico della doppia molecola del 3,5-dimetilpirazolo. L'oscillazione simmetrica dei due atomi di idrogeno è inattiva in ultrarosso perchè non modifica il momento elettrico del complesso. Sono invece attive due oscillazioni, antisimmetriche rispetto al centro di simmetria, che differiscono tra di loro per i movimenti relativi degli atomi di azoto legati dal ponte a idrogeno. A queste due oscillazioni si possono attribuire la banda semplice a $3,14\ \mu$, e la banda doppia a $3,21-3,24\ \mu$, che hanno esattamente la stessa intensità. Lo sdoppiamento di una di queste bande potrebbe essere attribuito alla stessa causa che produrrebbe lo sdoppiamento dei massimi degli acidi carbossilici, e cioè al fatto che la curva dell'energia potenziale presenta due minimi.

Se si accetta questa interpretazione delle bande a $3,14$ e a $3,21-3,24\ \mu$, è ragionevole attribuire la banda a $3,31\ \mu$ alla oscillazione di valenza dell'unico gruppo C-H presente nella molecola e le bande a $3,43$ e a $3,48\ \mu$ (che in soluzione presentano una più complessa struttura) alle oscillazioni di valenza dei due gruppi CH_3 .

Il fatto senz'altro più interessante che emerge dal confronto dello spettro ultrarosso con lo spettro Raman del 3,5-dimetilpirazolo è la presenza di una forte banda a $6,28\ \mu$ ($1592\ \text{cm}^{-1}$) e di due bande deboli a $6,03\ \mu$ ($1658\ \text{cm}^{-1}$) e a $6,44\ \mu$ ($1553\ \text{cm}^{-1}$) che non trovano riscontro nello spettro Raman. Queste bande cadono proprio nella zona spettrale corrispondente alle oscillazioni dei gruppi $\text{C}=\text{N}$ e $\text{C}=\text{C}$. La loro assenza in spettro Raman e la presenza, pur con diverse intensità, in ultrarosso, richiama la necessità di una più approfondita discussione sulle oscillazioni proprie dello spettro molecolare pirazolico sia nel pirazolo puro sia in quelli sostituiti. E ciò anche in relazione con le perturbazioni che tali oscillazioni possono subire per effetto dell'associazione intermolecolare delle dette sostanze.

Ringraziamo vivamente il prof G. B. Bonino, il quale ci ha ospitato in questo Centro Studi, ci ha proposto questa ricerca e messo a disposizione i mezzi necessari per eseguirla, e ci ha dato consigli e sviluppato discussioni sui risultati delle esperienze.

Chimica. — *Considerazioni comparative sugli spettri Raman dell'N-acetilpirrolo e dell' α -acetilpirrolo* (*). Nota di PAOLO CHIORBOLI, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

In precedenti lavori⁽¹⁾ sono stati discussi gli spettri Raman dell' α e dell'N-acetilpirrolo, in base ai risultati di varie esperienze, alcune già eseguite molto tempo addietro, altre — e in maggior numero — compiute assai di recente, per rivedere, in migliorate condizioni sperimentali, i risultati più vecchi e per cercar di portare qualche nuovo contributo all'alquanto intricata questione inerente a eventuali fenomeni associativi intermolecolari e a perturbazioni più o meno intense di natura intramolecolare, che i primi spettri di questi composti portavano a supporre come probabili.

Non è nostro intendimento riprender qui tutta la questione, già discussa e in parte chiarita nei citati lavori, soprattutto attraverso lo studio delle soluzioni diluite dei due derivati pirrolici. Però, dato che vogliamo qui esaminare un aspetto particolarmente interessante e delicato degli spettri Raman dei due composti citati, aspetto che è stato solo accennato in quei lavori (essendoci allora riservati di tornare ulteriormente sull'argomento per una più approfondita e più propria discussione), è necessario richiamare taluni punti fondamentali per meglio chiarire il problema.

La caratteristica che subito richiama l'attenzione, nel confronto dei due spettri Raman dell' α e dell'N-acetilpirrolo, è senza dubbio data dal valore profondamente diverso — 1636 e 1715 cm^{-1} circa rispettivamente — della frequenza dell'oscillazione carbonilica per i due composti: particolarità, questa, già messa in rilievo da Bonino e Collaboratori in lavori pubblicati fra il 1933 e il 1937⁽²⁾, anche se i risultati sperimentali fino allora raccolti non consentivano di dire una parola definitiva sulle cause di tale profonda differenza, che ad un primo esame potrebbe essere attribuita a varie cause di natura strutturale.

In sostanza la posizione straordinariamente «bassa» in cui cade la riga carbonilica dello spettro dell' α -acetilpirrolo nei confronti dell'analogia dell'N-acetilderivato deve essere considerata come la conseguenza d'una assai forte perturbazione cui è soggetto il gruppo carbonilico dell' α -acetilpirrolo stesso a differenza di quello dell'N-acetilpirrolo. Per quest'ultima molecola la riga del $\text{C}=\text{O}$ nello spettro Raman si rivela sostanzialmente nella stessa posizione in cui essa compare per le aldeidi alifatiche sature, per

(*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica-fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto chimico «G. Ciamician» dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) CHIGI, CHIORBOLI, questi «Rendiconti» [VIII], 10, 242 (1951); BONINO, CHIORBOLI, questi «Rendiconti» [VIII], 10, 104 (1951).

(2) BONINO, MANZONI, PRATESI, «Z. physik Chem.», 22, 21 (1933); ID. ID., 25, 348 (1934); BONINO, MANZONI, «Ricerca sci.», II, p. 227 (1937).

le quali l'unica perturbazione che può tendere ad abbassare la frequenza dell'oscillazione carbonilica è l'«iperconiugazione» di un gruppo metilico o alchilico in genere adiacente al $C=O$ (acetaldeide, $\omega_{C=O} = 1716 \text{ cm}^{-1}$). Anche, dunque, per l'N-acetilpirrolo sembrerebbe che non intervengano altre fondamentali cause di perturbazione.

Per l' α -acetilpirrolo all'incontro la perturbazione del gruppo carbonilico rivelata dall'effetto Raman è molto intensa, e certo non può non sorprendere lo spostamento fortissimo che la riga del $C=O$ subisce, fino a valori della frequenza che corrispondono alle più intense interazioni di natura «chelativa» che si manifestano ad esempio negli orto-ossiderivati delle aldeidi e dei chetoni aromatici (orto-ossiacetofenone, $\omega_{C=O} = 1638 \text{ cm}^{-1}$). Vogliamo pure osservare che la perturbazione in questione risulta anche parecchio più energica di quella indotta sul $C=O$ del benzofenone dalla coniugazione dei due gruppi fenilici ($\omega_{C=O} = 1653 \text{ cm}^{-1}$). E ricorderemo qui che anche per l' α -pirrolaldeide la riga del gruppo $C=O$ si presenta nello spettro Raman praticamente nella stessa posizione in cui si rivela per lo α -acetilpirrolo (un po' più alta, effettivamente, a circa 1645 cm^{-1} , mancando l'effetto «iperconiugativo» del metile), mostrando così che nei due casi la natura e l'entità della perturbazione è la stessa.

Un risultato particolarmente interessante emerso dalle esperienze di cui abbiamo riferito nei precedenti già citati lavori è lo sdoppiamento della riga carbonilica nello spettro Raman dell' α -acetilpirrolo in soluzione benzenica diluita: le due componenti del doppietto cadono a 1638 e 1660 – 1663 cm^{-1} rispettivamente. Nel caso dell'N-acetilpirrolo invece anche gli spettri delle soluzioni diluite in benzolo rivelano sempre una sola riga carbonilica tra 1715 e 1720 cm^{-1} . C'è, dunque, fra i due acetilderivati, una differenza profonda.

L'interpretazione dello sdoppiamento della riga carbonilica dell' α -acetilpirrolo negli spettri delle soluzioni benzeniche diluite, del tutto analogo e dello stesso ordine di grandezza di quello che si verifica – nelle analoghe condizioni – per la corrispondente riga dello spettro Raman dell' α -pirrolaldeide ⁽³⁾, sembra evidente, ammettendo per l' α -acetilderivato fenomeni di associazione intermolecolare progressivamente attenuati dal solvente inerte. Ad alta diluizione è possibile allora osservare nello spettro Raman una riga carbonilica ascrivibile a molecole «libere» e perciò meno perturbata (di circa 25 cm^{-1} più alta della primitiva riga a 1638 cm^{-1}). In un precedente lavoro ⁽⁴⁾, prendendo in considerazione anche i risultati di nuove esperienze sull' α -pirrolaldeide in soluzione diluita ⁽³⁾ è stata discussa la possibilità che le associazioni in questione si esplicino in modo tale che l'idrogeno iminico d'una molecola faccia da «ponte» con il carbonile d'una seconda molecola. Ciò è pure in accordo col fatto che, secondo recenti esperienze, già precedentemente prese in esame ⁽⁴⁾, le molecole dell'N-acetilpirrolo non si

(3) CHIORBOLI, MORELLI EMILIANI, «Gazz. Chim. ital.», **81**, 906 (1951).

(4) CHIORBOLI, questi «Rendiconti» [VIII], **12**, 92 (1952).

rivelano fra loro associate, sicchè è da ritenere che nel caso dell' α -acetilpirrolo il gruppo iminico prenda parte diretta alle interazioni da cui risulta perturbato il carbonile. Se infatti nell' α -acetilderivato le interazioni riscontrate non si realizzassero tramite il gruppo iminico, esse verosimilmente dovrebbero manifestarsi, in eguale e più attenuata misura, ma pur sempre rilevabile, anche per l'N-acetilpirrolo.

Dai risultati sperimentali che abbiamo qui richiamato, appare intanto chiaro che della forte perturbazione che il gruppo carbonilico dell' α -acetilpirrolo manifesta, si possono ritenere responsabili solo parzialmente i fenomeni associativi già discussi; invero anche la riga carbonilica attribuita al gruppo $C=O$ di molecole « libere » si manifesta in una posizione tutt'altro che « normale », a $1660-1663\text{ cm}^{-1}$, ossia ancora molto bassa, se confrontata con l'analoga riga dello spettro dell'N-acetilpirrolo. Non dunque le associazioni di cui si è parlato possono render ragione del comportamento Ramanspettroscopico profondamente diverso dei due derivati carbonilici. Resta di fatto che nel caso dell' α -acetilpirrolo alle notevoli perturbazioni di carattere intermolecolare si sovrappone una nettissima ed anzi diremmo dominante perturbazione di natura intramolecolare che non si rende manifesta invece nel caso dell'N-acetilderivato.

Tale perturbazione intramolecolare non può ragionevolmente derivare che da una coniugazione assai intensa fra $C=O$ e nucleo pirrolico nel derivato α -sostituito. Invero, perturbazioni d'altra specie, ma sempre di natura intramolecolare, non sembrano da chiamare in causa. Anche eventuali dirette interazioni fra l'idrogeno dell'imino pirrolico e il gruppo $C=O$ della stessa molecola, in una sorta di « chelazione » interna, che in un primo tempo, dopo le prime esperienze che resero manifeste le profonde, interessanti differenze tra i due spettri dell' α e dell'N-acetilpirrolo, si potevano postulare per tentare una spiegazione della singolare caratteristica, non sembra ormai che si possano sostenere, sia per la non favorevole situazione spaziale e le troppo grandi distanze coinvolte (data la struttura geometrica della molecola), sia per il fatto che il gruppo iminico risulta (secondo le esperienze di cui abbiamo riferito) impegnato in nette interazioni intermolecolari. Ora non è il caso di pensare che lo stesso atomo di idrogeno funzioni contemporaneamente da « ponte esterno » e da « ponte interno ».

Dunque, l'unica ipotesi ragionevole atta a spiegare il basso valore della frequenza carbonilica dell' α -acetilpirrolo anche per le molecole libere da reciproche interazioni ($\omega=1660-1663\text{ cm}^{-1}$) è che il sistema di elettroni p_z del gruppo $C=O$ si coniughi profondamente col sestetto aromatico dell'anello pirrolico. E si deve trattar certo d'una coniugazione molto profonda, più profonda di quella fra $C=O$ e nucleo benzenico nell'acetofenone, nel cui spettro Raman la riga carbonilica cade intorno a 1690 cm^{-1} (in soluzione diluita) ⁽⁵⁾. Inoltre, una tale coniugazione non si manifesterebbe più

(5) BONINO, CHIORBOLI, «Memorie Accad. Scienze Bologna». [X], 7, 113 (1949-50).

nel caso in cui il gruppo acetilico sia sostituito all'idrogeno dell'imino pirrolico. Ora questo punto merita, a nostro avviso, una breve discussione, perchè racchiude taluni aspetti di notevole interesse.

Ci sembra utile a tal fine discutere gli schemi che la ormai classica teoria della risonanza può proporci per descrivere la struttura attuale delle due molecole in questione. Non dobbiamo però dimenticare, nella discussione che segue, che gli schemi che la teoria della risonanza ci consente di scrivere, quantunque di notevolissimo valore euristico, sono spesso volte largamente incompleti e insufficienti, data la loro natura modellistica, e solo grossolanamente possono esemplificarci e chiarirci la reale natura quantomeccanica della struttura attuale di legame delle molecole.

Ammettendo per entrambi i derivati che ci interessano la possibilità *a priori* d'una risonanza fra il sistema elettronico del gruppo carbonilico e quello del nucleo pirrolico; si han da considerare, per le principali configurazioni «limiti», gli schemi riportati in fig. 1.

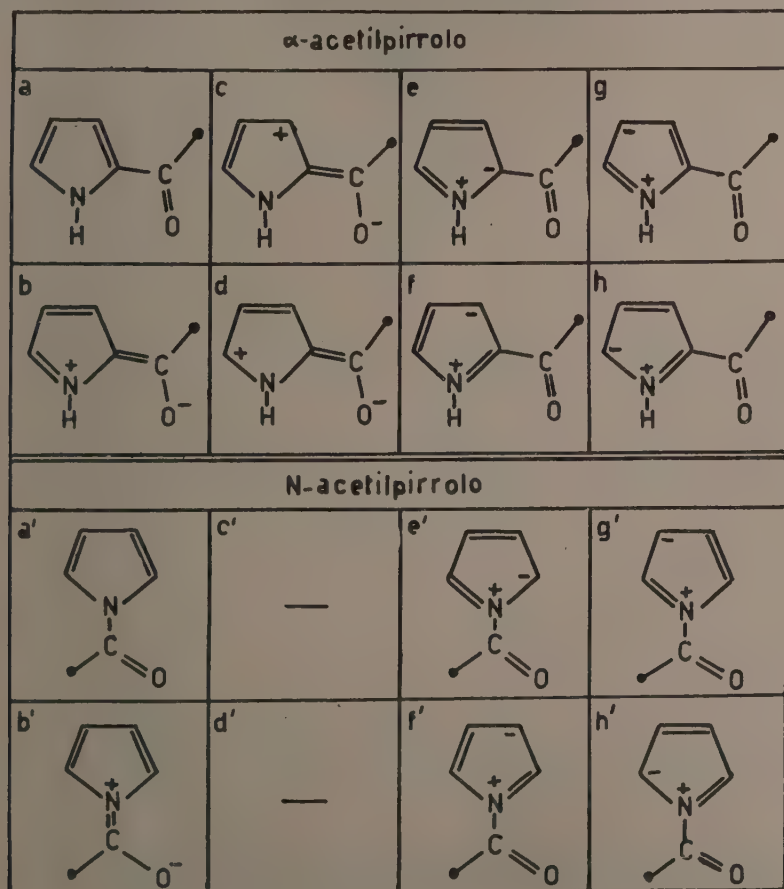
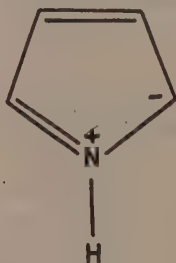
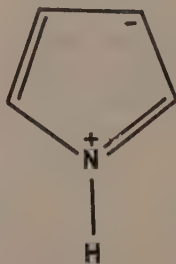


Fig. 1.

Ora le configurazioni «limiti» in risonanza, in cui si può ritenere schematizzato, in via approssimativa, il gioco di notevole perturbazione reciproca dei sistemi elettronici « p_z » del gruppo carbonilico e dell'anello pirrolico, ossia in definitiva la coniugazione fra l'uno e l'altro, sono per l' α -acetilpirrolo, le b , c , d e per l' N -acetilpirrolo la b' . Dette forme contribuiscono a conferire al legame $C=O$ una certa percentuale di «carattere» di semplice legame, e quindi ad abbassare la frequenza dell'oscillazione $C \leftrightarrow O$ rispetto al valore che competerebbe alla frequenza stessa qualora il gruppo $C=O$ non interagisse col nucleo. Il contributo delle forme b , c , d dell' α -acetilpirrolo alla struttura attuale della molecola, secondo gli schemi della risonanza, può ritenersi la causa della posizione piuttosto «bassa» della riga Raman carbonilica, che, come si è visto, cade per le molecole libere a circa 1660 cm^{-1} . Il «peso» della forma b deve ritenersi molto notevole, dato che in essa, con la presenza di un gruppo carbonilico caratterizzato da una elevata elettroaffinità, si stabilizza la struttura di risonanza propria dell'anello pirrolico qui di seguito schematizzata:



struttura che insieme con l'analogia



(e con le altre due simmetriche rispetto a queste) contribuirebbe alla configurazione attuale del pirrolo per circa il 24 per cento, secondo quanto Pauling riporta ⁽⁶⁾ (energia di risonanza corrispondente = 31 Kcal/Mole).

(6) PAULING, *The Nature of the chemical Bond*, Cornell University Press (New York, 1945), pp. 226-27.

Si noti che forme analoghe alle *c* e *d* entrano in gioco anche nella risonanza propria delle molecole dei chetoni benzenici, come appare dagli schemi di fig. 2 relativi all'acetofenone.

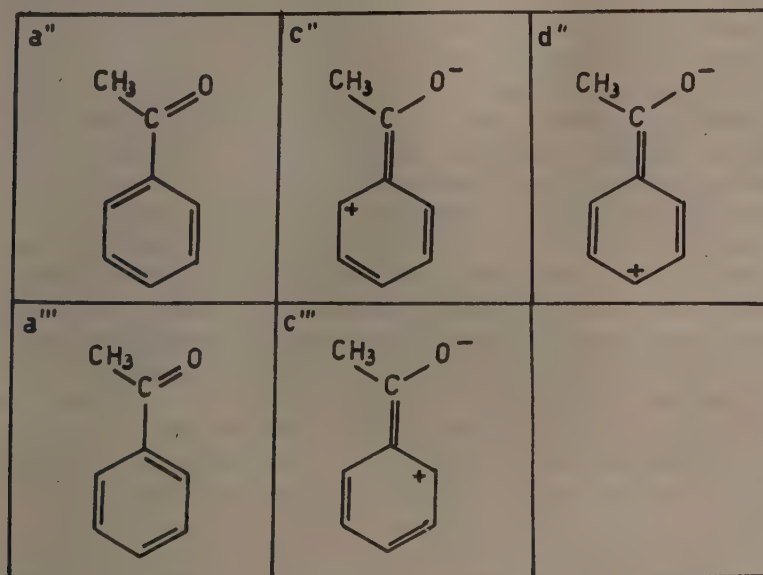


Fig. 2.

Per questi chetoni però, quando non intervengano altri fenomeni di perturbazione, la riga carbonilica non scende a valori tanto bassi della frequenza, quanto per l' α -acetilpirrolo: nell'acetofenone invero essa è a $1680\text{--}90\text{ cm}^{-1}$ ⁽⁵⁾, mentre nell' α -acetilpirrolo è a 1660 cm^{-1} circa. Dunque la coniugazione all'anello pirrolico deprime la frequenza dell'oscillazione del $\text{C}=\text{O}$ più che non la coniugazione all'anello benzenico, e la differenza è tutt'altro che trascurabile (circa 30 cm^{-1}). Anche qui, dunque, si manifesta chiara la importanza del contributo della struttura *b* nel caso dell' α -acetilpirrolo.

Certo sarebbe interessante precisare più quantitativamente queste considerazioni, per poter meglio valutare l'importanza relativa delle diverse forme in risonanza, basandosi sull'energia di ciascuna di esse. Ma una simile valutazione si presenta molto problematica e tale da lasciare non pochi dubbi, date soprattutto le incertezze che si incontrerebbero nel computare il potenziale di ionizzazione dell'atomo di carbonio nello stato $1s^2 \cdot 2s \cdot 2p^3$ (^4S), per il quale bisognerebbe conoscere l'effettiva differenza di energia fra gli stati $1s^2 \cdot 2s^2 \cdot 2p^2$ (^3P) e $1s^2 \cdot 2s \cdot 2p^3$ (^4S). Ora sono note le gravi incertezze che adombrano ancora questo punto e che toglierebbero ad un calcolo siffatto gran parte del suo interesse. Ci sembra perciò più opportuno, in questa sede, limitarci alle considerazioni qualitative sin qui svolte.

È da osservare ancora che le forme e , f , g , h , che pure rispecchiano le risonanze ammesse da Pauling per il nucleo pirrolico, debbono ritenersi meno favorite, data la più forte elettroaffinità dell'ossigeno carbonilico rispetto al carbonio nucleare: queste forme ad ogni modo non influiscono direttamente sulla questione che ci interessa, dato che esse non alterano il carattere di doppio legame del $C=O$.

Ma se per l' α -acetilpirrolo tutto fa ritenere assai notevole il contributo della forma b , non si potrebbe non ritenere *a priori*, secondo gli schemi formali e modellistici della risonanza, altrettanto notevole, nel caso dell' N -acetilpirrolo, il contributo dell'analoga forma b' , qualora, ben s'intende, si parta dal presupposto che il gruppo carbonilico in questa molecola non sia impedito dal coniugarsi all'anello pirrolico da altre cause. Ora a questo proposito bisogna rilevare ancora una volta che la posizione assai «alta» della riga carbonilica nello spettro Raman di questa molecola sembra esser propria di un gruppo $C=O$ che solo risenta della perturbazione indottavi dal metile adiacente. Una diretta interazione fra il sistema elettronico del gruppo carbonilico e quello dell'anello pirrolico, nel senso di una coniugazione reciproca, quale risulterebbe schematizzata ad esempio nella struttura b' , dovrebbe far sentire il suo peso con un effetto spettroscopicamente rilevabile, ossia con una non trascurabile depressione della frequenza della oscillazione carbonilica, che dovrebbe risultare meno lontana da quella propria dell' α -acetilpirrolo.

Che la riga del $C=O$ dell' N -acetilpirrolo debba risultare più alta di quella dell' α -derivato appare ben comprensibile anche in base alla discussione ora fatta - e che deve ritenersi, ad ogni modo, solo grossolanamente qualitativa e di puro valore indicativo - sulla traccia degli schemi della risonanza. Infatti alla depressione del carattere di doppio legame del $C=O$ contribuiscono per l' α -acetilderivato configurazioni di legame come le c , d , che non si possono costruire per il derivato sostituito all'azoto. Ad ogni modo, secondo le considerazioni che precedono, anche la oscillazione del gruppo carbonilico nella molecola dell' N -acetilpirrolo dovrebbe risentire in certa misura della coniugazione col nucleo pirrolico, se questa - ripetiamo - non fosse impedita da altre cause, essendo verosimilmente non trascurabile il contributo d'una forma di tipo b' .

Un tale effetto invece non si verifica: il gruppo $C=O$ dell' N -acetilpirrolo oscilla con una frequenza che non manifesta alcuna perturbazione di carattere coniugativo.

A questo punto, dato il risultato di fatto, ormai acquisito da molte esperienze compiute nelle più svariate condizioni, si è portati a trarre la conclusione seguente, che non chiudendo ancora il problema, può tuttavia indirizzare su terreno fecondo le ulteriori indagini che potrebbero essere definitivamente chiarificatrici.

I casi che ormai si presentano sono due: o gli schemi della risonanza, secondo cui abbiamo dedotto quanto precede, sono nel nostro caso (e non sarebbe certo l'unico) assolutamente inadeguati a descrivere la configura-

zione attuale di legame delle molecole considerate e qualcosa di eminentemente quantistico, che sfugge alla rappresentazione sostanzialmente modellistica di quegli schemi, produce, nel vario gioco della perturbazione quantica degli elettroni « p_z » delle molecole in questione, l'effetto osservato e a prima vista non facilmente esplicabile, oppure la coniugazione fra C = O e nucleo pirrolico nell'N-acetilderivato è impedita da ragioni non quantomeccaniche ma puramente strutturali. In questo secondo caso si dovrebbe ammettere per l'N-acetilpirrolo una struttura non piana, col gruppo C = O insomma non giacente nel piano dell'anello, e questo evidentemente potrebbe anche portare a riconsiderare, da un punto di vista critico, la dibattuta questione della reale struttura dell'anello pirrolico e dell'effettiva giacitura dell'idrogeno iminico.

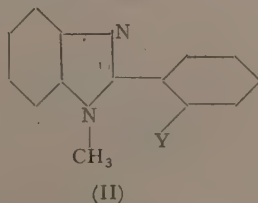
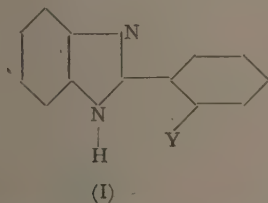
In tal senso appunto abbiamo eseguito una serie di calcoli quantomeccanici per vedere se le condizioni profondamente diverse di coniugazione fra C = O e nucleo pirrolico per i due acetilderivati siano in qualche modo previste o richieste dalle teorie quantiche del legame chimico e delle strutture molecolari.

Su questi calcoli riferiremo in altra Nota.

Ringrazio il Direttore del Centro Studi, prof. G. B. Bonino, per il suo interessamento, le discussioni e i consigli.

Chimica. — *Effetti sterici e ponte d'idrogeno nella serie dei benzimidazoli*^(*). Nota di ANGELO MANGINI e FERNANDO MONTANARI, presentata^(**) dal Socio G. B. BONINO.

In una recente Nota in corso di stampa su questi « Rendiconti »⁽¹⁾, abbiamo riassunto il comportamento spettrale di una numerosa serie di benzimidazoli e di fenil-benzimidazoli, sostituiti in Bz- o nel fenile. Fra l'altro, fu rilevato che il 2-nitro-fenil-benzimidazolo (I: Y = NO₂),



non presentava l'atteso effetto sterico, ben evidente invece nel 2-metil- e nel 2-cloro-derivato (form. I: Y = CH₃, Cl): questo fatto fu messo in relazione colla possibilità di formazione di un ponte di idrogeno fra l'ossigeno

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Bologna col contributo del C. N. R.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1952.

(1) Vol. XII, fasc. 4, pp. 411-419 (1952).

dell' NO_2 e l'idrogeno imminico, idea già avanzata da Wiegand e Merkel per l'o-metossi-derivato (form. I, $\text{Y} = \text{OCH}_3$)⁽²⁾. Anche per l'o-amino-derivato (form. I, $\text{Y} = \text{NH}_2$), come ora abbiamo potuto constatare, si osserva un contegno spettrale analogo all'o-nitro composto, specie quando confrontato col derivato (fenil)-p-aminato.

Per quanto riguarda l'o-nitro-fenil-benzimidazolo, è notevole sotto-lineare che il comportamento spettrale in soluzione alcalina e acida si può considerare anomalo: esso, infatti, subisce un notevole spostamento batocromo in soluzione acida e ipsocromo in soluzione alcalina, quando invece avviene il contrario per il p-nitro-composto (e per il m-nitro-), ed in genere per tutti gli altri composti della serie⁽³⁾ (i $\Delta\lambda$ si riferiscono alla soluzione alcolica: m μ)

	o-Nitro	m-Nitro	p-Nitro
HCl N/1000, $\Delta\lambda$:	+ 39	- 9	- 26
NaOH N/1, $\Delta\lambda$:	- 19	+ 6	+ 36

Il nitro-gruppo in 2- nel fenile deve essere quindi sostanzialmente «diverso» da quello in 4- (e in 3-).

Pur non essendo noti tutti i parametri necessari, si può costruire - usando ragionevoli approssimazioni - il disegno quotato del modello molecolare (disposizione cis-: ved. III a), o comunque definire i limiti entro i quali, di massima, può variare la distanza $\text{O}_{(\text{NO}_2)} \cdots \text{H}_{(\text{NH})}$: orbene, questa risulta inferiore a 1 Å, o cade in un ordine di grandezza tale che la lunghezza del legame $\text{O} \cdots \text{H}$ è compatibile con quella dei comuni ponti d'idrogeno.

Queste considerazioni, sulla base della geometria molecolare, sono favorevoli all'ipotesi fatta, anche se il nuovo legame $\text{O}_{(\text{NO}_2)} \cdots \text{H}_{(\text{NH})}$ porta a un ciclo a 7 atomi: peraltro, questo ciclo contenendo due angoli (quelli adiacenti al nucleo imidazolico) maggiori di 120° viene a essere «slargato», ciò che aumenta la possibilità di formazione del ciclo a 7.

Nell'aspetto sperimentale del problema è notevole osservare che nell'N-metil-derivato (form. II, $\text{Y} = \text{NO}_2$), ove ovviamente il ponte di idrogeno non può formarsi, l' NO_2 importa l'atteso effetto sterico (cfr. tabella I), tanto che al posto della banda a 339 m μ si ritrova, appena evidente, una larga inflessione a 335-340 m μ , con intensità assai bassa; inoltre, in soluzione acida (HCl-N/1000) lo spettro non viene spostato verso il rosso come nel caso del composto non-N-metilato, ma subisce, come il p-nitro-composto, una retrocessione, pur se assai piccola ($\Delta\lambda$: orto- NO_2 , -4 m μ ; para- NO_2 , -22 m μ).

Ovviamente, l'interferenza sterica del CH_3 -imminico coll'idrogeno in orto- del fenile è uguale a quella dell'idrogeno imminico col CH_3 -fenilico: di qui le medesime caratteristiche spettrali dell'N-metil-fenil- e dell'o-

(2) Riportato da A. VAN DORMAEL, «L'Industrie chim. Belge», XV, 113 (n. 3, 1950); cfr. pure: «Liebigs Ann.», 557, 246 (1947).

(3) Dati ancora inediti.

metil-fenil-imidazolo. Dalla stessa interferenza sterica presumibilmente provengono anche le modificazioni spettrali del p-amino- e del p-nitro-derivato N-metilati, rispetto ai derivati non-metilati: tanto più che la sostituzione del metile all'idrogeno nel benzimidazolo (N- e C-metil-) non modifica praticamente lo spettro

benzimidazolo	244-3.77	266-3.58	272-3.74	279-3.80
N-Metil-	254-3.78	266-3.63	274-3.70	281-3.70
C-Metil	243-3.79	—	274-3.80	280-3.86

TABELLA I.

$ \begin{array}{c} \text{C}_6\text{H}_4 \begin{array}{c} \diagup \text{N} \diagdown \\ \diagdown \text{N} \diagup \end{array} \text{C}_6\text{H}_4\text{---Y} \\ \\ \text{X} \\ \text{(form. I, II)} \end{array} $	Y in orto- X		Y in meta- X	Y in para- X	
	H	CH ₃	H	H	CH ₃
Y = H (a)	303-4.47	289-4.25	303-4.47	303-4.47	289-4.25
CH ₃ (a)	287-4.17	—	304-4.38	305-4.41	—
Cl (a)	290-4.16	—	307-4.37	308-4.42	—
OCH ₃ (a)	314-4.35	—	306-4.35	308-4.47	—
NH ₂	346-4.03	315-3.85	—	318-4.49	305-4.39
NO ₂	339-4.01	(*) 281-4.11	306-4.32	347-4.23	327-4.17

(a) I valori per X = H, sono tratti dalla comunicazione precedente.

(*) 335-340 m μ , log ϵ = 3.2 (circa).

A parte la situazione dell'o-nitro-fenil-benzimidazolo, rimane ancora aperto il problema sulla possibilità di formazione del legame $\text{H} \cdots \text{O}_{(\text{OCH}_3)}$ (formula I, Y = OCH₃) e $\text{H} \cdots \text{O}_{(\text{OH})}$, come vorrebbero Wiegand e Merkel⁽²⁾, e in particolare di quello $\text{H} \cdots \text{N}_{(\text{NH}_2)}$ (formula I, Y = NH₂), come potrebbe appunto far pensare il notevole effetto batocromo indotto dal gruppo amminico (banda verso le maggiori lunghezze d'onda).

La situazione è piuttosto complessa e di non facile discriminazione, ma a parer nostro può essere considerata sotto i seguenti aspetti:

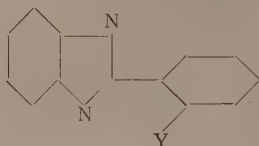
a) Secondo il modello molecolare utilizzato per l'NO₂ (v. prima), le distanze $\text{H} \cdots \text{O}$ e $\text{H} \cdots \text{N}$ risulterebbero dell'ordine di 2 Å: valore troppo elevato per un « ordinario » legame idrogenico, a meno che il « normale » ciclo-esatomico che in tali casi si formerebbe non possa giustificare le « deformazioni » dei vari parametri interessati alla formazione del ponte.

Tali deformazioni, peraltro, dovrebbero essere sufficientemente «notevoli» affinché il predetto valore di 2 \AA possa essere dimezzato - o quasi - per rientrare in quello consueto.

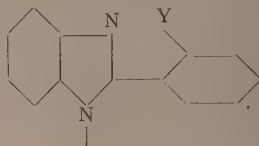
Su tale piano l'ipotesi del legame idrogenico appare poco giustificata.

b) La formazione del ponte a spese dell'O (dell' OCH_3 o dell' OH) o dell'N (dell' NH_2), pur facilitando la planarità della molecola, dovrebbe presumibilmente - e almeno nei casi in esame - tendere a diminuire la coniugazione.

c) La molecola, inoltre, non è detto debba avere sempre la disposizione «cis» (III *a*), come ammessa per l'o-nitro-composto)



cis- (III *a*)



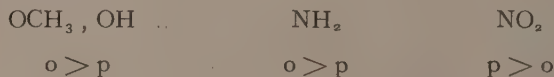
trans- (III. *b*)

Nella forma trans- (III *b*), l'influenza sterica dei sostituenti NH_2 e OCH_3 coll'azoto è assai più ridotta rispetto a quella degli stessi sostituenti coll'H-iminico; e perciò l'effetto batocromo di questi due sostituenti ($\text{NH}_2 \gg \text{OCH}_3$; analogamente per l' OH), può farsi rientrare nei casi del «normale» effetto operato da tali gruppi. Peraltro, è ovvio che la disposizione cis- (III *a*), postulata nel caso dell'o-nitro-composto, è favorita dalla formazione del ponte.

d) L'effetto provocato dalla N-metilazione è sempre evidentemente ipsochromo: ciò è consistente col fatto che l'N-metile provoca, come già abbiamo osservato, una forte interferenza sterica già coll'H-fenilico.

Però, nel caso dell' NH_2 (formula II, $\text{Y} = \text{NH}_2$) lo spostamento della banda è sempre evidente, quando nel caso dell'o- NO_2 (formula II, $\text{Y} = \text{NO}_2$) la banda $339 \text{ m}\mu$ praticamente scompare.

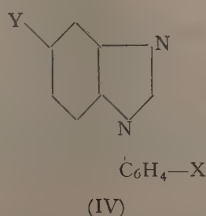
Tutti questi fatti sono concordi nel far ritenere che - nei riguardi del legame idrogenico - la situazione dell'o-nitro-fenil-benzimidazolo (non-metilato: form. II, $\text{Y} = \text{NO}_2$) non è «proprio identica» a quella degli altri orto-sostituiti, tanto più che lo spostamento della banda (quella verso le minori frequenze) segue l'ordine



ed è anche noto che l'effetto spettrale della coniugazione per un cromoforo comprendente l' NO_2 si risolve di regola con uno spostamento batocromo orto- $>$ para- (cfr. gli o- e p-chinoni, e tutti gli altri composti similmente formulabili).

In ogni caso, gli spettri i. r. e Raman potrebbero caratterizzare la vera situazione, e in tal senso sono ora orientate alcune nostre ricerche.

Quando dai C-fenil-benzimidazoli si passa agli N-fenil-derivati-IV ($Y=H$) la banda nella regione $300\text{ m}\mu$, e oltre, scompare del tutto, e si ripresenta – sia pure molto meno accentuata – la struttura fine del benzimidazolo nella regione $280\text{ m}\mu$, all'incirca colla stessa intensità; permane invece la banda nella regione $240\text{ m}\mu$ praticamente inalterata, pur se come massimo relativo assai più pronunciata. Anche nel caso dei nitro-sostituiti (form. IV, $Y = \text{NO}_2$) la banda $303\text{ m}\mu$ del composto non fenilato non viene modificata.



A parte le intensità, l'assorbimento degli N-fenil-benzimidazoli-IV si avvicina molto più a quello dei benzimidazoli che a quello dei C-fenil-derivati.

Nella seguente tabella II sono riportate le caratteristiche spettrali degli N-fenil-benzimidazoli-IV.

TABELLA II.

a)	form. IV: Y = H (1)					
X	orto-		meta-		para-	
H	245-4.22		245-4.22		245-4.22	
CH ₃	247-3.98		—		244-4.21	
Cl	247-4.07		250-4.25		251-4.32	
OCH ₃	246-4.03		—		244-4.23	
b)	form. IV: Y = NO ₂ (2)					
H	241-4.37	303-3.97	241-4.37	303-3.97	241-4.37	303-3.97
CH ₃	239-4.40	302-3.99	239-4.40	307-3.99	241-4.37	309-3.97
Cl	240-4.41	299-3.99	242-4.38	302-3.98	243-4.41	305-3.99
OCH ₃	238-4.34	306-3.98	242-4.35	305-3.98	239-4.37	309-3.94

(1) Bande di struttura fine a ~ 275 e ~ 280 ; lg ϵ da 3.65 a 3.90; pel composto non-fenilato, v. prima.

(2) Nel composto non-fenilato: 235-4.30; 303-3.97.

Questi numeri mostrano che:

1° la N-fenilazione, come del resto la C-fenilazione, non sposta significativamente la posizione della banda verso le minori λ , pur elevandone la intensità: serie $a) - b)$;

2° per i composti della serie $a)$ il sostituito in orto- nel fenile, importa un effetto «orto» limitato alla intensità della banda: per i composti della serie $b)$, invece, le intensità non sono praticamente modificate;

3° la banda comprendente il cromoforo NO_2 , composti della serie $b)$, non viene modificata dalla presenza del sostituito nell'N-fenile.

Ciò è consistente col fatto che l'N-fenilico non può trasmettere che l'effetto induttivo del fenile al resto della molecola. Nella C-fenilazione invece le cose procedono diversamente (cfr. tabella I e II), avendosi di regola dei fenomeni coniugativi fra il C-fenile e il residuo benzimidazolico.

Anatomia. — *Numero e spessore delle fibre mieliniche destinate a muscoli resi funzionalmente inattivi*^(*). Nota di GUIDO FILO-GAMO e FERDINANDO VIGLIANI, presentata ^(**) dal Socio G. LEVI.

Le correlazioni tra fibre nervose e muscoli da esse innervate sono molto intime; vari dati sperimentali e desunti dall'anatomia patologica lo dimostrano. Muscoli enervati si atrofizzano rapidamente, come dimostrano ricerche antiche e recenti; tra le ultime ricorderemo quelle della Tower⁽¹⁾. Procede molto più lentamente, ma è pure sensibile, il fenomeno inverso: l'atrofia cioè delle fibre nervose degli amputati di un arto nei quali il territorio periferico di innervazione fu eliminato in via definitiva. Le ricerche sperimentali di P. Weiss e Collaboratori, di Z. Y. Young e Collaboratori lo hanno confermato^{(2) (3)}.

I tronchi periferici sono, come è noto, costituiti da fibre di spessore vario, distribuite statisticamente secondo il diametro in modo differente da nervo a nervo, ma relativamente costante per un determinato nervo in condizioni normali: Se il territorio di innervazione periferica viene eliminato, si ha in tal caso un mutamento dello spettro del nervo; ma se le connessioni periferiche vengono ristabilite si ritorna allo spettro normale.

Che la maggiore estensione del territorio periferico si ripercuota sulla grandezza del pirenoforo del neurone corrispondente, fu brillantemente dimostrato da T. Terni⁽⁴⁾ nei gangli sensitivi che innervano la coda rige-

(*) Dall'Istituto di Anatomia Umana Normale dell'Università di Torino.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) S. TOWER, «Am. J. Anat.», LXI, 1, 44 (1935).

(2) P. WEISS, M. V. EDDS, M. CAVANAUGH, «Anat. Rec.», XCII, 215, 233 (1945).

(3) P. WEISS, M. V. EDDS jr., «Am. J. Phys.», CXLV, 587, 607 (1946); J. Z. YOUNG, Lancet, 109 (1946).

(4) T. TERNI, «Arch. It. Anat.», XVII, 507, 543 (1920).

nerata dei sauri ed A. Stefanelli lo ha di recente confermato per i neuroni radicolari motori. A. Benninghoff⁽⁵⁾ ha egli pure dimostrato un aumento di volume delle cellule radicolari motrici del topo quando i muscoli da tali cellule innervati vanno incontro ad un processo di ipertrofia funzionale. Se però in queste condizioni di maggiore estensione del territorio periferico innervato e di ipertrofia dei muscoli si abbia pure un aumento di spessore (ed eventualmente di numero) delle fibre nervose, è incerto (D. Duncan, A. Wedeles, M. V. Edds jr.^{(6) (7) (8)}).

Ci siamo proposti di studiare il problema dei rapporti di interdipendenza tra fibre nervose e territorio innervato, col paragonare lo spessore delle fibre mieliniche, le quali innervano muscoli in via di atrofia da inazione, con quello delle fibre corrispondenti degli omologhi tronchi contro-laterali connessi a muscoli ipertrofici per effetto di un'attività funzionale superiore alla norma.

TECNICA. — In un cane maschio di 3 anni circa di età e di Kg. 10,3 di peso, l'arto anteriore sinistro fu riposto, previo scuoiamento, in una tasca muscolo-cutanea appositamente preparata sulla parete laterale del tronco. Si ebbe una guarigione « per primam » della ferita operatoria; le condizioni generali dell'animale si mantennero ottime sino alla fine. L'animale venne sacrificato 150 giorni dopo l'intervento; il suo peso all'autopsia raggiunse i Kg. 10,6. L'estremità operata risultò completamente immobile, tranne i limitati spostamenti attivi e passivi che ancora le erano possibili grazie alla lassità del connettivo circostante. Nella posizione assunta dall'arto dopo fissazione al tronco, l'articolazione del gomito e quella radio-carpica furono costrette a mantenere un invariabile atteggiamento in lieve flessione. Tutti i muscoli anteriori dell'avambraccio permasero quindi per 5 mesi in completo rilassamento: essi, paragonati ai loro omonimi contro-laterali, risultavano alla fine dell'esperimento notevolmente ipotrofici (tabella I). Dei muscoli delle loggie laterali e posteriori, seppure tutti inattivi, alcuni furono sottoposti ad un ininterrotto stiramento, altri invece assunsero, dopo fissazione, un'atteggiamento indifferente; altri ancora si trovarono immobilizzati, come gli anteriori, in distensione. Nelle suddette condizioni sperimentali si determinò dal lato immobilizzato una spiccata ipertrofia dei muscoli fissati in trazione ed un'ipotrofia più o meno sensibile di quelli rimasti in posizione indifferente o rilassata (tabella II). Questi nostri risultati sperimentali concordano con quelli di C. Froboese⁽⁹⁾ il quale ha dimostrato la possibilità, a tutta prima sorprendente, di ottenere una ipertrofia del tutto sovrapponibile a quella tipica da lavoro in muscoli inattivi, qualora essi siano stati immobilizzati in stato di tensione, mediante

(5) A. BENNINGHOFF, « Ztsch. f. Naturfor. », VI b, 38, 41 (1951).

(6) D. DUNCAN, « J. Comp. Neurol. », LIX, 47, 60 (1934 a); *Id.*, LX, 437, 471 (1934 b).

(7) C. H. A. WEDELES, « J. Anat. a. Phys. », LXXXIII, 57 (1949).

(8) M. V. EDDS jr., « J. Comp. neurol. », XCIII, 259, 275 (1950).

(9) C. FROBOESE, « Beit. z. path. Anat. » LXXI, 170, (1923).

fissazione delle articolazioni corrispondenti in posizione opportuna. Il muscolo infatti non ha tendenza ad adattarsi alle nuove condizioni meccaniche mediante congruo allungamento sino a riacquistare il suo tono basale, ma reagisce invece ipertrofizzandosi in maniera apprezzabile già nel corso di poche settimane.

TABELLA I.

Mm. innervati dal N. Mediano		Peso gr.	Area Trasversa Mx. mm ²	Differenze in % dei Mm. di S. rispetto ai loro controlli di D.	
				gr.	mm ²
M. flessore radiale del carpo . . .	D	3,49	90	— 35	— 40
	S	2,25	54		
M. flessore sup. delle dita	D	8,18	90	— 67	— 65
	S	2,72	31		
M. flessore prof. delle dita	D	13,83	128	— 55	— 53
	S	6,25	60		
TOTALE . . .	D	25,50	308	— 63	— 53
	S	11,22	145		

TABELLA II.

Mm. innervati dal N. Radiale		Peso gr.	Differenze % in gr. dei Mm. di S. rispetto ai loro controlli di D.
	D	8,27	+ 50
M. estensore radiale del carpo	S	12,39	
M. abduuttore e corto-estensore del pollice . .	D	1,79	— 30
	S	1,25	
M. estensore comune delle dita	D	3,92	+ 15
	S	4,50	
M. estensore esterno delle dita	D	1,50	— 8
	S	1,40	
M. estensore cubitale del carpo	D	4,82	— 46
	S	2,60	
TOTALE . . .	D	20,34	+ 8,7
	S	22,12	

Ci è parso che il nervo mediano di quest'animale, destinato per la massima parte ai muscoli antibrachiali anteriori, dal lato immobilizzato intensamente ipotrofici, si prestasse assai bene allo scopo della nostra ricerca.

Il materiale fu prelevato immediatamente dopo la morte dell'animale. I nervi, dei due lati, furono fissati con acido osmico. Furono eseguite sezioni trasverse di un tratto di nervo di 1 cm. circa; alcune fette di ciascun nervo furono fotografate allo stesso ingrandimento (600 \times); su di esse vennero contate tutte le fibre mieliniche e misurato il loro diametro.

RISULTATI E DISCUSSIONE. — L'inazione ottenuta con la tecnica su descritta ha determinato intensa ipotrofia dei muscoli flessori della regione

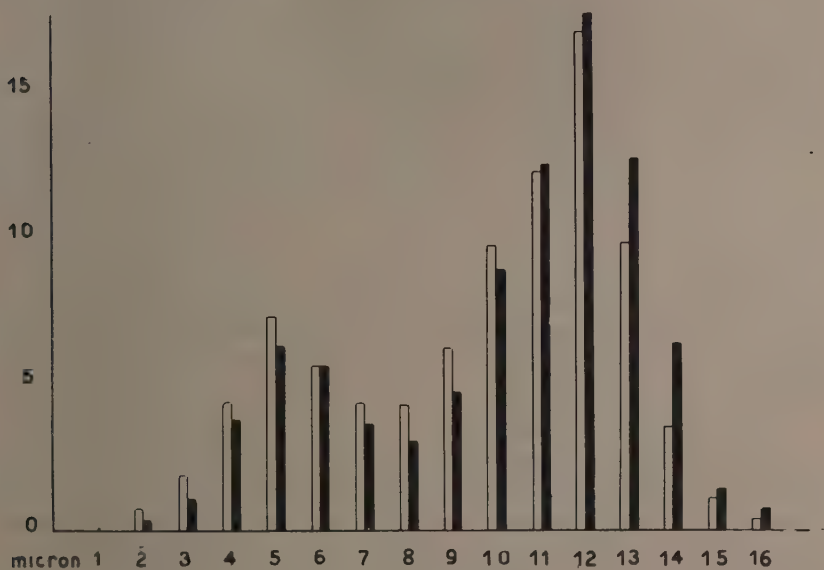


Fig. 1. — Distribuzione statistica secondo lo spessore delle fibre nervose mieliniche dei rami del nervo mediano destinati ai muscoli ipotrofici (colonnine bianche) e controlaterali omologhi ipertrofici (colonnine nere).

anteriore dell'avambraccio sinistro. L'entità di questa ipotrofia è stata valutata paragonando il peso e l'area massima di sezione dei muscoli inattivi con i corrispondenti valori dei muscoli controlaterali funzionanti. Le cifre così ottenute e riportate nella fig. 1 hanno un significato puramente orientativo, quali indici dell'ipotrofia dei muscoli flessori del lato inerte, in quanto il secondo termine di paragone da noi impiegato per calcolarle era rappresentato da muscoli certamente ipertrofici dopo 5 mesi di aumen-

tata attività vicariante ⁽¹⁰⁾. Sta di fatto tuttavia che le differenze determinate dall'esperimento tra i muscoli dei due lati mantengono ai fini della nostra ricerca tutta la loro importanza.

Come risulta dalla fig. 1 (e con le riserve pregiudiziali suddette) i muscoli di tipo flessorio facenti parte della loggia anteriore dell'avambraccio inerte appaiono, rispetto ai controlli, ridotti a meno della metà in peso totale: la loro superficie trasversa massima denuncia essa pure uno scarto in meno di circa il 50 per cento.

Le fibre mieliniche dei rami del nervo mediano destinati ai muscoli presi in considerazione risultarono al conteggio essere 1495 dal lato ipotrofico, 1445 da quello ipertrofico. I dati ottenuti dalla misurazione del diametro trasverso di tutte le fibre sono stati ordinati in classi a seconda del loro valore numerico, attribuendo ad ogni classe il modulo di 1 micron. Si sono così composte 15 classi da 2 a 16 micron: per ogni classe è stata quindi calcolata la densità relativa, cioè quante fibre, su 100 dell'intera seriazione, cadono in una singola classe. Nella fig. 1 sono riassunti in diagrammi i risultati definitivi di queste operazioni.

La curva che si ottiene riunendo con una linea spezzata la sommità delle colonnine *bianche* (riferentesi al nervo del lato immobilizzato) e quella che si ricava con lo stesso procedimento dalle colonnine *nere* (pertinenti invece al lato funzionante) sono entrambe nettamente bimodali, con due classi di maggiore frequenza percentuale rispettivamente a 5 ed a 12 μ . Il minimo assoluto risulta bilateralmente di 2 μ , il massimo di 16 μ . Il diametro medio aritmetico è di 9,52 μ dal lato ipotrofico e di 10,1 μ dal lato ipertrofico. La classe di minore frequenza cade a 8 μ in ambedue le curve. Dalla parte ipotrofica il 27,5 per cento delle fibre è più piccolo di 8 μ , mentre dalla parte ipertrofica il 23,5% delle fibre soltanto è al di sotto di questa misura.

L'andamento generale della curva è interamente sovrapponibile dai due lati. Confrontando partitamente le singole classi si rileva che in tutte le classi fino a 10 μ si ha una maggiore frequenza percentuale dal lato ipotrofico, mentre nelle successive sino a 16 μ ed in particolare in quelle di 13 e di 14 μ , le fibre sono più numerose dal lato funzionante.

I risultati di queste ricerche dimostrano che l'ipotrofia da inazione dei muscoli, quand'anche raggiunga un considerevole grado e venga protratta per un tempo molto lungo, non determina mutamenti significativi del diametro delle fibre mieliniche dei nervi corrispondenti. Se le connessioni mioneurali si mantengono integre, il numero e la distribuzione statistica secondo lo spessore delle fibre nervose mieliniche, non subiscono mutamenti di rilievo. Allo stato attuale delle nostre ricerche, che necessitano conferma su una più ricca casistica, pensiamo di poter trascurare la dimi-

(10) Il grado di ipertrofia di questi ultimi muscoli è purtroppo non apprezzabile sulla base delle nostre ricerche, ma si dovrebbe aggirare, secondo l'opinione del Benninghoff, sul + 15, + 25 % rispetto alla norma.

nuzione del numero percentuale di fibre nelle classi di 13-14 μ dalla parte inattiva rispetto a quella funzionante: non solo per la lieve entità della differenza, ma anche perchè non vi sono altri più chiari segni di atrofia delle fibre nervose. Infatti, le fibre che si distribuiscono ai muscoli ipotrofici, non sono in numero minore di quelle destinate ai muscoli controlaterali ipertrofici; nè si è ridotto il diametro minimo assoluto. Si deve perciò ritenere che nessuna fibra abbia perduto la guaina mielinica e che non si siano assottigliate le fibre più piccole. D'altra parte, poichè il diametro trasverso massimo assoluto è di 16 μ bilateralmente, è evidente che l'ipotrofia del muscolo non ha influito neppure sul calibro delle fibre nervose più grosse.

Infine la maggior frequenza percentuale per ciascuna delle due popolazioni, dopo 150 giorni di esperimento, è rimasta nelle classi di 5 e rispettivamente di 12 μ da ambedue i lati, pur essendosi stabilita nello stesso periodo di tempo una grave ipotrofia muscolare dal lato sospeso ed una sicura ipertrofia dall'altro.

Da queste nostre ricerche si deduce che il fattore determinante la diminuzione di spessore delle fibre nervose, in tutti i casi nei quali sono stati modificati i normali rapporti tra nervo e muscolo, è la scomparsa della sinapsi. Nei nostri esperimenti, nonostante la grave ipotrofia delle fibre muscolari, la sinapsi evidentemente persisteva: ed effettivamente lo spessore delle fibre nervose non risultò mutato.

Biologia. — *Rilievi e considerazioni sugli effetti della interruzione dei rapporti vascolari e nervosi fra ipotalamo ed ipofisi nel maschio del Tritone crestato*^(*). Nota di VALDO MAZZI, presentata^(**) dal Socio N. BECCARI.

INTRODUZIONE. — Mi sono occupato di recente⁽¹⁾ degli effetti di lesione ipotalamiche variamente localizzate sull'ipofisi e sul testicolo del Tritone crestato. Una delle esperienze condotte consisteva nella introduzione, in corrispondenza o in vicinanza dell'eminenza mediale, di un ostacolo rappresentato da una laminetta di carta. Questo tipo di esperimento poteva considerarsi analogo a quelli condotti da Dott (1923)⁽²⁾, Westmann e Jacobsohn (1938)⁽³⁾ e da Harris (1949)⁽⁴⁾, 1950⁽⁵⁾ nei Mammiferi, consistenti nella introduzione di un ostacolo fra gli opposti monconi del peduncolo ipofisario sezionato. Nell'uno e nell'altro caso l'ostacolo interposto determinava

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) « Arch. Ital. Anat. Embriol. », 57, 1 (1952).

(2) « Quart. J. expt. Physiol. », 13, 241 (1923).

(3) « Acta Pat. Microbiol. Scand. », 15, 301 (1938).

(4) « Nature », 163, 70 (1949).

(5) « J. Physiol. », 111, 347 (1950).

una interruzione dei vasi portali ipofisari e del fascio ipotalamo-ipofisario, impedendone la successiva, eventuale rigenerazione. Discutendo i risultati dell'esperienza (e cioè la mancata ripresa della spermatogenesi in serra, nel 66,7 per cento dei casi), supposi che la durata dell'esperienza stessa fosse stata troppo breve per consentire la eventuale rigenerazione dei vasi portali; nel presupposto, appoggiato dei risultati conseguiti nel complesso degli esperimenti eseguiti, che riteneva valida l'ipotesi della regolazione neuromorale ipotalamica dell'attività adenoipofisaria, tramite i vasi portali (cfr. per notizie bibliografiche Harris 1948 ⁽⁶⁾, Galgano e Mazzi, 1951 ⁽⁷⁾).

Sembrava quindi desiderabile intraprendere con identica tecnica nuove e più prolungate ricerche. Tanto più che la concezione della regolazione neuromorale ipofisaria è stata di recente messa in dubbio da Autori i quali, contemporaneamente e indipendentemente, hanno studiato gli effetti della resezione del peduncolo ipofisario sulle funzioni tropiche, e in particolare sessuali, dell'adenoipofisi. Queste ricerche, intraprese da Tang e Patton nella cavia e da Greep e Barnett nel ratto, hanno dato risultati discordanti, ma tali comunque da non inquadrarsi, secondo i ricercatori, nella teoria neuromorale pocanzi ricordata.

Tang e Patton (1951) ⁽⁸⁾, in cavie sottoposte alla resezione del peduncolo ipofisario per la via transtemporale (la medesima seguita da Harris ⁽⁵⁾) non osservarono alterazioni nel peso e nella struttura delle gonadi, nell'accrescimento corporeo e nella deplezione del colesterolo surrenale in seguito a « stress » da freddo, indizio questo di normale secrezione di ACTH. Secondo gli Autori quest'ultimo reperto conferma quanto riferiscono Cheng *et alt.* (1949 a) ⁽⁹⁾, i quali, dopo asportazione mediante suzione del lobo posteriore e di porzioni variabili di lobo anteriore, accompagnata presumibilmente da completa distruzione del peduncolo, ottennero diminuzione dell'acido ascorbico surrenale in seguito a iniezioni intravena di istamina; e appoggia altresì le vedute di Hume e Wittenstein (1950) ⁽¹⁰⁾, secondo le quali nel cane la resezione del peduncolo non previene la risposta eosinopecica scatenata da un trauma, dall'insulina, epinefrina e irritanti chimici. Coordinando questi reperti, Tang e Patton ritengono che il sistema portale - ipofisario - la cui eventuale rigenerazione avrebbe potuto aver luogo nei 27-75 giorni intercorrenti fra l'operazione e l'autopsia - non sia essenziale per regolare la secrezione di ACTH. Tanto più che lo « stress » istaminico (Cheng *et alt.* 1949 b ⁽¹¹⁾) il freddo e il trauma chirurgico (Fortier e Selye, 1949 ⁽¹²⁾)

(6) « *Physiol. Rev.* », 28, 139 (1948).

(7) « *Riv. Biol.* », 43, 21 (1951).

(8) « *Endocrinol.* », 49, 86 (1951).

(9) « *Amer. J. Physiol.* », 158, 45 (1949).

(10) « *Proceedings of the first clinical ACTH conference* », Blackiston, Philadelphia, 1950.

(11) « *Amer. J. Physiol.* », 159, 426 (1949).

(12) « *Amer. J. Physiol.* », 159, 433 (1949).

evocano la secrezione di ACTH da parte di tessuto adenoipofisario trapiantato nella camera anteriore dell'occhio ⁽¹³⁾.

Anche Greep e Barnett mettono in dubbio l'importanza dei vasi portali, e, indirettamente, la concezione neuromorale del controllo adenoipofisario. Questi Autori hanno studiato gli effetti della resezione del peduncolo ipofisario, aggredito per la via parafaringea, sull'ipofisi e sulla sfera sessuale nel maschio (Barnett e Greep 1951 ⁽¹⁴⁾) e nella femmina (Greep e Barnett, 1950 ⁽¹⁵⁾, 1951 ⁽¹⁶⁾) di ratto. Contrariamente a Tang e Patton, gli Autori hanno osservata atrofia moderata o severa dei testicoli, e ipoattività ovarica. Gli Autori ritengono che gli effetti osservati siano imputabili al difetto di vascolarizzazione causato dall'operazione, che, determinando uno stato ischemico nell'adenoipofisi (istologicamente rilevabile insieme ad una diminuzione diffusa delle cellule cromofile), ne diminuisce l'attività; ed anche dall'entità delle rigenerazioni vasali, che non sarebbero così pronte ed estese come ritiene Harris ⁽⁵⁾. Nell'ipofisi ischemiche si avrebbe soltanto un rallentamento di tutte le attività preipofisarie (gonadotropa, tireotropa, corticotropa) o « panipopituitarismo », ma non una soppressione completa. Infatti in ratti castrati e con peduncolo ipofisario sezionato si osserva un aumento limitato, ma rilevabile, della potenza gonadotropa preipofisaria, mentre gli animali con il peduncolo sezionato rispondono, sia pure pigramente, allo « stress » da freddo (Barnett e Greep, 1950 ⁽¹⁷⁾). Gli Autori ritengono che il comportamento dell'ipofisi dei ratti con peduncolo sezionato sia paragonabile a quello dell'ipofisi trapiantato in varie regioni del corpo, e ritengono pertanto che non sia sufficientemente fondata l'ipotesi del centro « sessuale » ipotalamico, postulata da Howleg e Junkmann ⁽¹⁸⁾, e successivamente riproposta tanto da Sawyer *et alt.* (1949 ⁽¹⁹⁾), che da Harris (1950 ⁽⁵⁾).

RICERCHE PERSONALI. — Le attuali esperienze sono state condotte con la tecnica per la ipofisectomia proposta da Tuchmann-Duplessis (1945 ⁽²⁰⁾);

(13) Con queste conclusioni di TANG e PATTON non concordano i risultati di precedenti ricerche di DE GROOT e HARRIS (« J. Physiol. », *III*, 335 (1950). Questi Autori hanno osservato che la rapidissima risposta linfopenica (COLFER, DE GROOT e HARRIS, « J. Physiol. », *III*, 328 (1950) — dovuta verosimilmente ad una brusca immissione in circolo di ACTH — non è legata alla integrità del peduncolo ipofisario. La risposta può essere evocata soltanto dalla stimolazione diretta della regione posteriore del tuber cinereo, e solo la lesione di questa stessa regione o dei corpi mammillari inibisce la risposta dovuta a « stress » da freddo. In base a questi risultati, de Groot e Harris inferiscono che la secrezione del lobo anteriore e probabilmente del ACTH è sotto il controllo dell'ipotalamo, per il tramite dei vasi portali.

(14) « Endocrinol. », *49*, 337 (1951).

(15) « Anat. Rec. », Suppl., *108*, 525 (1950).

(16) « Endocrinol. », *49*, 172 (1951).

(17) « Anat. Rec. », Suppl., *108*, 526 (1950).

(18) « Klin. Wchnshr. », *II*, 321 (1932).

(19) « Endocrinol. », *44*, 218 (1949).

(20) « Thèse Univ. Paris » (1945).

tecnica che, in confronto a quella precedentemente usata, permette una visualizzazione migliore del pavimento infundibolare ed agevola quindi la inserzione della laminetta di carta pergamenata. Malgrado le precauzioni prese per mantenere gli animali in condizioni di asepsi, la mortalità è stata piuttosto elevata, tanto che dei 15 animali operati solo 8 hanno sopravvissuto fino al termine dell'esperimento. Gli animali operati e 4 controlli sono stati allevati in serra calda a una temperatura media di 23° per 90 giorni (dal 20 dicembre 1951 al 23 marzo 1952). Il numero piuttosto piccolo di animali utilizzabili mi ha indotto a rimandare a nuove esperienze in allestimento lo studio delle relazioni vascolari fra ipofisi e ipotalamo con la tecnica della perfusione con inchiostro di china. Fortunatamente qualche utile indizio in merito è stato fornito anche dalla sola indagine istologica. Le ricerche sono state polarizzate sullo studio macroscopico e microscopico

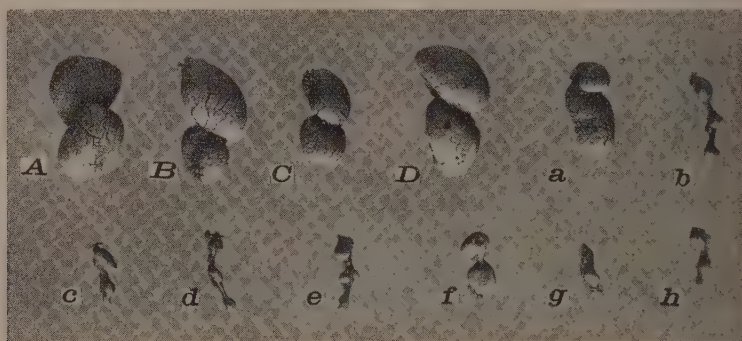


Fig. 1. - Testicoli dei controlli (lettere maiuscole) e degli operati (lettere minuscole), ingranditi una volta e mezzo.

dei testicoli, sulla ricognizione microscopica della lesione provocata, sulla valutazione del quadro istologico dei tre lobi ipofisari. Tanto i testicoli che l'ipofisi sono stati fissati in Sanfelice; i testicoli sono stati sezionati ad 8 μ e colorati con l'emallume-safranina-orange; l'encefalo e l'ipofisi sezionati seriamente a 5 μ e colorati, a sezioni alterne, con il I metodo di Galgano e con il metodo di Gomori (ematossilina cromica-floxina).

All'esame obbiettivo è risultato che, nei controlli in serra, i testicoli erano molto grossi; la spermatogenesi era piena e regolare, portando alla formazione di numerose (A e D) o scarse (B e C) ampolle a spermi. I C.S.s. erano completamente ridotti; l'epidermide aveva, sul dorso, un colore verdastro, ed era rugosa al tatto.

Nei ♂♂ operati i C.S.s. erano del pari regrediti, e i testicoli apparivano appena subnormali nel ♂♂ a, alquanto ridotti, rispetto ai controlli, nei ♂♂ c e f, molto ridotti negli altri casi. L'epidermide appariva più scura che nei controlli, e liscia al tatto nei ♂♂ a, b, e, g, h; più chiara e rugosa al tatto nei ♂♂ c, d, f.

L'esame istologico ha chiarito che nel ♂ *a* la spermatogenesi è regolare, e giunge fino alla formazione di numerosi cisti a spermatidi rotondi; scarse le degenerazioni. Nel ♂ *c* si è riaccesa una modesta onda spermatogenetica, che porta alla formazione di un piccolo numero di ampolle a spermatidi rotondi. La metà circa delle ampolle degenerano al pachitene. Nel ♂ si osservano solo accenni di ripresa della spermatogenesi; sono presenti in piccolissimo numero ampolle di leptoteni in degenerazione. Negli altri casi (*b*, *d*, *e*, *g*, *h*) la spermatogenesi non si è riattivata; nei testicoli sono presenti soltanto protogoni e spermatogoni, con scarse degenerazioni in *b* ed *e*, frequenti in *d* ed *h*, numerosissime in *g*.

All'esame istologico il lobo anteriore dell'ipofisi dei controlli aveva una struttura paragonabile a quella dei maschi in natura in agosto, caratterizzata quindi da un numero elevato di acidofile del II tipo, con grande citoplasma riccamente infarcito di granulazioni. Il lobo intermedio è cromofobo; il lobo posteriore contiene colloide basofilo e materiale neurosecretorio. Il n.m.p. è in attività secretoria.

Per quanto concerne gli animali operati posso precisare quanto segue. In tutti i casi la laminetta di carta è stata inserita fra il chiasma e l'eminenza mediale, senza mai penetrare in cavità o provocare lesioni dirette al lobo anteriore. La ferita era asettica, e non aveva causato degenerazioni di altre aree encefaliche, con l'eccezione dei casi *g* ed *h*, nei quali gran parte dell'encefalo risultava degenerato. Poichè inoltre l'ipofisi si è distaccata dall'encefalo e non è stata studiata, non terrò ulteriormente conto di questi due casi.

Nell'ipofisi, volumetricamente ridotta, il lobo nervoso appariva filiforme e privo di colloide e l'ependima infundibolare basso in tutti i casi, con la eccezione di *f*, ove l'ependima appariva leggermente più alto, il lobo posteriore meno ridotto, leggermente basofilo e conteneva qualche traccia di neurosecreto. In tutti i casi il lobo intermedio era costituito da cellule prevalentemente cromofobe, e da qualche cellula con citoplasma torbido e basofilo. Il lobo anteriore ha un aspetto eminentemente cromofobo nei ♂♂ *a*, *b*, *d*, *e*, nei quali si nota una profonda degranulazione delle cellule acidofile dei due tipi e una riduzione numerica delle β , mentre le δ sono in ogni caso presenti e rappresentate da un certo numero di forme globulari, talvolta ad aspetto colloide (*e*). Particolarmente regredita è l'ipofisi del caso *e*, ove il lobo anteriore è costituito da una rada trama di cordoni cromofobi, separati da sinusoidi dilatati. Zone di accentuata degranulazione sono frequenti nella zona I, nel centro e sulla faccia ventrale della zona III, dove si notano anche piccole aree sclerosate nel maschio *d*. Nei ♂♂ *c* ed *f* l'aspetto generale del lobo anteriore è più vicino a quello dei controlli, specialmente nel ♂ *f*, ove sono molto numerose le cellule acidofile del II tipo. Va notato però che, anche in questi due esemplari le cellule sono in genere alquanto più piccole che nei controlli.

Nel n.m.p. non si colgono segni di attività neurosecretoria; le cellule che lo compongono non sembrano numericamente diminuite rispetto ai controlli, nè in via di degenerazione.

DISCUSSIONE. - La piccola esperienza che ho testè illustrata ha dato nel complesso dei risultati interessanti che meritano qualche parola di commento.

Nei casi validi (tralascio *g* ed *h* per le ragioni in precedenza specificate), la spermatogenesi non si è riattivata in *b*, *d* ed *e*; si è riattivata con caratteri più o meno spiccati di subnormalità in *a*, *c* ed *f*. L'esame istologico ha messo in luce che in ogni caso l'operazione aveva causato una lesione trasversale compresa fra il chiasma e l'eminenza mediale; d'altro canto dall'esame macroscopico è risultato che in *a*, *b*, *d*, *e*, la laminetta di carta è rimasta in sito, in *c* ed *f* era fuori della lesione. La regressione completa del lobo nervoso e la assoluta mancanza in esso di neurosecreto, è indizio sicuro che in tutti i casi il fascio ipotalamo-ipofisario è stato interrotto, come documentano le ricerche sperimentali di Hild ⁽²¹⁾. Nel solo ♂ *f* si può inferire che la interruzione non sia stata totale, dato che il lobo nervoso non è completamente ridotto e in esso sono ancora rilevabili tracce di neurosecreto. Quindi per spiegare il diverso comportamento funzionale dell'ipofisi nei due gruppi di casi non può essere chiamata in causa una eventuale parziale interruzione del fascio ipotalamo-ipofisario.

Per quanto concerne lo stato dei capillari che corrono sull'eminenza mediale, vasi che costituiscono, come ha dimostrato Green (1947 ⁽²²⁾), il sistema portale ipofisario, ho rilevato quanto segue. In *a*, *c* ed *f* essi sono pervi e contengono emazie normali nel loro interno: nei restanti casi essi appaiono invece fortemente stenosati e non contengono che poche o punte emazie. Quindi sussistono differenze notevoli nei casi nei quali la spermatogenesi si è riattivata e in quelli nei quali ciò non è avvenuto.

Parrebbe quindi lecito trarre la conclusione che negli animali nei quali la laminetta di carta è rimasta in sito non si è realizzata la rigenerazione dei vasi, almeno di quelli che concorrono a formare il sistema portale ipofisario; rigenerazione che non ha avuto luogo invece nei rimanenti casi. Sembrerebbe fare eccezione il maschio *a*. Ma si ricordi che in esso la laminetta esercitava semplicemente una forte compressione dietro il chiasma, non rappresentando pertanto un valido ostacolo alla eventuale rigenerazione dei vasi eminenziali. Si noti a proposito che il caso in oggetto è completamente paragonabile al caso *d* esperienza 7 (1952) ⁽¹⁾ nel quale dopo 35 giorni dall'operazione l'ipofisi appariva del tutto inattiva. La maggior durata della presente esperienza può aver consentita la rigenerazione vascolare.

In complesso quindi, anche se nuove e più approfondite ricerche sono necessarie per consentire una presa di posizione più precisa, mi sembra che l'attuale esperienza indichi se non altro l'importanza del ruolo giuocato dalla vascolarizzazione portale nella regolazione della funzione gonadotropa ipofisaria. L'esperienza stessa non esclude però l'alternativa sostenuta da Barnett e Greep in base alla quale le alterazioni profonde nel metabolismo

(21) « Virchows Arch. », 319, 526 (1951).

(22) « Anat. Rec. », 99, 21 (1947).

della preipofisi dovute all'interruzione del rifornimento sanguigno, causerebbero una generalizzata depressione di tutte le attività adenoipofisarie. È solo in questo senso che, a mio parere, l'ipotesi di Barnett e Greep va presa in seria considerazione, in quanto ritengo che non possa essere chiamata in causa la diminuzione delle aree secernenti conseguente alla comparsa di inferti anemici. Infatti è noto, fin dalle ricerche di Smith (1932⁽²³⁾), che il 30 per cento di tessuto adenoipofisario è sufficiente a mantenere in atto le funzioni sessuali, e solo il 10 per cento a sostenere una certa attività ovarica, nel caso di ipofisectomie incomplete. D'altra parte Harris⁽⁵⁾ non ha osservato una relazione diretta fra la normalità o meno dei processi riproduttivi e la quantità di tessuto adenoipofisario presente nei suoi ratti operati. In quanto poi agli anfibi è noto che l'infarto anemico, o comunque le turbe vascolari determinate da lesioni tuberiane, ed anche le lesioni dirette sull'adenoipofisi (Hussay e Giusti⁽²⁴⁾, Lascano-Gonzales⁽²⁵⁾, Hussay Biasotti e Sammartino⁽²⁶⁾, Mazzi⁽²⁷⁾) causano una liberazione di gonadotropine e un aumento conseguente del ritmo ovulatorio; questo effetto può protrarsi anche a lungo nel tempo (Mazzi⁽²⁷⁾).

Negli animali attualmente sperimentati, come del resto in quelli oggetto delle precedenti ricerche, che ho all'uopo riesaminato, non ho colto segni di infarto anemico localizzato, nè indizi di estese degenerazioni nella preipofisi. Indubbiamente lo stato della vascolarizzazione non sembra normale nei casi di mancata ripresa della spermatogenesi, nei quali inoltre la diminuzione volumetrica della ghiandola è indiscutibile ed è accompagnata da nette variazioni del quadro istologico. In questi stessi casi, non soltanto la funzione gonadotropa, ma anche quella tiroidea sembra essere alterata, a giudicare dalle condizioni dell'epidermide; fatto questo che potrebbe essere considerato un indizio di quel «panipopituitarismo», suggerito da Barnett e Greep.

Il campo è comunque ancora aperto alla discussione, e nuove indagini, nelle quali si tenga particolarmente conto dello stato della vascolarizzazione, sono forse desiderabili.

(23) «Anat. Rec.», 52, 191 (1932).

(24) «C. R. Soc. Biol.», 104, 1030 e 1105 (1930).

(25) «C. R. Soc. Biol.», 120, 723 (1935).

(26) «C. R. Soc. Biol.», 120, 725 (1935).

(27) «Arch. Ital. Anat. Embriol.», 56 (1951).

Genetica. -- *Rapporti fra costituzione chimica e attività mutagena nelle acridine. Dati riassuntivi*^(*). Nota di FRANCESCO D'AMATO, presentata^(**) dal Socio A. CHIARUGI.

Le recenti scoperte sull'attività mutagena di agenti chimici diversi su organismi animali e vegetali hanno aperto un nuovo promettente campo d'indagine alla genetica e alla citogenetica. Oltre alle analisi qualitative e quantitative delle mutazioni geniche e cromosomiche indotte ed alle eventuali analisi comparate fra mutageni chimici e fisici (radiazioni) agenti su uno stesso « test » biologico⁽¹⁾, particolare importanza sembra possa assumere, nel problema generale della mutabilità spontanea ed indotta, la conoscenza delle eventuali connessioni fra costituzione chimica ed attività mutagena.

In seguito alla scoperta dell'attività mutagena della acriflavina neutra (3,6-diammino-10-clorometilacridina) in *Escherichia coli* da parte della Witkin⁽²⁾, alla fine del 1948 lo scrivente dava inizio ad una Ricerca intesa a stabilire su un « test » citologico appropriato (meristemi di radici in rapida crescita di bulbi di *Allium Cepa* L.) l'eventuale attività mutagena (mutazioni cromosomiche) - nel quadro dell'attività citologica generale - dell'acridina e di suoi derivati di tipo diverso, non trascurando quei composti la cui struttura molecolare avrebbe potuto in qualche modo fornire indizi utili nel problema dei rapporti fra costituzione ed attività⁽³⁾. Da questo punto di vista la scelta delle acridine ci pareva particolarmente felice, data la massa notevole di dati attualmente disponibili sulle proprietà fisiche, chimiche e biologiche di questa importantissima serie di composti⁽⁴⁾.

Dall'ottobre 1948 ad oggi è stato possibile sottoporre ad esperimento 51 acridine, 32 delle quali sono state oggetto di tre distinte pubblicazioni, due su testo citologico^(5,6) ed una su testo genetico (mutazioni dell'apparato clorofilliano nell'Orzo)⁽⁷⁾.

(*) Istituto Botanico dell'Università di Pisa. Pubblicazione n. 119 del Centro di Studio per la Citogenetica Vegetale del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Firenze.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1952.

(1) F. D'AMATO, *The chromosome breaking activity of chemicals as studied by the Allium Cepa test*. « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 22 (Suppl.), 158-170 (1950).

(2) E. M. WITKIN, *Mutations induced in Escherichia coli by chemical agents*. « Cold Spring Harbor Symposia », 1, 256-269 (1947).

(3) Come solvente fu sempre usata l'acqua di fonte.

(4) A. ALBERT, *The acridines*. E. Arnold e Co., London, 1-381 (1951).

(5) F. D'AMATO, *Studio statistico dell'attività mutagena dell'acridina e derivati*. « Caryologia », 2, 229-297 (1950).

(6) F. D'AMATO, *Nuovi dati sull'attività mutagena dei derivati dell'acridina*. « Caryologia », 3, 311-326 (1951).

(7) F. D'AMATO, *Mutazioni clorofilliane nell'Orzo indotte da derivati acridinici*. « Caryologia », 3, 211-220 (1950).

Uno studio dettagliato dell'attività mutagena e citologica generale in *Allium* delle rimanenti 19 acridine sarà pubblicato nella Rivista Internazionale «Caryologia»⁽⁸⁾. Nella presente Nota è nostro intendimento fornire in sintesi un quadro dell'attività delle 51 acridine finora studiate insieme al tentativo – che le dettagliate osservazioni eseguite per ogni composto e il numero di composti studiato (di gran lunga il più esteso fra le serie di composti chimici finora saggiati nella loro attività mutagena) sembrano giustificare – di una prima definizione dei rapporti fra costituzione chimica e attività mutagena.

Nelle Tabelle I e II i composti sono stati raggruppati in due categorie, quelli mutageni e quelli non mutageni. A questa seconda categoria sono stati ascritti, oltre che i composti assolutamente privi di attività mutagena, quelli nei quali l'attività mutagena appare dubbia a causa dei bassissimi valori in frequenza ed in intensità dell'effetto frammentatore dei cromosomi, che è il determinante delle mutazioni cromosomiche di vario tipo, quali delezioni, deficienze, translocazioni varie, rotture trasversali dell'apparato centromerico o «misdivisions», ecc. (meno del 4 % di anafasi aberranti, ognuna mostrante 1–pochissime rotture)⁽⁹⁾. Nel quadro delle varie attività citologiche vengono inoltre, nelle Tabelle, considerati: 1° la inibizione della mitosi intesa tanto come inibizione del processo cariocinetico in corso, quanto come inibizione alla entrata in mitosi dei nuclei quiescenti, da noi definita come «inibizione preprofasica» nel 1948⁽¹⁰⁾; 2° l'«effetto stickiness» (induzione dei fenomeni di agglutinazione cromosomica), rappresentante l'aspetto più caratteristico dell'azione dei mutageni e di vari composti chimici sui cromosomi delle mitosi in corso all'atto del trattamento sperimentale («effetto fisiologico»⁽¹¹⁾); 3° l'effetto mutageno, inteso come effetto frammentatore dei cromosomi, tanto nei cromosomi di mitosi in corso (fase di «effetto fisiologico»), quanto nei cromosomi di nuclei intercinetici («effetto strutturale»⁽¹¹⁾); 4° il «grado» dell'effetto mutageno, calcolato approssimativamente in rapporto alla frequenza di anafasi mostranti aberrazioni e all'intensità dell'effetto nelle varie anafasi affette. Per definire i quattro «gradi» si sono considerate le seguenti percentuali di base: «debole»: oltre 5 e non oltre 20 ca.; «medio»: fra 20 ca. e 35–40; «forte»: fra 40 e 55–60; «molto forte»: oltre 60 e fino a 85–90 ca. (valore massimo da noi riscontrato). Per i trattamenti dimostratisi attivi, le percentuali sono state basate sullo studio di 100–140 anafasi medie e terminali, appartenenti a 3 radici di uno stesso bulbo preparate per l'analisi citologica secondo la tecnica dello «striscio al Feulgen»⁽¹²⁾.

(8) F. D'AMATO, *Further investigations on the mutagenic activity of acridines* (XXXIII–LI). «Caryologia», 5, 1952 (in corso di stampa).

(9) Composti 31, 33, 37, 46, Tabella II.

(10) F. D'AMATO, *Prime osservazioni sulla inibizione preprofasica della cariocinesi nei meristemi radicali*. «Rend. Accad. Naz. Lincei». Cl. Sci. Fis., ser. 8^a, 5, 460–465 (1948).

(11) D. E. LEA, *Actions of radiations on living cells*. Cambridge University Press, 1–402 (1946).

(12) F. D'AMATO, *Osservazioni critiche su alcuni metodi d'impiego della reazione nucleale in Citologia Vegetale*. «Nuovo Giorn. Bot. Ital.», 53, 657–668 (1947).

TABELLA I.

Elenco delle acridine caratterizzate da attività mutagena (rottture cromosomiche in « Allium Cepa »).

(Con + si indicano i composti per cui è attualmente noto il parallelismo fra azione antibatterica e azione mutagena (ved. testo)).

N.	C O M P O S T I	EFFETTO Mito-Inibitore mgr/l	EFFETTO « Stickiness » mgr/l	EFFETTO Mutageno mgr/l	GRADO Effetto Muta- geno
+ 1	Acridina	20 10	10 2	20-2	Debole
+ 2	3-aminoacridina	100-10	100-10	100-2	Medio
+ 3	2-aminoacridina	100-5	100-10	100-5	Debole
+ 4	9-aminoacridina	50-4	50-25	50-1	Molto forte
+ 5	9-amino-4-cloroacridina	100-10	100-10	100-2	Forse
+ 6	9-amino-3-cloroacridina	100-10	100-10	100-5	Forse
+ 7	9-amino-2-cloroacridina	100-10	100-20	100-2	Forse
+ 8	9-amino-1-cloroacridina	100-20	100-50	100-5	Forse
+ 9	9-amino-4-metossiacridina	100-2	100-50	100-1	Molto forte
+ 10	9-amino-3-metossiacridina	100-5	100-10	50-1	Molto forte
+ 11	9-amino-2-metossiacridina	100-10	50-20	50-1	Forse
+ 12	9-amino-1-metossiacridina	100-50	100-20	100-1	Medio
+ 13	5-fenil-9-aminoacridina, HCl	100-50	100-50	50-10	Debole
+ 14	3,6-diaminoacridina (profavina)	80-1	80-2	80-0,5	Molto forte
+ 15	N-tetrametilderivato della 3,6-diaminoacridina (arancio di acridina)	2000-20	2000-50	2000-2	Molto forte
+ 16	3,6-diamino-2,7-dimetilacridina, HCl (giallo di acridina)	50-2	50-20	50-1	Molto forte
17	2,7-dimetil-3,6-diamino-10-clorometilacridina (fosfina)	100-2	100-50	100-1	Forse
+ 18	3,6-diamino-10-clorometilacridina (tripafavina)	50-0,5	50-5	50-0,2	Molto forte
+ 19	2-etossi-6,9-diaminoacridina lattato (rivanolo)	100-10	100-10	10-2	Medio
+ 20	9-metilacridina	50-20	50-20	50-5	Medio
21	N-dimetil-acridil-9-etilamina, 2 HCl	50-20	50-20	50-5	Debole
22	Cloroacetil-acridil-9-metilamina	50	50	50-20	Debole
23	9-metossiacridina	100-10	100-10	100-2	Debole
24	4-metil-9-metossiacridina	—	—	100	Debole
25	2-metossi-6-cloro-9-metilaminoacridina, acetato	100-20	100-50	20 5	Debole
26	2-metossi 6-cloro 9 dietilaminoacridina	50	—	50	Debole
27	2-metossi-6-cloro-9-isopropilaminoacridina, acetato	100-20	100-20	20-2	Debole
+ 28	3-cloro-7-metossi-9-(1-metil-4-dietilamino)-butilaminoacridina, HCl (atebrina)	1000-200	500	500-200	Debole

NOTA. - I composti 4, 15 e 18 sono anche capaci di indurre mutazioni dell'apparato clorofiliano nell'Orzo.

TABELLA II.

Elenco delle acridine sprovviste di attività mutagena (v. testo).

(Il segno —, in questa e nella precedente Tabella, indica: mancanza dell'effetto considerato).

N.	C O M P O S T I	EFFETTO Mito-Inibitore mgr/l	EFFETTO «Stickiness» mgr/l
29	Acridone	—	—
30	9-cloroacridina	—	—
31	9-etilacridina	—	—
32	2-metossi-6,9-dicloroacridina	50	50
+ 33	2-metossi-6-cloro-9-aminoacridina	—	—
34	2-metossi-6-cloro-9-piperidilacridina	50	—
35	3-cloro-7-metossi-9-etossiacridina	—	—
36	3-cloro-9-(3-metilamino-2-metilpropilamino)-7-metossiacridina	200-100	—
37	3-cloro-9-(2-dimetilaminometilciclosilamino)-7-metossiacridina, 2 HCl	200-100	200 100
38	3-cloro-7-metossi 9-[3-(4-β-pipecolil)-propilamino]-acridina, 2 HCl	200-100	200-100
39	3-cloro-9-[2-(3-ciclopentilpropilamino)-etilamino] 7-metossiacridina, 2 HCl	200-100	200 100
40	3-cloro-7-metossi 9-[2-(4-α-pipecolil)-butilamino]-acridina, 2 HCl	200-100	100
41	3-cloro-9-(3-dietilamino-2-metil-2-ossipropilamino)-7-metossiacridina, 2 HCl	200-100	100
42	3-cloro-9-(3-dietilaminometil 4-idrossianilino)-7 metossiacridina	200-100	100
43	9 (3-allil-5-dietilaminometil-4 idrossianilino)-3-cloro-7-metossiacridina	200-50	100
44	3-cloro-9-(4-dimetilaminobutilamino)-7 metossiacridina, 2 HCl	200-100	100
45	6-cloro-9-[3-(2-dietilaminitiluo) propilamino]- 2-metossiacridina, 2 HCl	200 100	100
46	3 ciano-9-(3 benzilaminopropilamino)-7 metossiacridina, HCl	200-100	100
47	3-ciano-9-(3-etilaminopropilamino)-7-metossiacridina, HCl	200-100	100
48	1,2-dimetil-5,6-benzoacridina	—	—
49	1,4,10 trimetil-5,6-benzoacridina	—	—
50	1,4,10-trimetil-7,8 benzoacridina	—	—
51	1,6,10-trimetil-7,8-benzoacridina	—	—

+ Casi isolati di rotture (non oltre 4 0/0 anafasi aberranti indotte da questo composto, possedente, secondo Albert e Collaboratori (cfr. 4) forte azione antibatterica).

Quanto ai rapporti fra costituzione chimica ed attività mutagena nella serie delle acridine il fatto che, sulla scorta dei dati della nostra prima Ricerca su 11 acridine⁽⁵⁾, ci sembrava potesse essere di primaria importanza nel condizionare l'attività mutagena, precisamente la possibile azione depimente dell'azione mutagena esplicata dalla introduzione di alcuni gruppi nella molecola dell'acridina, ci appare ora di ben minore significato. Soprattutto in seguito allo studio dell'ultimo lotto di 19 acridine, 10 delle quali a formula « critica » (composti 2-3, 5-12) consigliateci e forniteci, con squisita cortesia, dal prof. Albert, la più riconosciuta autorità nel campo delle acridine. *È stato così possibile stabilire, fra le acridine studiate da Albert e Collaboratori (cfr. 4) nelle loro proprietà antibatteriche e da noi nella loro azione mutagena, un parallelismo veramente sorprendente: acridine ad alta azione batteriostatica sono anche chiaramente mutagene, mentre una scarsa attività mutagena si riscontra in acridine debolmente batteriostatiche*⁽¹³⁾. Albert e Collaboratori (cfr. 4), con lo studio delle proprietà fisiche, chimiche e antibatteriche di ben 107 acridine particolarmente scelte, hanno potuto dimostrare in maniera indubbia che nella serie delle acridine una basicità sufficiente ad indurre almeno 75 % di ionizzazione a pH 7,3 a 20° C. ($pK_a > 7,8$) è essenziale per una effettiva batteriostasi e che l'attività antibatterica delle acridine risiede essenzialmente nei cationi, mentre anioni, « zwitterions » e molecole indissociate hanno poca attività. Inoltre, sostituenti diversi nel nucleo dell'acridina possono avere un certo valore nel condizionare l'attività batteriostatica esclusivamente o essenzialmente perchè controllano la ionizzazione. Secondo gli stessi Autori, alcune poche eccezioni a questa Regola sono apparenti e, fra queste, quella dell'atebrina (composto n. 28), la cui scarsa attività batteriostatica, nonostante l'alto grado di ionizzazione cationica, è dovuta ad un « fattore dimensionale » (« that is to say, their structure is such as could interfere sterically with the normal union between drug and bacterial receptors »⁽⁴⁾).

È interessante, sempre nel quadro del suggestivo parallelismo attività antibatterica attività mutagena, la scarsa attività dell'atebrina come agente frammentatore dei cromosomi.

Sulla scorta dei dati sopra riportati, sembra ben probabile che la Regola dei rapporti fra ionizzazione cationica e attività antibatterica nelle acridine scoperta da Albert e Collaboratori, valga anche per l'attività mutagena. Una definitiva risposta a questo quesito potrà solo venire dalle ulteriori ricerche che, avendo già ottenuto l'aiuto di Ricercatori e Industrie interessati alle acridine, potremo riprendere al più presto.

Oltre a questo problema centrale dei rapporti fra attività mutagena e attività antibatterica, ormai perfettamente delineato, 2 problemi potranno ancora essere da noi aggrediti nel prossimo futuro: 1° gli eventuali rapporti fra attività mutagena e attività antimalarica; 2° gli eventuali rapporti fra

(13) L'unica eccezione è rappresentata dal composto n. 33, Tabella II; molto probabilmente, a causa della sua scarsissima solubilità in acqua.

attività mutagena e attività deprimente la crescita tumorale, quale è accertata, nel topo, per non poche acridine ⁽¹⁴⁾.

Quanto ai rapporti fra attività mutagena e attività mito-inibitrice, le nostre ricerche mostrano che le *acridine mutagene* posseggono anche un più o meno forte potere mito-inibitore, potendo indurre inibizione mitotica anche a basse concentrazioni.

I dati riportati dal Lettré ^(15, 16) sull'attività antimitotica di alcune acridine nelle culture « in vitro » di tessuti animali sono essenzialmente concordanti con quelli da noi ottenuti in *Allium*. Chiari veleni mitotici, appaiono in questi 2 diversi « test », la tripaflavina o acriflavina (composto n. 18) la 3,6-diaminoacridina, la 3-aminoacridina, la 9-aminoacrina; mentre l'acridina, priva di azione antimitotica nelle culture « in vitro » ⁽¹⁶⁾, svolge azione inibitrice della mitosi in *Allium* ⁽⁵⁾.

Altri dati ricavabili dalla letteratura mostrano che l'acriflavina è capace di indurre anche mutazioni in *Drosophila* (Demerec) e nei lieviti (Ephrussi) (cfr. 5) e mutazioni cromosomiche in *Allium* ⁽¹⁷⁾.

Ringraziamento. — Le ricerche di cui alla presente Nota sono state rese possibili dalla cortesia di numerosi Ricercatori ed Industrie Chimiche nel mettere a nostra disposizione i prodotti puri necessari ai nostri studi. È per noi gradito dovere esprimere il nostro più vivo ringraziamento a: prof. A. Albert, Department of Medical Chemistry, The Australian National University, Canberra e London; prof.ssa L. Monti, Istituto di Chimica Farmaceutica dell'Università, Siena; d.ssa M. R. Lewis, The Wistar Institute of Anatomy and Biology, Philadelphia (U.S.A.); dott. H. G. Barber, May e Baker Ltd., Dagenham (England); dott.ri N. P. Buu-Hoï e R. Lata-rjet, Laboratoire du Radium de l'Institut Pasteur, Paris; dott. J. H. Wilkinson, Department of Chemical Pathology, Westminster Medical School, London; Imperial Chemical Industries Ltd., Manchester (England); Lepetit S. A. e Farmitalia S. A., Milano; Hoffman-La Roche e Co., Basel (Svizzera).

(14) M. R. LEWIS e P. P. GOLAND, *In vivo staining and retardation of tumors in mice by acridine compounds*. « Amer. Journ. Med. Sci. », 215, 282-289 (1948).

(15) H. LETTRÉ, *Ergebnisse und Probleme der Mitosegiftforschung*. « Naturwiss. », 32, 75-86 (1946).

(16) H. LETTRÉ, *Mitosegifte und cancerogene Faktoren als Antibiotica*. « Zeitschr. für Krebsforsch. », 56, 3-35 (1948).

(17) R. BAUCH, *Irreversible Chromosomenschädigungen durch Trypaflavin*. « Planta », 35, 536-554 (1948).

Antropologia. — *Sulla disposizione delle trabecole dell'osso dell'anca in relazione alla loro morfodinamica.* (Studio radiologico) (*).
Nota di VENERANDO CORRENTI, presentata (**) dal Socio S. SERGI.

La complessa dinamica attuata da un corpo umano che vive, trova nelle proprietà intrinseche dell'apparecchio scheletrico il suo substrato meccanico indispensabile.

Le crescenti conferme portate da ricerche moderne al concetto dei vecchi morfologi che definivano la forma « espressione plastica della funzione » (Ruffini), dimostrano la aderenza di tale orientamento alla realtà biologica e fanno intravedere il grande interesse che, sotto questo aspetto, acquista lo studio delle trabecole ossee le quali, esprimendo le direzioni delle linee di forza, possono essere considerate lo scheletro dello scheletro.

Nell'uomo, unico essere vivente dotato di vera e stabile stazione eretta, il bacino osseo assume una particolare importanza perchè — architetturealmente partecipe e del busto e degli arti inferiori — raccoglie, per la sua posizione, le forze di spinta verso l'alto provenienti attraverso gli arti inferiori dal loro appoggio sul suolo e le forze di gravità che si scaricano verso il basso in funzione del peso e della distribuzione delle masse del busto e, attraverso il cingolo scapolare, anche degli arti superiori.

Ho rivolto perciò l'attenzione allo studio delle ossa dell'anca, la cui disposizione trabecolare viene messa in relazione con la direzione delle forze che su di esse si estrinsecano, in modo da poter stabilire con sufficiente approssimazione, relativamente alla stazione eretta, l'asse di carico e l'orientamento spaziale dell'osso ai quali attribuire un più preciso significato derivante dalle loro relazioni con determinate disposizioni trabecolari.

Per avere elementi di carattere comparativo ho studiato radiologicamente:

- A) *ossa dell'anca dell'uomo* di diversi gruppi razziali ed appartenenti a:
3 europei, di cui 1 maschio adulto e due infanti;
3 peruviani, dei quali 2 adulti (1 maschio ed 1 femmina) ed 1 infantile;
1 batacco maschio adulto;
13 fuegini, dei quali 12 adulti (5 maschi e 7 femmine) ed 1 giovanile;
- B) *ossa dell'anca di antropomorfi* appartenenti a:
1 gorilla giovanile;
3 scimpanzè, di cui 1 adulto e 2 infanti;
2 orango, di cui 1 adulto ed 1 infantile;
- C) *ossa dell'anca di un cercopiteco.*

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Antropologia dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1952.

Per ciascuno delle due ossa dell'anca, ho eseguito radiografie di cui alcune in 5 proiezioni, partendo da una posizione « zero » definita dall'equidistanza dalla lastra delle due spine iliache superiori (rispettivamente anteriore e posteriore); dopo essere stato radiografato in detta posizione, l'osso, montato su un asse verticale innestato, per la esatta misurazione della rotazione, su di un pantogoniostato del prof. S. Sergi, veniva fatto ruotare in senso ventro-dorsale di 30°, 45°, 60°, 90°.

L'esame comparativo viene in questa Nota, per brevità, riportato solo per le ossa del lato sinistro non essendo state rilevate differenze apprezzabili tra i due lati.

Per la descrizione delle disposizioni trabecolari — che per quanto concerne l'anca umana dal punto di vista radiologico era stata data (1929) dal Cobau, al quale, quando occorre, farò riferimento, — premetto un unico schema generale, chiamando con lo stesso nome sistemi aventi una stessa sede topografica ed un'analoga funzione e ciò allo scopo di rispettare la necessaria corrispondenza tra disposizioni trabecolari e conformazione anatomica esterna, dato che l'anatomia, per l'osso nel suo insieme e per le sue singole parti, ha adottato, nei vari generi da me considerati, una stessa terminologia.

I fasci di trabecole radiologicamente identificabili nelle ossa dell'anca, interpretati nel loro significato funzionale, possono essere schematicamente raggruppati nei seguenti sistemi (vedi Tavv. I e II):

A) *Sistemi osteomerici* (che chiamo così da ὀστέον = osso e μέρος = parte, perchè si dispongono attorno a determinate parti dell'osso) comprendenti:

I) il sistema pericotiloideo costituito dal *fascio pericotiloideo* che decorre attorno al contorno dell'acetabolo e da *trabecole* che si dispongono in direzione raggiata;

II) il sistema periopico (da ὀπή = forame) costituito da un fascio (*fascio periopico*) che decorre attorno al forame otturato.

Le differenze che, relativamente ai sistemi osteomerici, risultano dai vari radiogrammi si riferiscono al loro diverso sviluppo: nel cercopiteco, ad esempio, sono scarsamente sviluppate le trabecole raggiate del sistema pericotiloideo, mentre è ben sviluppato il fascio periopico dal quale, in corrispondenza del settore ischiatico, si dipartono due piccoli fasci, uno ventrale ed uno dorsale, che si dirigono verso le trabecole della tuberosità ischiatica.

B) *Sistema idiobadismatico* (da ἴδιος = proprio e βάδισμα = andatura) che chiamo così perchè le sue caratteristiche appaiono in relazione col diverso tipo di andatura. Esso rappresenta dal punto di vista funzionale e comparativo il più importante sistema trabecolare delle ossa dell'anca e può essere assunto come carattere distintivo dei vari generi.

Nell'uomo esso risulta composto da:

I) una *sezione ectocorica* (da ἔκτος = fuori e χώρα = luogo) che chiamo così perchè decorre perifericamente lungo i margini dell'osso (nota col nome di « sistema marginale »). È costituita da 4 fasci che rispettivamente

possono essere indicati come *fascio ectocorico superiore, anteriore, inferiore e posteriore*, continuantisi l'uno nell'altro con la quasi totalità delle loro trabecole;

II) una *sezione endocorica* (da ἔνδον = dentro e χώρα = luogo) che chiamo così perchè attraversa l'interno dell'osso diagonalmente nei due sensi (corrisponde al « sistema arcuato » del Cobau). Risulta costituita da 2 robusti fasci l'uno - *fascio sacro-pubico* - (corrispondente al « fascio della linea arcuata interna ») che si estende dalla regione della sinfisi pubica, attraverso la linea innominata, fino alla regione della faccetta auricolare per continuarsi, con l'interposizione dell'articolazione sacro-iliaca, nel sacro (Waldeyer); l'altro - *fascio bituberale o ileoischiatrico* - (corrispondente al « fascio trabecolare della linea arcuata esterna » descritto dal Cobau) individuabile solo nell'uomo, che si estende non soltanto (come finora è stato ritenuto) dalla spina iliaca anteriore-superiore, ma da questa e dalla tuberosità iliaca del Waldeyer fino alla tuberosità ischiatica. I due fasci, quasi perpendicolarmente disposti l'uno rispetto all'altro (Cobau), si incrociano *nettamente* tra il tetto acetabolare e la cresta iliaca formando una piccola area nodale che denomino *chiasma trabecolare endocorico* il quale, con il suo angolo inferiore abbraccia la volta della cavità acetabolare. Un sistema idiobadismatico così costituito ed i cui fasci endocorici (sacro-pubico e bituberale) si incrociano nettamente per formare un *chiasma* è caratteristico dell'uomo e può essere perciò indicato come « *sistema idiobadismatico di tipo antropico* », proprio degli ominidi primati *ortogradi*.

Nelle *scimmie superiori* il sistema idiobadismatico, quale è risultato dalla mia indagine radiologica presenta una diversa costituzione in quanto i fasci ectocorici anteriore e posteriore non sono sempre distinti dai fasci endocorici i quali a loro volta non si presentano come nell'uomo (manca un vero fascio bituberale) e non formano tra loro una zona nodale nettamente distinguibile come si riscontra nell'uomo. Più precisamente (vedi Tav. II):

nel *gorilla* la sezione ectocorica è sostituita da 4 fasci dei quali però il posteriore e ancor più l'anteriore si continuano quasi insensibilmente con le parti contigue dei fasci endocorici mostrando una minore individualità. La sezione endocorica è costituita da: *a*) un *fascio sacro-pubico* (proveniente dalla faccetta auricolare) che in direzione della zona centrale del tetto acetabolare si divide in due branche di cui la principale (*branca ventrale*) si dirige in avanti ed in basso per raggiungere il pube; la branca minore, invece, (*branca dorsale*) si dirige in basso e posteriormente e si confonde con le trabecole del fascio ectocorico posteriore; *b*) un *fascio spino-cotiloideo* che dalla spina iliaca anteriore superiore si dirige dorsalmente in basso e dopo aver confluito con il fascio sacro-pubico si sfocchia con questo sul tetto cotiloideo senza raggiungere la tuberosità ischiatica. La reciproca disposizione dei due fasci endocorici piuttosto che di un incrocio, ha l'aspetto di una confluenza;

nell'*orango* la costituzione del sistema idiobadismatico richiama molto da vicino quella osservata nel gorilla. L'addensamento delle trabecole in

fasci appare meno marcato; la branca dorsale del fascio sacro-pubico si presenta meno evidente. Anche nell'orango non si forma chiasma tra i fasci endocorici, bensì una confluenza;

nel *cimpanzè* il fascio ectocorico anteriore non è più identificabile perchè completamente riunito al fascio endocorico spino-cotiloideo il quale, dopo aver completamente confluito con il fascio sacro-pubico, si dirige con questo verso la regione della sinfisi. La branca dorsale del fascio sacro-pubico è rappresentata da uno scarso numero di trabecole.

Come risulta dalla suddetta sintetica descrizione, le caratteristiche del sistema idiobadismatico delle scimmie superiori sono diverse da quelle riscontrate nell'uomo (mancano nelle scimmie superiori il fascio bituberale ed il chiasma trabecolare endocorico) e pertanto il sistema idiobadismatico delle scimmie superiori può essere indicato come « *sistema idiobadismatico di tipo anotero-pitecoideo* » (da ἀνώτερος = superiore e πίθηκος = scimmia) proprio dei primati *clinogradi*.

nel *cercopiteco* il sistema idiobadismatico *manca della sua sezione endocorica* in quanto non sono identificabili né un fascio sacro-pubico né un fascio spino-cotiloideo. Dei 4 fasci della sezione ectocorica, l'anteriore ed il posteriore decorrono lungo i rispettivi margini dell'osso (l'uno dalla spina iliaca anteriore superiore al pube, l'altro dalla faccetta auricolare alla tuberosità ischiatica). Il sistema idiobadismatico del cercopiteco può essere pertanto indicato come « *sistema idiobadismatico di tipo elatto-pitecoideo* » (da ἐλάττω = inferiore e πίθηκος = scimmia) proprio dei primati *prono-gradi*.

Allo scopo di rilevare eventuali modificazioni della disposizione trabecolare durante l'accrescimento e soprattutto allo scopo di osservare le relazioni tra disposizione trabecolare e zone non ancora ossificate, ho esteso la ricerca studiando radiologicamente anche ossa dell'anca infantili e giovanili.

Dall'esame dei loro radiogrammi risulta – come del resto era da aspettarsi – che l'architettura trabecolare presenta nelle ossa infantili già evidenti nelle linee fondamentali le caratteristiche descritte nelle ossa adulte. Per quanto concerne la sezione endocorica, nelle ossa umane è da specificare che il fascio sacro-pubico (endocorico) risulta nei radiogrammi meglio individuabile del fascio bituberale, come se la sua costituzione fosse cronologicamente più precoce. Inoltre lo stesso fascio sacro-pubico (endocorico) appare come la parziale continuazione del fascio ectocorico superiore che, giunta in prossimità dell'angolo postero – superiore dell'osso, si divide in due parti di cui l'una si continua nel fascio sacro pubico, l'altra nel fascio ectocorico posteriore. Questa constatazione conferma l'opportunità di considerare unitariamente le due sezioni ectocorica ed endocorica quali parti dello stesso sistema idiobadismatico (vedi Tav. I, fig. 4).

Inoltre, lo studio delle ossa dell'anca infantili e giovanili ha permesso di trarre elementi che appaiono decisivi ai fini della determinazione dell'asse

di carico dell'osso e, conseguentemente, di un suo orientamento nello spazio che abbia un significato funzionale.

È noto dalla embriologia che nell'abbozzo primitivo dell'osso dell'anca si differenziano tre centri principali di ossificazione encondrale, dei quali il più precoce (50°-60° giorno fetale) è il centro iliaco, cui seguono il centro ischiatico (4° mese) ed il centro pubico (4°-5° mese). Le tre ossa originatesi da detti centri non si fondono tra loro prima dei 12-14 anni e tale situazione è la premessa necessaria perchè l'osso dell'anca possa progressivamente adattare la sua forma alla sua funzione raggiungendo così la sua definitiva posizione di equilibrio. La precoce comparsa del centro iliaco è poi per se stessa una riprova dell'importanza che dal punto di vista morfodinamico va attribuita a questa parte dell'osso dell'anca che è quella in cui ha sede, nell'uomo, il chiasma trabecolare endocorico, punto nodale del sistema endocorico. E poichè, come ha scritto il prof. S. Sergi, « per lo più lungo le linee suturali si trovano i punti nei quali convergono le componenti delle linee di forza », nella morfodinamica dell'osso dell'anca particolare significato avrebbero dovuto avere i punti suturali dell'ileo con l'ischio e con il pube.

D'altra parte, è ovvio che una delle stazioni naturali del corpo umano, e di questo, anzi, caratteristica è appunto la stazione eretta, nella quale - come è noto - le risultanti delle varie, complesse forze che agiscono sul corpo si estrinsecano, per azione della forza di gravità, prevalentemente in piani verticali. È pure noto che il bacino poggia sullo scheletro degli arti inferiori i cui assi fisiologici, come è stato dimostrato da molti Autori si trovano in piani verticali. Da tutto ciò consegue che la direzione dei fasci trabecolari del sistema idiobadismatico deve essere interpretata e orientata in funzione della verticalità del loro asse di scarico rappresentato, per l'osso di un solo lato (quando il corpo poggia su entrambi gli arti) dall'arto inferiore omolaterale.

Partendo da queste premesse, ho orientato l'osso dell'anca in modo che il punto suturale ileo-pubico, il punto suturale ileo-ischiatico e la spina ischiatica fossero su uno stesso piano orizzontale; quindi ho poggiato l'osso su un asse verticale passante per il punto di mezzo della linea che unisce i due suddetti punti suturali ed ho radiografato l'osso nelle stesse 5 proiezioni cui ho già accennato.

Dall'esame dei radiogrammi relativi alle varie ossa dell'anca umane considerate, risulta chiaramente che l'asse di sostegno dell'osso, in tutte le proiezioni eseguite passa per il chiasma trabecolare che, rappresentando il centro nodale del più importante sistema di trabecole dovrebbe anche essere il punto nodale delle linee di forza agenti sull'osso dell'anca; *pertanto l'asse verticale, ortogonale al centro del segmento tra i due punti suturali e passante per il chiasma trabecolare dovrebbe identificarsi con l'asse meccanico dell'osso.*

Una particolarità, su cui conviene intrattenersi, perchè messa in evidenza dalle mie indagini e che illustra e completa le osservazioni di altri Autori, si riscontra nelle ossa dell'anca dei Fuegini in cui nelle proiezioni

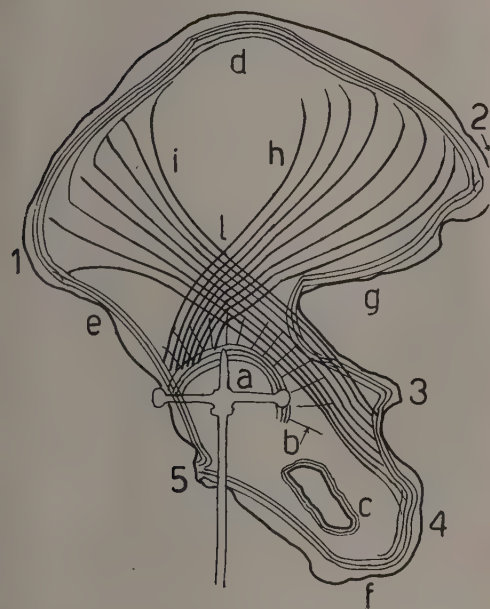


Fig. 1. - Proiezione a 0° (schematica) (1).

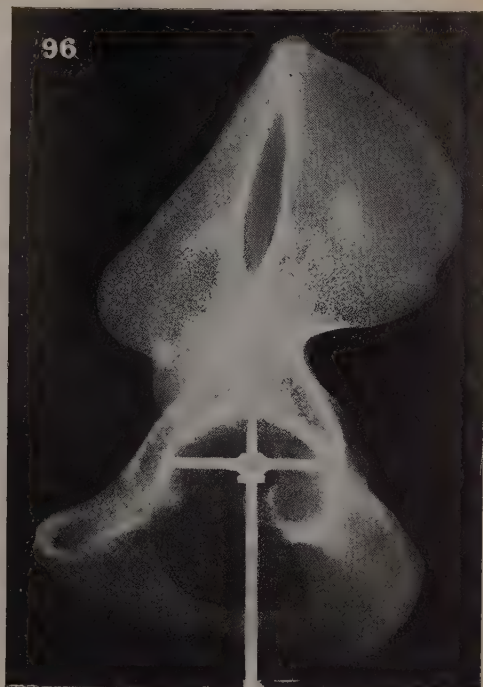


Fig. 2. - Europeo: proiezione a 45°.



Fig. 3. - Fuegino: Proiezione a 90°.



Fig. 4. - Europeo infant.: proiezione a 45°.

(1) 1 = spina iliaca ant. sup.; 2 = spina iliaca post. sup.; 3 = spina ischiatica; 4 = tuberosità ischiatica; 5 = pube.
 Sistema pericotiloideo: a = fascio pericotiloideo; b = trabecole raggiate. Sistema periopico: c = fascio periopico. Sistema idiobadismatico:
 sezione ectocorica: d, e, f, g = fasci ectocorici sup., ant., inf., post.; sezione endocorica: h = fascio sacro-pubico; i = fascio bituberale;

di 90°, l'ala iliaca, vista di profilo, appare inclinata leggermente dal basso in alto ed in direzione ventre dorsale (vedi Tav. I, fig. 3). Una condizione che richiama quella ora descritta si osserva nelle proiezioni a 90° delle ossa dell'anca degli antropomorfi.

Tale particolarità dei Fuegini ritengo possa essere messa in relazione con la loro abituale e prolungata stazione in posizione « accoccolata » per il lungo remare, posizione che influisce poi sulla deambulazione, a proposito della quale così scrive il Gusinde: « il deficiente sviluppo degli arti inferiori degli Yamana (Fuegini) è bene osservabile; nella posizione eretta molti individui danno l'impressione di essere incerti sulle gambe » (p. 106)... « Il Fuegino inclina il busto notevolmente in avanti nel camminare e ad ogni passo mette il piede in modo analogo a come facciamo quando siamo incerti o abbiamo paura. Uno Yamana adulto non riesce a camminare solidamente... ». Ed il Fitz-Roy (riportato dal Gusinde): « le donne non camminano mai erette; una stazione curva con movimenti maldestri è propria della loro deambulazione naturale » ed il Gusinde aggiunge: « e ciò vale anche per gli uomini » (p. 107).

Altre peculiarità degli arti inferiori dei Fuegini sono state messe in evidenza dai fondamentali studi del prof. Genna dai quali risulta che « particolarmente caratteristica dei Fuegini è la posizione estremamente bassa del culmine della curvatura (femorale) e la speciale forma di quest'ultima, cosicché i Fuegini sono l'unico tra i gruppi umani attuali finora studiati al riguardo che hanno quasi sempre il punto di massima curvatura al di sotto della metà dell'osso e sempre il tipo campilomorfo della curvatura stessa, analogamente all'uomo di Neanderthal e ad altri tipi umani preistorici ».

Concludendo, si può ritenere che lo studio trabecolare delle ossa dell'anca mette in evidenza differenze essenziali che, per i vari generi da me considerati, sono in relazione con il tipo di stazione ed il tipo di andatura e fornisce elementi razionali per determinare l'asse di carico dell'osso ai fini di un orientamento fisiologico e dell'osso e del bacino che sarà oggetto di una seconda Nota.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- WALDEYER, *Das Becken*. Bonn. F. Coen, 1899.
STRASSER H., *Lehrbuch der Muskel-und Gelenkmechanik*. Berlin 1908.
FICK R., *Handbuch der Anatomie und Mechanik der Gelenke*, Jena 1910.
COBAU A., *Ricerche sulla struttura dell'osso iliaco*. « La Chirurgia degli Organi di movimento », vol. XIV, 1929.
GENNA G. E., *Sulla curvatura del femore dei Fuegini*. « Riv. Antrop. », vol. XXIX, 1931.
SERGI S., *Sulle variazioni di forma e di posizione dell'osso temporale nell'uomo*. « Riv. Antrop. », vol. XXXI, 1935-6.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Anziano Levi invia un reverente saluto alla memoria del Presidente Castelnuovo, spentosi a Roma il 27 aprile u. s., e fa presente che del cordoglio dell'intera Accademia si è reso già autorevolissimo interprete, nella seduta a Classi riunite di questo pomeriggio, il Vicepresidente prof. Arangio-Ruiz il quale, con nobili e commosse parole, ha ricordato la grande figura dello Scomparso, mettendo in particolare evidenza i Suoi altissimi meriti quale primo Presidente della ricostituita Accademia dei Lincei. Dopo aver comunicato che di Guido Castelnuovo sarà tenuta una solenne commemorazione nel prossimo anno accademico, il Socio Anziano Levi, ricordando l'amorosa sollecitudine e la mirabile energia con le quali Egli dirigeva l'attività accademica, invita i Colleghi ad iniziare senz'altro i lavori della presente seduta con la certezza che, in tal modo, la Classe renderà alla memoria del suo amato Presidente il migliore degli omaggi.

Il Presidente porge il cordiale saluto dell'Accademia ai Soci stranieri Felix Machatschki dell'Università di Vienna e Stephen P. Timoshenko della Stanford University di California e al prof. Erich Kähler dell'Università di Lipsia che assistono alla presente seduta e comunica che, al termine della stessa, il Socio Timoshenko terrà, nella sala della Biblioteca Accademica, una conferenza sul tema « History of Strength of Materials in Russia ».

Il Socio Machatschki ringrazia l'Accademia per la sua nomina a Socio Straniero e dà quindi lettura di un messaggio con il quale l'Accademia delle Scienze Austriaca esprime il suo profondo cordoglio per la morte del Presidente Castelnuovo.

Il Socio Anziano Levi ringrazia il Collega Machatschki e l'Accademia Austriaca.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta quindi un plico suggellato consegnato all'Accademia dal dottore Umberto Bellotta, contenente, come da annotazione sulla relativa busta, una nota di biologia del predetto dottore e del dott. Salvatore Onorato. Come da altra annotazione sulla stessa busta, firmata dal dott. Umberto Bellotta, il plico di cui trattasi potrà essere aperto a richiesta del predetto dott. Bellotta e del dott. Salvatore Onorato, sia unitamente che disgiuntamente.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia conservato nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Chiarugi, Sergi, Bonino, Picone (a nome del Collega Caccioppoli), Andreatta, Caglioti, Segre e Semerano.

Il Segretario Accademico dà lettura dell'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BONINO G. B. e MIRONE P. – Spettro ultrarosso del sale sodico della aldeide α pirrolica (pres. dal Socio G. B. BONINO).

CACCIOPPOLI R. – Misura e integrazione sulle varietà parametriche. Nota III.

CORRENTI V. – Osservazioni morfometriche sul bacino secondo un nuovo piano d'orientamento (pres. dal Socio S. SERGI).

EMILIANI F. e PELLIZZER E. – Studio morfologico ed ottico della Simonellite (pres. dal Corrisp. C. ANDREATTA).

LANZA P. e GRIGGIO L. – Riduzione polarografica del trifenilclorometano (pres. dal Corrisp. G. SEMERANO).

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Bompiani ritiene possa aver interesse per l'Accademia essere informata sulla prima Assemblea Generale dell'Unione Matematica Internazionale (IMU).

La costituzione dell'IMU fu preparata in alcune riunioni avvenute a New York a fine di agosto del 1950 e il relativo Statuto fu approvato in una riunione al termine del Congresso Internazionale dei Matematici tenuto in Cambridge, Mass., nel settembre 1950.

Il Comitato interinale allora nominato ha raccolto le adesioni di varie Nazioni ed ha stabilito di tenere in Roma dal 6 all'8 marzo 1952 la prima Assemblea Generale.

Per gentile concessione del Presidente dell'Accademia senatore professore Guido Castelnuovo, le riunioni si sono tenute nel Palazzo della Farnesina, di proprietà dell'Accademia stessa. Erano presenti i delegati delle seguenti Nazioni, membri dell'IMU: Argentina, Australia, Belgio, Canada, Danimarca, Finlandia, Francia, Germania, Giappone, Grecia, Inghilterra, Italia, Norvegia, Paesi Bassi, Pakistan, Perù, Spagna, Stati Uniti d'America, Svizzera, Jugoslavia; ed osservatori della Polonia e del Portogallo.

Le riunioni si sono aperte con la lettura di un nobilissimo messaggio di benvenuto agli ospiti del sen. Castelnuovo, in cui era ricordato che l'Accademia dei Lincei era già stata sede di un'altra riunione internazionale dei

Matematici del 1908. È stata pure data lettura di una lettera di saluto ai convenuti del prof. F. Severi, Presidente dell'Accademia Nazionale dei XL.

Durante i lavori si sono discusse alcune modifiche allo Statuto, le possibili attività dell'IMU con nomina di Commissioni che le dovranno curare, i problemi di bilancio.

Sono stati poi nominati i membri del Comitato Esecutivo che rimarrà in carica fino al Congresso Internazionale dei Matematici in Amsterdam (settembre 1954); Presidente, M. H. Stone (U.S.A.); Primo Vice-Presidente, E. Borel (Francia); Secondo Vice-Presidente, E. Kamke (Germania); Segretario, E. Bompiani (Italia); altri Membri: W. V. D. Hodge (Inghilterra), S. Iyanaga (Giappone), B. Jessen (Danimarca).

L'Assemblea si è chiusa col seguente voto, proposto dagli S.U. d'America e dalla Francia, deliberato per acclamazione:

« La prima Assemblea dell'Unione Matematica Internazionale è stata ricevuta e intrattenuta regalmente durante le sue riunioni in Roma dal 6 all'8 marzo 1952.

E perciò l'Assemblea Generale esprime i suoi più cordiali ringraziamenti e il suo compiacimento per il modo com'è stata ricevuta ed accolta, che è stato pienamente apprezzato dai delegati all'Assemblea; invia questi ringraziamenti all'Accademia Nazionale dei Lincei, all'Unione Matematica Italiana e in particolare al prof. E. Bompiani.

Inoltre l'Assemblea Generale esprime il proprio sincero augurio al senatore prof. Guido Castelnuovo per un pronto e completo ristabilimento ».

Il Socio Colonnetti riferisce sulla prima sessione, svoltasi a Parigi, del Consiglio dei Rappresentanti degli Stati aderenti all'iniziativa dell'Unesco per un laboratorio europeo di studi nucleari, con le seguenti parole:

« In questi giorni si è tenuta a Parigi la prima sessione del Consiglio dei Rappresentanti degli Stati aderenti all'iniziativa dell'UNESCO per un Laboratorio Europeo di studi nucleari. Oltre all'approvazione di bilanci e di regolamenti - pratiche di ordinaria amministrazione - eravamo chiamati a designare gli uomini che avrebbero dovuto occupare le più alte cariche della nuova organizzazione internazionale. Si trattava cioè di nominare il Segretario Generale, che dovrà assumere la responsabilità del coordinamento, nonchè i capi dei diversi gruppi di lavoro che nei prossimi diciotto mesi dovranno redigere i piani, i progetti ed i preventivi delle nuove attrezzature scientifiche.

Alla carica di Segretario Generale è stato, con unanimità di voti, chiamato il nostro Socio prof. Edoardo Amaldi. La direzione dei gruppi di lavoro è stata affidata al prof. Niels Bohr, Premio Nobel (Danimarca) per gli studi teorici; a M. L. Kowarski (Francia) per l'organizzazione del Laboratorio; al prof. C. J. Bakker (Olanda) ed a M. G. Dahl (Norvegia) per il progetto delle due grandi macchine acceleratrici di particelle elementari.

La designazione a così alta carica del prof. Amaldi ha avuto il carattere di attestazione della grande stima in cui è tenuto il nostro Collega nel mondo scientifico internazionale, e nel tempo stesso di riconoscimento del prestigio della scuola italiana di fisica di cui egli è uno dei massimi esponenti ».

Il Presidente ringrazia i Colleghi Bompiani e Colonnetti per le loro interessanti comunicazioni e manifesta il compiacimento della Classe per l'onorifico incarico di Segretario Generale della nuova organizzazione internazionale al quale, come ha comunicato il Socio Colonnetti, è stato chiamato il Collega E. Amaldi.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Andreatta presenta e offre in omaggio i fascicoli n. 1, 2 e 3 degli « Acta Geologica Alpina » – Contributi di mineralogia, petrografia e geologia – editi a cura dell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna. Il primo di detti fascicoli, dello stesso Socio Andreatta, contiene uno studio dal titolo: « *La Linea di Pejo* nel massiccio dell'Ortler e le sue miloniti »; il secondo, di L. Tomasi, e il terzo, di A. M. Tomba, trattano rispettivamente degli « Studi petrografici dei filoni e contatti del Passo della Bottiglia (gruppo dell'Ortler) » e dello « Studio petrografico e strutturale dei gessi metamorfici della zona dello Stelvio (Alto Adige) ».

Il Socio Vardabasso presenta e offre in omaggio la sua « Guida alle escursioni in Sardegna » divisa in due parti, compilata per il 56° Congresso Geologico, svoltosi nell'Isola nel corrente anno, che può giovare a tutti coloro che desiderano rendersi conto, attraverso l'osservazione diretta, dei numerosi fenomeni e problemi che la geologia della Sardegna presenta.

Il Presidente illustra quindi le opere inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza due pubblicazioni edite in occasione del cinquantenario della scoperta del Radium e intitolate rispettivamente: « Cinquantenaire de la découverte du Radium » e « Colloques internationaux tenus à l'occasion du cinquantenaire de la découverte du Radium » e il volume di J. Hjelmslev dal titolo: « Grundlag for den projektive geometri ».

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

- presentate nella seduta del 10 maggio 1952

- ANDREATTA Ciro. — *La «Linea di Peio» nel massiccio dell'Ortler e le sue miloniti*. Bologna, Soc. Tip. Mareggiani, 1948. Pp. 63, in-8°, con figg. e tavv. («Acta Geologica Alpina» a cura dell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna, 1).
- Cinquantenaire de la découverte du Radium*. Paris, École Supérieure de Physique et Chimie Industrielles, 1950. Pp. 46, in-8°.
- Colloques internationaux tenus à l'occasion du cinquantième de la découverte du Radium*. Paris, École Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles, 1950. Pp. 121, in-8°.
- HJELMSLEV Johannes. — *Grundlag for den projektive geometri*. Koebenhavn, Gyl-dendalske Boghandel, 1943. Pp. 165, in-8°.
- TOMASI Luigi. — *Studi petrografici dei filoni e contatti del Passo della Bottiglia (gruppo dell'Ortler)*. Bologna, Soc. Tip. Mareggiani, 1950. Pp. 52, in-8° («Acta Geologica Alpina» a cura dell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna, 2).
- TOMBA Anna Maria. — *Studio petrografico e strutturale dei gessi metamorfici della zona dello Stevio (Alto Adige)*. Bologna, Soc. Tip. Mareggiani, 1950. Pp. 21, in-8°, con tavv. («Acta Geologica Alpina» a cura dell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna, 3).
- VARDABASSO Silvio. — *Guida alle escursioni in Sardegna*. Cagliari, «Il Quotidiano Sardo», 1952. Vol. 2, in-16°. (Società Geologica Italiana, 56° Congresso).

D. DE BLASI e U. AMALDI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 giugno 1952

Presiede il Socio anziano C. SOMIGLIANA

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Misura e integrazione sulle varietà parametriche.* Nota III ^(*) del Corresp. RENATO CACCIOPPOLI.

19. Le precedenti definizioni generali, al pari delle analoghe della nostra teoria degli insiemi orientati ⁽¹⁾, conducono nel modo più semplice a stabilire le formole integrali classiche nel loro campo naturale di validità.

Consideriamo la formola di Gauss-Green

$$(5) \quad \int_S \mathbf{u} \times \mathbf{n} d\sigma = \int_D \operatorname{div} \mathbf{u} d\omega,$$

dove \mathbf{n} è il versore normale alla superficie chiusa S (n. 17). In ipotesi elementari, per esempio se S è poliedrica, il campo d'integrazione D a secondo membro è l'insieme *interno* ad S , secondo la definizione del n. 3; ed il lemma ivi enunciato fornisce la definizione di D nella formola generale, dedotta mediante passaggio al limite.

Non v'è che da rifarsi alla solita successione $\{\Sigma_n\}$ di superficie poliedriche approssimanti, ed ai relativi insiemi interni D_n : l'integrale di superficie a primo membro tende ⁽²⁾ all'integrale esteso ad S , ed a secondo membro l'insieme d'integrazione D_n converge in media. Posto dunque, con notazione già adoperata, $D = \lim_{n \rightarrow \infty}^* D_n$, la (5) risulta valida nel caso generale.

(*) Presentata nella seduta del 10 maggio 1952.

(1) Ved. N II, n. 21.

(2) Ved. N II, n. 20.

L'insieme ponderato D (definito a meno di un insieme di misura totale nulla) è un insieme « racchiuso » o « limitato » da S in un senso ben determinato ⁽³⁾, dato dalla definizione precedente; D si riduce all'insieme cosiddetto interno se la traccia \bar{S} ha misura nulla, come anche in circostanze più generali, ma non in tutti i casi.

20. La (5), con l'interpretazione dei simboli che involve, è la formola di Gauss-Green per superficie di classe L ; e si estende immediatamente al caso n -dimensionale.

Il risultato si subordina del resto ad altro più generale e completo, relativo alle formole di integrazione parziale di Gauss. Consideriamo la superficie aperta S di equazioni (3), con $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ definite in \mathfrak{A} , ed una sua proiezione, per esempio quella $S^{(3)}$ sul piano xy .

Dalle equazioni

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = wz(u, v),$$

con $0 < w < 1$ (e (u, v) in \mathfrak{A}) è definita una trasformazione Ψ di un insieme aperto \mathfrak{B} dello spazio uvw ; e la terna di funzioni $[x, y, wz]$ è a variazione limitata sempre che sia tale la coppia $[x, y]$, cioè che S risulti di classe L rispetto al piano xy .

Siano $H^{(3)}$ un insieme della famiglia F_3 generata dai continui K_3 in \mathfrak{A} (n. 8), $J^{(3)}$ il relativo insieme $S^{(3)}(H^{(3)})$ su $S^{(3)}$ o se si vuole $S(H^{(3)})$ su S , $W_3(H^{(3)})$ la variazione della coppia $[x, y]$; indichiamo infine con $G^{(3)}$ l'insieme di \mathfrak{B} che si proietta in $H^{(3)}$ sul piano uv , con $D^{(3)}$ il suo pseudo-corrispondente nella trasformazione spaziale Ψ .

Sussiste la formola generale ⁽⁴⁾

$$(6) \quad \int_{J^{(3)}} f(x, y, z) dx dy = \int_{D^{(3)}} \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz,$$

che si può riguardare come elementarmente acquisita, per esempio, per superficie poliedriche. Nella successione approssimante $\{\Sigma_n\}$ definite dalla successione di terne quasi-lineari $\{x_n, y_n, z_n\}$, supponiamo equilimitate le variazioni totali delle coppie $[x_n, y_n]$: saranno allora le terne $[x_n, y_n, wz_n]$ a variazioni equilimitate, e la (6) si otterrà con un passaggio al limite, applicando il risultato del n. 12 (sostituite le trasformazioni piane Φ, Φ_n con la trasformazione spaziale Ψ e con le analoghe Ψ_n).

Supposta S di classe L rispetto ai tre piani coordinati, sussistono le formole dedotte dalla (6) mediante permutazioni circolari; ed in luogo degli insiemi $J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}$ si potrà considerare più generalmente un qualunque insieme J di S , corrispondente ad un insieme H della famiglia F (n. 8).

(3) Cfr. nota (10) al n. 3.

(4) Dove per semplicità si possono supporre continue le derivate prime di f , come nella (5) quelle di u .

Se S è chiusa, si sostituirà all'insieme \mathfrak{B} il prodotto topologico del modello \mathfrak{s} per l'intervallo aperto $0 < w < 1$: per $J \equiv S$, i tre insiemi $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, $D^{(3)}$ si identificheranno con l'insieme D dianzi definito ⁽⁵⁾.

21. Dalla (5) si deduce agevolmente la formola generale di Stokes

$$(7) \quad \int_{\Gamma} \mathbf{u} \times \mathbf{t} d\lambda = \int_S \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{n} d\sigma,$$

supposto per semplicità il contorno Γ di S sostituito da un numero finito di curve rettificabili ⁽⁶⁾, e \mathbf{t} indicando il versore tangente a Γ .

Il secondo membro della (7) è nullo quando S è chiusa ⁽⁷⁾: per dimostrare la formola basta dunque far vedere che S è sempre porzione di un'opportuna superficie chiusa, ammettendovi come complementare (quindi col contorno — Γ) una superficie S' per la quale la (7) stessa sia acquisita; ed all'uopo basta che S' sia *rettificabile* ⁽⁸⁾.

Ora è evidente che una siffatta superficie si può costruire in infiniti modi: per esempio, mediante un dominio piano regolare il cui contorno Γ' sia in corrispondenza biunivoca con Γ , e la superficie descritta dai segmenti rettilinei congiungenti punti corrispondenti su Γ e Γ' . Si vede anzi così che l'area di S' si può maggiorare, *proporzionalmente* al prodotto del diametro per la lunghezza di Γ .

22. Abbiamo stabilito i precedenti risultati tanto per superficie di classe L quanto — nell'identica forma — per superficie di classe L soltanto rispetto ai piani coordinati ⁽⁹⁾; rilevando d'altronde già che la seconda ipotesi non è che apparentemente più generale della prima.

(5) Questi risultati, al pari del seguente sulla formola di Stokes, si trovano già nella nostra prima trattazione (in B), loc. cit. (5) al n. 1), con le relative definizioni degli insiemi d'integrazione D . Va però rettificata un'asserzione gratuita circa la possibilità di identificare tali insiemi con quelli *interni*; asserzione derivante, come l'altra già segnalata nella nota (18) al n. 15, da un'intuizione fallace della struttura geometrica della traccia di una superficie quadrabile.

(6) Γ potrebbe essere più generalmente un insieme linearmente orientato, definito conformemente ai principi della teoria esposta in N II.

(7) Almeno quando le derivate seconde di \mathbf{u} siano continue; noti procedimenti di approssimazione permettono di ridurre quest'ipotesi all'altra (nota (4)) della continuità delle derivate prime. Peraltro è la generalità delle superficie d'integrazione, non delle funzioni integrande, che qui sopra tutto interessa (cfr. N II, n. 21).

(8) Cioè rappresentabile (e rappresentata) mediante funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ lipschitziane. Ved. per esempio la mia Nota *Sulla formola di Stokes*, « Rend. R. Acc. di Napoli », III, 34 (1928). Del resto i risultati fondamentali relativi ai vari argomenti in questione nel « caso lipschitziano » possono ritenersi sostanzialmente acquisiti già con le ricerche di RADEMACHER (« Math. Annalen », 79, 81 (1919-20).

(9) Abbiamo anzi desunto la (7) dalla (5) per potere adottare direttamente questa seconda ipotesi.

Dalla proprietà di decomponibilità mediante curve rettificabili e dalle formole di riduzione (4) (nn. 15 e 18) si deduce assai semplicemente che *una superficie di classe L rispetto ai piani coordinati* ⁽¹⁰⁾ *è di classe L senz'altro.*

Dividiamo lo spazio in cubi di lato $1/N$, mediante i piani $x = n/N$, $y = n/N$, $z = n/N$, e consideriamo una decomposizione di S nelle porzioni S_1, S_2, \dots mediante curve rettificabili appartenenti alle sezioni di S con piani $x = \xi_n, y = \eta_n, z = \zeta_n$, essendo ξ_n, η_n, ζ_n compresi fra n/N e $(n+1)/N$. Dalle formole (4) e analoghe segue, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ essendo limitate per ipotesi, che si possono prendere ξ_n, η_n, ζ_n in modo che la lunghezza complessiva delle curve di decomposizione sia maggiorata proporzionalmente a N ; ognuna delle porzioni S_i di S sarà poi contenuta in un cubo di lato $2/N$ ⁽¹¹⁾.

Sostituiamo S_i con una superficie rettificabile S'_i avente lo stesso contorno (tenendo conto delle sole S_i interne ad S): la costruzione può farsi per tanto osservato nel numero precedente, in modo che risulti limitata indipendentemente da N l'area della superficie rettificabile S' costituita dalle S'_i . Sostituendo poi S' con una superficie poliedrica Σ'_N , giungeremo infine ad una successione di superficie poliedriche approssimanti S ed aventi aree equilimate ⁽¹²⁾.

23. Pur esemplificando sistematicamente, per semplicità di esposizione, la nostra teoria sul caso delle superficie nello spazio ordinario, abbiamo colto più di un'occasione per rilevare l'immediata estendibilità di metodi e risultati fondamentali. Ci rimane ora da fare un bilancio di questi, e da indicare i punti sui quali la teoria va ancora completata.

In primo luogo si estende senz'altro l'analisi delle trasformazioni piane, considerando trasformazioni fra spazi ad n dimensioni, sistemi di n funzioni di n variabili a variazione limitata, assolutamente continui, corrispondenze e pseudo-corrispondenze fra insiemi istituite dalle relative trasformazioni, ecc. Abbiamo già avuto ricorso ad una simile estensione per stabilire nel caso più generale le formole di Gauss (n. 20).

Il risultato del n. 15 sulle sezioni piane di una superficie di classe L rientra nel seguente affatto generale: *Una varietà parametrica k -dimensionale di classe L* ⁽¹³⁾ *in uno spazio n -dimensionale, è tagliata da quasi tutti gli spazi lineari h -dimensionali di una qualunque giacitura in insiemi orientati di misura $(h+k-n)$ -dimensionale finita $(h+k > n)$* ⁽¹⁴⁾.

(10) O rispetto a tre giaciture indipendenti qualunque.

(11) Sostanzialmente questo procedimento, qui adattato al caso generale, non è altro che quello di cui si è servito TONELLI (questi « Rendiconti », VI, 3 (1926)) per dimostrare la sufficienza delle condizioni di quadrabilità per una superficie di equazione $z = f(x, y)$.

(12) Le relative costruzioni non presentando alcuna difficoltà tecnica, possiamo dispensarci qui da qualche minuzia espositiva.

(13) La nozione di varietà parametrica k -dimensionale estende ovviamente quella di superficie precisata al n. 2. Immediata è poi la definizione di varietà di classe L .

(14) Questi insiemi (che occorre appena rilevare ancora sono insiemi di elementi dimensionali, non di punti ordinari) si definiscono secondo i principi della teoria generale.

Nella dimostrazione relativa al caso delle superficie nello spazio ordinario abbiamo utilizzato il lemma del n. 3 sulla convergenza in media degli insiemi interni D_n (n. 14). Il risultato corrispondente nel caso generale è il seguente: *Se la successione $\{C_n\}$ di cicli poliedrici di misure equilimitate tende al ciclo k -dimensionale C , i cicli $C_m - C_n$ sono contorni di complessi $(k+1)$ -dimensionali $K_{m,n}$ la cui misura $(k+1)$ -dimensionale tende a zero per $m, n \rightarrow \infty$ ⁽¹⁵⁾.*

Ad una varietà qualunque V di classe L si estendono poi immediatamente le definizioni di misura k -dimensionale, di spazi lineari normale e tangente, di integrale assoluto $\int_V f dv$, e di integrale $\int_V \omega_k$ di una forma differenziale esterno ω_k di grado k .

Sempre per varietà di classe L si stabilisce inoltre la formola generale di Green-Stokes

$$(8) \quad \int_C \omega_k = \int_V d\omega_k,$$

dove C è il contorno della varietà $(k+1)$ -dimensionale V , mediante passaggio al limite attraverso approssimazioni poliedriche.

24. Fin qui la generalizzazione è semplice e completa. Ma difficoltà non trascurabili si presentano quando si passi a considerazioni legate alla decomponibilità di una superficie di classe L mediante curve rettificabili. Questo risultato si estende bensì, ma solo nel senso che *una varietà k -dimensionale di classe L è decomponibile in porzioni arbitrariamente piccole, i cui contorni abbiano misura $(k-1)$ -dimensionale finita.*

Per $k=2$ si ha la decomposizione di una superficie mediante curve rettificabili. Ma se $k>2$, i contorni in questione non sono più tenuti nemmeno ad essere varietà continue.

D'altra parte, supponiamo la varietà considerata V di classe L soltanto rispetto agli $\binom{n}{k}$ spazi coordinati fondamentali di dimensione k , o, come diremo brevemente, di classe L' . Nel caso esaminato di una superficie dello spazio ordinario, le sezioni con piani paralleli ai piani coordinati risultano (quasi tutte) di lunghezza finita; ma in generale ciò che si può senz'altro affermare è soltanto che le sezioni iperpiane di V hanno proiezioni di misura (assoluta) finita.

Dedurre di qui che tali sezioni hanno misura finita senz'altro, e riconoscere l'identità delle due classi L e L' anche per $k>2$ è un *desideratum* della teoria. Sui fatti non dovrebbero correre dubbi, ma rimane da darne una dimostrazione possibilmente semplice ⁽¹⁶⁾.

(15) $K_{m,n}$, si può costruire mediante i segmenti rettilinei di estremi corrispondenti su C_m, C_n , per il tramite del modello comune.

(16) Cfr. N I, nota (10) al n. 8.

Come per le superficie, le definizioni di misura e di integrale si estendono a varietà di classe L' . Ma andrebbe ancora messa in evidenza l'indipendenza della misura dal sistema di coordinate. La (8) si troverebbe allora stabilita sullo stesso piano di generalità della (7); per intanto, naturalmente, la (6) si estende subito alle ipersuperficie di classe L rispetto ad un iperpiano.

25. Tornando alle superficie, il fatto che le classi L e L' coincidano significa che le superficie quadrabili (cioè di area finita) secondo la nostra definizione generale non sono altro che quelle quadrabili secondo Lebesgue. Ma più difficile è dimostrare che le due definizioni forniscono per l'area valori eguali.

Fin dalle mie prime ricerche, esponendone il programma ⁽¹⁷⁾, ho enunciato quest'eguaglianza, affermato cioè che il minimo limite delle aree delle superficie poliedriche di approssimazione era dato dall'integrale (n. 17)

$$\int \sqrt{dW_1^2 + dW_2^2 + dW_3^2} \quad (18),$$

preconizzando una conseguente definizione assiomatica dell'area ⁽¹⁹⁾. Ho dato in seguito uno schizzo incompleto di dimostrazione, ricorrendo alle rappresentazioni quasi-conformi delle superficie quadrabili ⁽²⁰⁾.

Il risultato è stato poi completamente stabilito da Cesari, come conclusione di una lunga serie di laboriose ricerche ⁽²¹⁾; anche in queste peraltro la rappresentazione quasi-conforme ha ufficio essenziale.

Manca ancora una dimostrazione relativamente semplice, e metodologicamente soddisfacente per la natura degli strumenti adoperati, - in questo nuovo capitolo del Calcolo integrale i metodi avendo non minore importanza dei risultati.

Sopra tutto però il risultato andrebbe esteso a varietà qualunque; e l'ausilio della rappresentazione conforme verrebbe allora a mancare. L'identità, nel caso generale, di quelle che possono chiamarsi le misure secondo Peano e secondo Lebesgue dovrebbe essere il coronamento di tutta la teoria.

(17) Ved. B), loc. cit. (5) al n. 1.

(18) Che si identifica con la *lower area* secondo la terminologia americana.

(19) Cfr. CECCONI, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova », 20 (1951), p. 307.

(20) Ved. la seconda Nota citata in (23) al n. 17. Queste rappresentazioni sono state studiate contemporaneamente, e più compiutamente, da MORREY (« Am. Journal of Math. », 57-58 (1935-36)).

(21) Ved. per le citazioni la monografia di RADÒ (loc. cit. (7) al n. 1).

Meccanica (Meccanica celeste). — *Teoria idrostatica delle configurazioni d'equilibrio dei pianeti fluidi rotanti e teoria di Stokes nel caso particolare della Terra.* Nota^(*) del Corrisp. CORRADINO MINEO.

In questa Nota si fanno alcune considerazioni sui due problemi: quello così arduo e così vasto delle figure d'equilibrio delle masse fluide rotanti (omogenee o non omogenee), che ha occupato i più grandi geometri e analisti (MacLaurin, Jacobi, Poincaré, Liapounoff, Lichtenstein, ...) e che è ben lontano dall'essere risoluto; e quello assai più semplice e limitato e che si può considerare chiuso, dovuto allo Stokes, della determinazione della forma della Terra per mezzo delle misure di gravità.

A proposito di quest'ultimo problema, non si può fare a meno di ricordare il Pizzetti, che della teoria di Stokes, aggiungendovi nuove ricerche e nuovi risultati personali, si occupò ripetutamente, ritenendo che di essa non si fosse tenuto abbastanza conto: il che, in verità, si può ripetere anche oggi, se vi sono ricercatori che con le misure di gravità credono di potere scoprire l'interna distribuzione delle masse terrestri.

Occorre aggiungere che dalla presente Nota risulta, tra l'altro, seppur ce ne sia bisogno, che le accuse mosse recentemente al Pizzetti d'aver potuto ingenerare confusioni o contraddizioni (siano anche apparenti) riguardo ai due problemi, non hanno alcun fondamento, dipendendo unicamente da confusioni ed equivoci del censore⁽¹⁾.

I. PROBLEMA PRIMO: RICERCA DELLE FIGURE D'EQUILIBRIO DEI PIANETI FLUIDI. — Chiamo così, tanto per intenderci, il problema della ricerca delle configurazioni d'equilibrio (relativo) d'una massa fluida rotante uniformemente intorno a un asse fisso, soltanto soggetta alle forze (interne) che si esercitano tra le sue parti secondo la legge di Newton. Poichè in questo caso le forze di massa derivano da un potenziale V_i (potenziale *interno*, che è il solo che importa considerare), l'equazione dell'Idrostatica pura, dalla quale soltanto dipende il problema, si può scrivere così, scegliendo come asse z l'asse della rotazione:

$$(I) \quad \frac{dp}{k} = d \left[fV_i + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \right],$$

essendo f la costante dell'attrazione universale, ω la velocità angolare costante, k la densità della massa, funzione della pressione p . La vera incognita è la

(*) Presentata nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) G. B. PACELLA, *Considerazioni sul contributo del Pizzetti e del Somigliana al problema di Stokes.* Questi « Rendiconti », 2° semestre 1951, fasc. 1-2, pp. 69-73.

stratificazione (la funzione k s'intende data), cioè l'insieme delle superficie di egual potenziale totale (newtoniano e della forza centrifuga):

$$(2) \quad fV_i + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{costante},$$

che chiameremo *superficie d'equilibrio* (sono nello stesso tempo d'egual densità, d'egual pressione, d'egual temperatura). Si suppone che le (2) siano superficie chiuse del tipo topologico della sfera, contenute l'una dentro l'altra, riducentisi a un punto dell'asse di rotazione (il centro di gravità della massa fluida). Passando a coordinate polari r, θ, ψ (polo il centro dell'astro, asse polare l'asse z), si può supporre che l'equazione della famiglia (2) sia

$$(3) \quad r = a(1 + \zeta),$$

dove ζ è una funzione incognita di θ, ψ, a . Il parametro a , che fissa una superficie della stratificazione, varia da zero a un valore A corrispondente alla superficie S della massa: *superficie che si deve supporre anch'essa d'equilibrio e quindi d'egual pressione*.

Si dimostra facilmente che la (1) equivale all'equazione

$$(4) \quad fV_i + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{funzione di sola } a.$$

In più modi la (4) si traduce in una equazione integrale (o integro-differenziale), nella quale, però, l'incognita è il dominio d'integrazione (dipendente dalla cercata stratificazione). Il problema è quindi d'un'estrema difficoltà.

Più semplice è il caso delle masse fluide omogenee e si capisce perchè storicamente è il primo a esser affrontato. Si ebbero gli ellissoidi di rotazione di Maclaurin (1742) e quelli triassici di Jacobi (1834), così chiamati dai nomi degli scopritori. La stratificazione, in questo caso, è costituita di ellissoidi concentrici e omotetici, come si vede subito partendo dalle note espressioni di V_i per gli ellissoidi omogenei: tutto si riduce quindi, nel caso di k costante, a imporre la condizione che anche la superficie libera S sia d'equilibrio (e quindi d'egual pressione), giacchè la (1) diventa semplicemente:

$$(5) \quad \frac{\phi}{k} = fV_i + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \text{costante}.$$

Si ottengono allora immediatamente le note condizioni d'esistenza per gli ellissoidi omogenei. Altre soluzioni (non tutte) sono state poi trovate, magistralmente esposte dall'Appell⁽²⁾.

Ma il problema delle masse liquide omogenee riguarda assai da lontano la figura dei pianeti e della Terra. Nel caso delle masse fluide eterogenee, dap-

(2) Vedi APPELL, *Mécanique rationnelle*. Tome quatrième, fascicule 1, Paris, Gauthier-Villars, 1932.

prima i risultati sono negativi; si escludono cioè certe stratificazioni: dal Volterra, quella per ellissoidi omotetici, anche nel caso di densità non verificanti l'equazione del Poisson ⁽³⁾. Questa impossibilità, ma nel caso di densità verificanti l'equazione del Poisson, fu estesa dal Wavre a una stratificazione omotetica di forma qualunque ⁽⁴⁾, con una dimostrazione che io ho semplificato e precisato in qualche punto ⁽⁵⁾. Ma una stratificazione per ellissoidi, sempre per densità verificanti l'equazione del Poisson, fu esclusa dal Pizzetti ⁽⁶⁾, prima che dal Dive e dal Wavre.

Ma con Poincaré e Liapounoff il problema relativo alle masse fluide eterogenee, progredisce e porta a risultati positivi. La principale difficoltà consiste nella dimostrazione della convergenza delle serie che danno la soluzione; senza della quale dimostrazione, la soluzione, pur verificando le condizioni d'equilibrio, è puramente formale. Le prime soluzioni trovate valgono infatti *in prima approssimazione*. E qui torna a proposito ricordare che il Clairaut, fin dal 1743, con acute considerazioni, nelle quali si trova in fondo, *ante litteram*, la nozione di funzione delle forze o potenziale, aveva trovato che una stratificazione ellissoidica verifica, *appunto in prima approssimazione*, le condizioni d'equilibrio relativo nel problema della figura della Terra: problema, intanto, dal quale si può dire sia sorta l'Idrostatica pura.

Ebbene, la soluzione datane dal Clairaut, dopo due secoli, conserva la sua grande importanza!

Una soluzione rigorosa, con la quale l'approssimazione si può spingere quanto si vuole, fu data dal Liapounoff, sebbene, come l'Autore riconosce, le serie da lui trovate abbiano un raggio di convergenza molto piccolo da potere essere applicate alla figura dei pianeti (si possono applicare al caso del Sole) ⁽⁷⁾.

A proposito del lavoro del Liapounoff, credo degna di nota una coincidenza: la struttura della stratificazione (*interna*) della massa, secondo superficie di rotazione d'uno speciale tipo, trovata dal Liapounoff, è quella trovata da me per le superficie d'equilibrio *esterne*, nella sola ipotesi che la superficie libera del pianeta sia una superficie d'equilibrio del tipo in discorso. Questa struttura è stata ritrovata dal Wavre (loc. cit.), per la stratificazione (*interna*) nel problema di Clairaut, del quale egli dà una soluzione puramente formale, non affrontando la questione di convergenza delle serie (loc. cit., p. 86).

(3) Vedi VOLTERRA, « Acta Mathematica », 27, pp. 105-124 (1903).

(4) Vedi WAVRE, *Figures planétaires et Géodésie*. Paris, Gauthier-Villars, 1932, pp. 105-124.

(5) Vedi CORRADINO MINEO, *Sulla impossibilità d'una stratificazione d'equilibrio omotetica per gli astri fluidi rotanti*. Questi « Rendiconti », serie 6^a, fasc. 9 (1937); e anche: *Su una condizione necessaria per la stratificazione d'un astro fluido rotante in equilibrio relativo*. Ibidem, ser. 8^a, vol. I (1946).

(6) Vedi PIZZETTI, *Principi della teoria meccanica della figura dei pianeti*. Pisa, Spoerri, p. 193 (1903).

(7) Vedi LIAPOUNOFF, *Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes*. « Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg », vol. XIV, n. 7 (1903).

Io ho semplificato il procedimento del Wavre, rendendolo più rapido dal punto di vista delle successive approssimazioni⁽⁸⁾.

Risultati importanti e proprietà generali assai notevoli, per le masse fluide eterogenee, sono stati poi stabiliti dal Lichtenstein; il quale ha trovato nuove figure d'equilibrio, omogenee ed eterogenee, in vicinanza d'una data figura d'equilibrio, non necessariamente omogenea, adoperando un valido procedimento di approssimazioni successive: procedimento che costituisce un primo fondamento rigoroso della teoria di Clairaut della figura della Terra⁽⁹⁾.

Ma il caso delle rotazioni in blocco (al quale soltanto, per brevità, abbiamo accennato in questa Nota) non è certo il più importante dal punto di vista delle figure d'equilibrio dei corpi celesti (non sono rotazioni d'insieme quelle del Sole, di Giove, di Saturno): sicchè è giunta l'ora, come pensa l'Hadamard, di rinunciare a certe classiche semplificazioni, per tener conto di tutte le reazioni che sulla forma di questi corpi esercitano i moti dei loro centri di gravità e di altri fatti che non sono senza nesso con lo studio della Terra, e che vanno confrontati con i dati geologici, non esclusa la recente teoria della deriva dei continenti⁽¹⁰⁾.

2. SECONDO PROBLEMA: FIGURA DELLA TERRA PER MEZZO DELLE MISURE DI GRAVITÀ. - Nel primo problema, quello che interviene, lo ripetiamo, è il potenziale interno V_i , dal quale dipende la famiglia (2) della stratificazione. Ma se del primo problema si trova una soluzione concreta e ci si dà la funzione k , il potenziale newtoniano resta determinato in tutto lo spazio e quindi resta determinato anche il potenziale esterno V_e (o l'azione esterna dell'astro, come si può dire). Ma V_e , d'altra parte, è individuata, per essere funzione armonica all'esterno di S , regolare e nulla all'infinito e per essere data sul contorno S , per mezzo della (2), quando ci si metta su S , purchè naturalmente si conoscano ω e la massa totale M dell'astro (per mezzo di M resta univocamente determinato il valore della costante su S). La V_e , in somma, si può avere risolvendo un problema di Dirichlet esterno rispetto a S . È questa l'idea tanto semplice e feconda che nel 1849 si è presentata alla mente dello Stokes e sulla quale si fonda la sua teoria sulla forma della Terra.

Fatta un'ipotesi su S , V_e resta determinata e quindi anche la gravità fuori di S e su S ; epperò, per mezzo di misure di gravità eseguite su S , l'ipotesi può esser cimentata con i fatti. Resta da vedere se una tale ipotesi non vin-

(8) Vedi CORRADINO MINEO, *Potenziale newtoniano all'esterno d'un astro e stratificazioni d'equilibrio*. « Società Italiana per il progresso delle Scienze », vol. II, ottobre 1933; e anche: « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », Anno V (1926); « Atti dell'Accademia di Scienze, Lettere e Arti di Palermo », vol. XVI (1926-27); « The Quarterly Journal of Mathematics », Oxford Series, vol. I (1930).

(9) Vedi LEON LICHTENSTEIN, *Gleichgewichtfiguren rotierender Flüssigkeiten*, Berlin, Springer, 1933.

(10) Vedi HADAMARD, Prefazione all'opera citata del WAVRE.

coli in qualche modo la costituzione interna del pianeta. Questione alla quale diede subito risposta lo stesso Stokes e che fu poi studiata da altri: in infiniti modi si può variare la densità interna senza che la supposta superficie esteriore d'equilibrio S cambi (espansione sferica dello Schiaparelli, corpi d'attrazione nulla del Pizzetti, ecc.). Se, dopo aver trovato V_e , si determina la funzione V_i armonica all'interno di S e che su S si raccorda con V_e , la funzione

$$(6) \quad \mu = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV_e}{dn_e} + \frac{dV_i}{dn_i} \right),$$

è, come è ben noto, la densità d'un semplice strato che disteso su S esercita la stessa azione esterna corrispondente a V_e . Di questa proprietà mi sono servito, nel caso che S sia un ellissoide triassico, per dedurre infinite densità interne spaziali cui corrisponde la stessa azione esterna. E, più in generale, ho fatto vedere come si possano assegnare *tutte* le possibili densità interne, considerando S (come sempre si può fare) appartenente a un sistema triplo ortogonale, risolvendo effettivamente il problema, nel caso dell'ellissoide a tre assi, per mezzo delle funzioni di Lamé⁽¹¹⁾. Questi metodi consistono nel trovare una V_i , all'interno di S , tale che, su S , V_i e dV_i/dn_i si raccordino con V_e e dV_e/dn_e ; ma ulteriori difficoltà nascono se si vuole che il ΔV_i sia continuo e quindi finito.

Epperò si deve concludere che il merito di avere definito scultoriamente il grado d'indeterminazione di k va esclusivamente al Lauricella: resta arbitrario il laplaciano della densità. Se oltre all'azione esterna è conosciuto il moto del pianeta intorno al centro di gravità, il Δk è soggetto a una ulteriore condizione, che però lascia ancora sussistere una grande arbitrarietà⁽¹²⁾.

3. CONFRONTO TRA I DUE PROBLEMI. — Ognun vede come i due problemi siano affatto distinti e inconfondibili. Nel 1° problema, l'incognita è la stratificazione, quindi V_i , che deve obbedire alle leggi dell'Idrostatica. Certo, una volta determinata una soluzione *concreta* del 1° problema, resta determinata (n. 2) anche V_e e quindi risoluto anche il 2° problema rispetto a S . Ma, reciprocamente, risoluto il 2° problema, la conoscenza di V_e ci mette in grado di risolvere il 1°, cioè di trovare una stratificazione interna quale è richiesta dall'Idrostatica? Dovremmo cercare un potenziale interno V_i , schematicamente della forma

$$(7) \quad V_i = U + \Phi,$$

(11) Vedi CORRADINO MINEO, *Sulla distribuzione della massa nell'interno d'un corpo in corrispondenza a una assegnata azione esterna*. Questi « Rendiconti », vol. XXIV (1915); e anche: *Distribuzioni della massa nell'interno della Terra compatibili con i valori della gravità in superficie*. « Atti dell'Acc. di Sc., Lett. e Arti di Palermo », vol. XIV (1929).

(12) Vedi LAURICELLA, *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna*. Questi « Rendiconti », vol. XX (1911) e vol. XXI (1912).

dove U è una funzione nota e Φ una funzione incognita verificante (per densità soddisfacenti all'equazione del Poisson) la condizione (n. 1):

$$\Delta \left(fU + f\Phi + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \right) = F \left(fU + f\Phi + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \right),$$

dove F è simbolo di funzione arbitraria! Una via assai più aspra di quella, già abbastanza ardua, seguita dai ricercatori.

Vediamo ora brevemente con quali argomenti il Pacella crede di dimostrare che il Pizzetti (proprio il Pizzetti!) possa dare l'impressione di confondere i due problemi. Il Pizzetti si serve delle note espressioni matematiche del potenziale *esterno* d'un ellissoide omogeneo (solido o liquido, cioè comunque costituito), rotondo o no, per risolvere il 2° problema, nel caso che la S sia un ellissoide; ma questi potenziali si adoperano nel 1° problema (veramente nel 1° problema entrano i potenziali *interni*), per cercare le configurazioni d'equilibrio delle masse liquide omogenee limitate da ellissoidi: *ergo*, può sembrare (a chi?) che il 2° problema discenda dal 1°!! Reciprocamente, può sembrare, sempre secondo il Pacella, che il Pizzetti nel suo trattato voglia far discendere dal 2° problema il 1°, relativo agli ellissoidi omogenei fluidi d'equilibrio di Maclaurin e Jacobi: confusione che nientemeno spiega, secondo il Pacella, perchè l'Appell non citi, nel suo trattato, quello del Pizzetti! Il vero è che il Pacella sembra ignorare che il 1° problema è un problema d'Idrostatica e che il Pizzetti [loc. cit., Cap. X, equazioni (4) e (5)] ha ben presente l'equazione (5) del n. 1, quando tratta l'argomento. E potremmo fermarci qui, se il Pacella non insistesse sulla seguente *antinomia*: Maclaurin, Jacobi, Poincaré, nel 1° problema, ammettono *a priori* (*sic*) l'omogeneità della massa, mentre nel 2° problema questa omogeneità in generale è esclusa! E il Pacella crede necessario di spiegare quest'antinomia, in una seconda Nota, intitolata: *Come siano possibili le soluzioni di Maclaurin e di Jacobi con densità costante*⁽¹³⁾, quasichè questa possibilità non fosse stata già dimostrata da quegli Autori [basta procedere per semplice verifica (n. 1)]. Ma il Pacella crede che la chiave del mistero stia in una formola del Somigliana, che mette il potenziale *esterno* d'un qualunque geoido sotto la forma

$$(8) \quad V_e = \frac{M}{\tau} U_e + F_e,$$

dove U_e è il potenziale *esterno* della massa totale M distribuita uniformemente nel volume τ racchiuso da S e F_e una funzione che resta determinata per differenza se V_e e U_e sono già note (il difficile in pratica è di avere U_e sotto una forma maneggevole). Più di metà della Nota del Pacella serve a illustrare questa formola inutile, per lo scopo che si ha in vista, per poi finire col dichiarare che F_e è da ritenere nulla (come si sapeva fin dal principio!);

(13) Vedi G. B. PACELLA, « Bollettino di Geodesia e Scienze affini dell'Istituto Geografico Militare », anno X, n. 4 (1951).

e così il Pacella si decide a fare, per identificazione, quella nota verifica con la quale, in modo non chiaro (perchè il Pacella armeggia su U_s , mentre si tratta di U_s) vien fuori la condizione per l'esistenza d'un ellissoide di Maclaurin. Ma il lettore potrebbe domandare al Pacella perchè quella semplice verifica in superficie assicura la soluzione *idrostatica* del problema.

Da sola quella verifica non direbbe niente se non si sapesse, che nel caso omogeneo, essa basta ad assicurare che l'equazione (5) del n. 1 resta soddisfatta.

4. IL MODELLO ELLISSOIDICO NEL 1° E NEL 2° PROBLEMA. — L'importanza dell'ipotesi ellissoidica nel 1° problema è incontestabile, soprattutto nel caso della Terra. I calcoli in 2^a approssimazione dell'inverso dello schiacciamento terrestre, per esempio, sulla base dei dati relativi all'attrazione e alla precessione, danno luogo a interessanti confronti con le misure geometriche e gravimetriche, per quanto queste ultime non raggiungano per ora una sufficiente precisione; ma se appresso, raggiungendo una più alta precisione, i valori osservati non concordassero con quelli fisico-astronomici, la teoria di una Terra originariamente fluida sarebbe da abbandonare, per ricorrere a schemi meno semplici ma più vicini alla realtà (n. 1) ⁽¹⁴⁾.

Quale è l'importanza, ai fini della determinazione della forma della Terra per mezzo delle misure di gravità, del 2° problema? Si possono determinare, per mezzo di tali misure, come ha fatto il Somigliana, le tre costanti del geoide ellissoidico di rotazione (asse maggiore, schiacciamento e densità media), e dalla formola (10) del Pizzetti (loc. cit., p. 52) si può dedurre una formola rigorosa che dà la gravità. Risultati che si estendono al caso dell'Ellissoide a tre assi ineguali. L'espressione rigorosa della gravità in quest'ultimo caso, è stata data da me. E sempre nel caso d'un' Ellissoide a tre assi ineguali ($a > b > c$), ruotante uniformemente intorno all'asse più piccolo, ho potuto, per mezzo delle formole del Pizzetti, risolvere, rigorosamente e definitivamente, un dibattito sorto sulla orientazione dell'ellisse equatoriale ⁽¹⁵⁾.

(14) Vedi APPELL, *Mécanique rationnelle*. Tome quatrième, fascicule II, Paris, Gauthier-Villars, 1937. — Purtroppo questo 2° fascicolo, dedicato ai pianeti fluidi eterogenei, è apparso dopo la morte dell'A., a cura del VÉRONNET, e la trattazione lascia qualche volta a desiderare. È sorprendente, per esempio, il modo col quale il VÉRONNET esclude la possibilità di figure eterogenee d'equilibrio non di rotazione. Nota che la curva d'intersezione d'una superficie d'equilibrio $fV_i + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = C_1$ con una superficie d'egual potenziale

newtoniano $fV_i = C_2$, è la curva (I) $\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = C_1 - C_2$ e che quindi le due superficie, le cui sezioni con piani normali all'asse z sono cerchi (I), sono tutt'e due di rotazione. Così si dimostra addirittura che ogni superficie è di rotazione!

(15) Vedi C. MINEO, *Sulla gravità superficiale d'un pianeta supposto ellissoidico a tre assi*. « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », Anno VII, n. 2, aprile 1928; e anche: *Sur l'orientation de l'ellipse équatoriale terrestre*. « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences », t. 189, p. 481, séance du 30 septembre 1929.

Più in generale, poi, sono stato condotto a pormi la questione se e quando la forma d'un pianeta (in particolare della Terra) si possa determinare per mezzo dei valori della gravità sull'*incognita* superficie: problema che ho fatto dipendere da un sistema di due complicate equazioni integro-differenziali, nel quale le incognite sono la superficie S (cioè il dominio stesso d'integrazione) e la gravità g ⁽¹⁶⁾.

Ma il modello ellissoidico non è che... un modello, al quale il Somigliana - e con ciò non intendo scemare pregio alle sue magistrali ricerche - dà forse eccessivo peso. In un passo d'una sua Nota, per esempio, il Somigliana sembra così preso del suo modello da preferirlo alla realtà; ma, in una Nota successiva, è costretto ad ammettere che una *eventuale* discordanza della teoria rigorosa dai valori osservati della gravità non può essere attribuita che a effettive differenze del geoide reale dal geoide regolare ellissoidico di rotazione ⁽¹⁷⁾. E forse che queste discordanze, non *eventuali* ma *reali*, non sono state constatate? Sono forse da mettere in dubbio le *anomalie* della gravità (anomalie rispetto all'ipotesi ellissoidica)? Sono forse da mettere in dubbio le *deviazioni della verticale*, secondo me più probanti (sempre rispetto al modello ellissoidico), che arrivano ai 30 secondi d'arco e più? O si intende trascurarle per amore del modello teorico? Ma in questo caso le formole rigorose della teoria ellissoidica diventano formole da museo e la 1^a approssimazione di Clairaut è più che sufficiente.

Ecco perchè chi, come il Pizzetti, - che pure tanta parte dava alle ricerche teoriche, - vuole stringer più davvicino la realtà, non se ne può stare all'Ellissoide di più d'un secolo addietro, ma deve passare a ipotesi sferoidiche più aderenti ai fatti, promovendo sempre nuove ricerche ⁽¹⁸⁾; molto più che ancora gran parte della Terra è poco o punto esplorata, e non si sa quanto nuove esplorazioni, vivamente da augurarsi, possano modificare le nostre idee sul problema della forma e della costituzione della Terra, così avvincente dal punto di vista teorico e così importante ai fini pratici.

(16) Vedi C. MINEO, *Forma d'un pianeta dedotta dei valori della gravità in superficie*. Nota I, questi « Rendiconti », vol. XXIX, maggio 1939; Nota II, « Rendiconti dell'Accademia d'Italia », vol. I, 1939; Nota III, *Ibidem*, vol. IV (1942).

(17) Vedi SOMIGLIANA, *Sulle relazioni che esistono fra le costanti geoidiche e i valori della gravità*. Questi « Rendiconti », vol. V, ser. 6^a, 1^o sem., fasc. I, p. 323 (1927); *Sulla determinazione delle costanti del geoide mediante misure di gravità*. « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino », vol. LXII p. 239 (1927); *Teoria generale del campo gravitazionale dell'Ellissoide di rotazione*. « Memorie della Società Astronomica Italiana », Nuova Serie, vol. IV (1927).

(18) Vedi PIZZETTI, loc. cit., Capitoli VIII e XIII. Vedi anche: C. MINEO, *Sulla formola di Stokes che serve a determinare la forma della Terra*. « Rend. Circolo Mat. di Palermo », t. 51 (1927); *On the limits of validity of a theorem of Stokes regarding the figure of the Earth*. « The Quarterly Journal of Mathematics », Oxford Series, vol. V, n. 15, Sept. 1933; *Ueber die Bestimmung der Form einer Planeten durch Schwerkraftmessungen bei nicht langsamer Achsendrehung*. « Astr. Nachr. », No. 6131, Band 256, Juli 1935; *Il potenziale terrestre e la riduzione dei valori osservati della gravità a una superficie di riferimento*. « Annali di Matematica pura ed applicata », Bologna 1937.

Geodesia. — *Sulla determinazione pratica dei coefficienti di un polinomio di funzioni sferiche.* Nota (*) del Socio GIOVANNI SILVA.

1. È ben noto che, se si sono misurati n valori l_r ($r = 1, 2, \dots, n$) di una certa grandezza l in corrispondenza di n valori t_r di una certa altra grandezza t , e se tali risultati sperimentali dimostrano che l è una funzione periodica della t con un determinato periodo T , si suole rappresentare l con un polinomio di Fourier, cioè con alcuni termini, generalmente i primi, della corrispondente serie. Considerando ad esempio i primi tre termini completi, le n osservazioni danno origine alle n equazioni

$$(1) \quad a_0 + a_1 \cos \lambda_r + b_1 \sin \lambda_r + a_2 \cos 2 \lambda_r + b_2 \sin 2 \lambda_r = l_r + v_r,$$

nelle quali λ_r è la *fase*, che, salvo l'aggiunta di un opportuno termine additivo, rappresenta il rapporto $2 \pi t_r/T$, e v_r è un residuo incognito, derivante sia dagli errori delle osservazioni e del periodo T , sia dall'imperfezione dell'ipotesi fatta circa la rappresentabilità della grandezza l a mezzo del primo membro della (1).

È pure ben noto che il principio dei minimi quadrati riduce il sistema delle n equazioni (1), che nell'esempio adottato hanno $n + 5$ incognite, a cinque *equazioni normali*, la cui risoluzione dà le incognite effettive a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 . Meno noto, ma immediatamente verificabile, è il risultato a cui si perviene se le fasi osservate λ_r sono uniformemente distribuite sulla circonferenza. In tal caso i coefficienti delle incognite che, nelle equazioni normali, non appartengono alla diagonale principale sono nulli, mentre il primo di quelli che vi appartengono, che è coefficiente di a_0 , vale n e i successivi, che sono coefficienti delle altre incognite, valgono $n/2$; le dette equazioni normali si presentano dunque già risolte. Scopo principale della presente Nota è l'estensione di tale procedimento a una grandezza l che sia funzione di una direzione dello spazio, e cioè delle due variabili che determinano tale direzione, per esempio la latitudine φ e la longitudine λ .

2. Nel caso ora detto, la forma analitica più adatta a rappresentare la funzione l delle due variabili φ e λ è indubbiamente un polinomio di funzioni sferiche, o, più propriamente, l'insieme di pochi termini, scelti opportunamente, delle funzioni sferiche dei primi ordini appartenenti allo sviluppo in serie :

$$(2) \quad l = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots,$$

(*) Presentata nella seduta del 14 giugno 1952.

nel quale il termine generico Y_n è la funzione sferica di ordine n ed ha una espressione dell'uno o dell'altro dei due tipi seguenti, solo formalmente diversi:

$$(3) \quad Y_n = \sum_0^n a_{n,i} F_{n,i}(\sin \varphi) \cos i(\lambda - \lambda_{n,i}) = \\ = \sum_0^n F_{n,i}(\sin \varphi) [a'_{n,i} \cos i\lambda + a''_{n,i} \sin i\lambda].$$

In tali espressioni: $a_{n,i}$, $\lambda_{n,i}$, $a'_{n,i}$, $a''_{n,i}$ sono costanti; $F_{n,0}(\mu)$ coincide con il polinomio di Legendre $P_n(\mu)$ di ordine n , e cioè vale 1 se $n=0$, vale μ per $n=1$ e in generale, per $n=2h$ o per $n=2h+1$, vale

$$(4) \quad F_{n,0}(\mu) = P_n(\mu) = \\ = \sum_0^h (-1)^s \frac{(2n-2s-1)(2n-2s-3)\cdots(2n-2s-2h+1)}{2^h s! (h-s)!} \mu^{n-2s};$$

infine, per $i > 0$, posto

$$(5) \quad p_{n,i} = \frac{2}{(n-i+1)(n-i+2)\cdots(n+i)},$$

si è qui indicata con $F_{n,i}$ l'espressione

$$(6) \quad F_{n,i}(\mu) = \sqrt{p_{n,i}} (1 - \mu^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^i P_n(\mu)}{d\mu^i},$$

mentre si suole più spesso escludere dalla $F_{n,i}(\sin \varphi)$ il radicale, in quanto il fattore costante $\sqrt{p_{n,i}}$ può ritenersi incluso nel coefficiente $a_{n,i}$ e il fattore variabile $\sqrt{(1 - \mu^2)^i}$ può scriversi a parte sotto la forma $\cos^i \varphi$.

È facile riconoscere che, per $n-i=2k$ o per $n-i=2k+1$, si ha

$$(7) \quad \frac{d^i P_n(\mu)}{d\mu^i} = \sum_0^k (-1)^s \frac{(2n-2s-1)(2n-2s-3)\cdots(2n-2s-2i-2k+1)}{2^k s! (k-s)!} \mu^{n-i-2s},$$

e che in tale eguaglianza rientra pure la (4) per $i=0$, mentre per $i=n$ la sommatoria si riduce al solo termine

$$(8) \quad \frac{d^n P_n(\mu)}{d\mu^n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1).$$

Il coefficiente $\sqrt{p_{n,i}}$ dato dalla (5) serve soltanto a togliere una certa arbitrarietà di scelta dei coefficienti numerici noti che, almeno in parte, devono affiancare i coefficienti, generalmente incogniti, $a_{n,i}$. Con le notazioni qui usate, se θ rappresenta l'angolo fra due direzioni determinate dalle coordinate angolari φ, λ e φ', λ' , risulta

$$P_n(\cos \theta) = \sum_i^n F_{n,i}(\sin \varphi) F_{n,i}(\sin \varphi') \cos i(\lambda - \lambda').$$

Per $\varphi = \varphi'$, $\lambda = \lambda'$ ne deriva la notevole proprietà

$$\sum_0^n F_{n,i}^2(\sin \varphi) = 1, \quad \text{ossia} \quad \sum_0^n F_{n,i}^2(\mu) = 1,$$

che vale per le $F_{n,i}$ sopra definite, qualunque siano φ o μ . L'opportunità di introdurre nelle $F_{n,i}$ il coefficiente $\sqrt{p_{n,i}}$ risulterà pure dal n. 4.

L'applicazione delle formule da (3) a (8) dà allo sviluppo (2) della funzione l la forma seguente

$$\begin{aligned} (9) \quad l = & a_{0,0} + (\sin \varphi) a_{1,0} + \cos \varphi (a'_{1,1} \cos \lambda + a''_{1,1} \sin \lambda) + \\ & + (1.5000 \sin^2 \varphi - 0.5000) a_{2,0} + \\ & + 1.7320 \sin \varphi \cos \varphi (a'_{2,1} \cos \lambda + a''_{2,1} \sin \lambda) + \\ & + 0.8660 \cos^2 \varphi (a'_{2,2} \cos 2\lambda + a''_{2,2} \sin 2\lambda) + \\ & + (2.5000 \sin^3 \varphi - 1.5000 \sin \varphi) a_{3,0} + \\ & + (3.0618 \sin^2 \varphi - 0.6124) \cos \varphi (a'_{3,1} \cos \lambda + a''_{3,1} \sin \lambda) + \\ & + 1.9365 \sin \varphi \cos^2 \varphi (a'_{3,2} \cos 2\lambda + a''_{3,2} \sin 2\lambda) + \\ & + 0.7906 \cos^3 \varphi (a'_{3,3} \cos 3\lambda + a''_{3,3} \sin 3\lambda) + \\ & + (4.7250 \sin^4 \varphi - 3.7500 \sin^2 \varphi + 0.4250) a_{4,0} + \\ & + (5.4140 \sin^3 \varphi - 2.3717 \sin \varphi) \cos \varphi (a'_{4,1} \cos \lambda + a''_{4,1} \sin \lambda) + \\ & + (3.7931 \sin^2 \varphi - 0.5590) \cos^2 \varphi (a'_{4,2} \cos 2\lambda + a''_{4,2} \sin 2\lambda) + \\ & + 2.0917 \sin \varphi \cos^3 \varphi (a'_{4,3} \cos 3\lambda + a''_{4,3} \sin 3\lambda) + \\ & + 0.7395 \cos^4 \varphi (a'_{4,4} \cos 4\lambda + a''_{4,4} \sin 4\lambda) + \\ & + (7.8750 \sin^5 \varphi - 8.7500 \sin^3 \varphi + 1.8750 \sin \varphi) a_{5,0} + \dots \end{aligned}$$

Se si conoscono N valori l_r ($r = 1, 2, \dots, N$) in corrispondenza di N coppie di valori φ_r, λ_r delle due variabili indipendenti, la (9) dà luogo a N equazioni da cui trarre, con il metodo dei minimi quadrati, le incognite $a'_{n,i}, a''_{n,i}$ di quei termini dello sviluppo scritto, che si ritengono necessari e sufficienti per la rappresentazione analitica della funzione l .

3. Per ripartire il più uniformemente possibile nello spazio un numero N sufficientemente grande di direzioni φ_r, λ_r , secondo le quali devono essere determinati gli N valori l_r della funzione in esame, conviene considerare una superficie sferica di raggio unitario, il cui centro sia l'origine del sistema di coordinate equatoriali qui considerate, e immaginarla suddivisa, mediante cerchi minori paralleli all'equatore, in un certo numero di zone, per modo che ogni zona abbia un'area multipla, secondo un numero intero m , di una medesima area elementare σ ; in tal caso m meridiani equidistanti fra loro dividono la zona in m parti elementari. La somma dei numeri interi m , relativi a tutte le zone, dovrà essere il numero $N = 4\pi/\sigma$.

Per riconoscere come si possa raggiungere questa suddivisione nel miglior modo possibile, osserviamo in primo luogo che, se φ_g, φ_{g+1} sono le latitudini dei paralleli che limitano la zona di area uguale a $m_g \sigma$, si ha

$$2 \pi (\sin \varphi_{g+1} - \sin \varphi_g) = \frac{4 \pi m_g}{N}$$

e quindi

$$(10) \quad 2 m_g = N (\sin \varphi_{g+1} - \sin \varphi_g).$$

In secondo luogo stabiliamo che, delle N parti in cui vogliamo dividere la superficie sferica, due siano calotte polari e le rimanenti $N - 2$ siano distribuite in un certo numero di zone che qui, per fissare le idee, supporremo uguale a nove. Avendo scelto un numero dispari, riterremo che una di tali zone sia limitata da due paralleli simmetrici rispetto all'equatore, di cui indicheremo con $+\varphi_1$, e $-\varphi_1$ le latitudini; riterremo altresì che anche le altre zone sieno, a due a due, simmetriche rispetto all'equatore, e indicheremo le latitudini dei paralleli che separano queste zone fra loro e dalle due calotte con $\pm \varphi_2, \pm \varphi_3, \pm \varphi_4, \pm \varphi_5$; infine per tutte le successive zone, a partire da quella equatoriale, e procedendo verso entrambi i poli, chiameremo m_0, m_1, m_2, m_3, m_4 le parti di area σ che esse contengono.

Per le due calotte $m_g = m_5 = 1$, $\varphi_g = \varphi_5$, $\varphi_{g+1} = 90^\circ$ per la calotta boreale, $\varphi_g = -90^\circ$, $\varphi_{g+1} = -\varphi_5$ per quella australe; in entrambi i casi la (10) dà

$$(11) \quad 2 = N (1 - \sin \varphi_5).$$

Per la zona boreale, e per quella simmetrica australe che contornano le due calotte, la stessa (10) dà similmente

$$(12) \quad 2 m_4 = N (\sin \varphi_5 - \sin \varphi_4).$$

Le lunghezze degli archi di parallelo che limitano una parte σ di questa zona valgono $2 \pi \cos \varphi_4 / m_4$, $2 \pi \cos \varphi_5 / m_4$ ed è facile riconoscere che, se si fa $v = 1/N$, il valore medio di queste due lunghezze e la lunghezza $\varphi_5 - \varphi_4$ dell'arco di meridiano che separa i due paralleli sono entrambe dell'ordine di \sqrt{v} , com'è del resto naturale, essendo l'area uguale a $4 \pi v$; si riconosce pure che, se si trascura v di fronte all'unità, il loro rapporto vale $\pi : (\sqrt{m_4 + 1} - 1)^2$. Segue da ciò che, per N abbastanza grande, tale rapporto risulta molto prossimo al valore 1,16 quando si fa $m_4 = 6$ e al valore 0,94 quando si fa $m_4 = 7$, sicchè questa seconda scelta è più opportuna della prima.

Le altre sette zone intermedie abbracciano un arco di meridiano di ampiezza $2 \varphi_4$; quindi, affinchè le dimensioni, secondo i meridiani e secondo i paralleli, delle loro parti di area σ siano prossime fra loro e alle medie

dimensioni delle parti della zona già considerata, dovrà essere approssimativamente soddisfatta la condizione

$$(13) \quad \frac{1}{2} \left\{ (\varphi_5 - \varphi_4) + \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\cos \varphi_4 + \cos \varphi_5}{2} \right\} = \frac{2\varphi_4}{7}.$$

Le tre equazioni (11), (12), (13) determinano il numero N più adatto a soddisfare anche a quest'ultima condizione, e, fissato N , a dare i valori definitivi delle latitudini φ_4 , φ_5 e quelli approssimati delle latitudini φ_1 , φ_2 , φ_3 ; infine le equazioni

$$(14) \quad \begin{cases} 2m_3 = N(\sin \varphi_4 - \sin \varphi_3) & , & 2m_2 = N(\sin \varphi_3 - \sin \varphi_2) , \\ 2m_1 = N(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) & , & m_0 = N \sin \varphi_1 , \end{cases}$$

permettono la scelta dei numeri interi m_0, m_1, m_2, m_3 a mezzo dei detti valori approssimati delle latitudini e di poi il calcolo definitivo delle latitudini stesse. Nella predetta scelta dei numeri interi m , si deve naturalmente badare a che sia

$$m_0 + 2m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2 = N.$$

È da notare che le quattro equazioni (14) nelle sole tre incognite $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ consentono anche un buon controllo dei calcoli.

L'equazione (13) non può essere soddisfatta con tutto rigore, perchè essa e le due che la precedono devono dare per N un numero intero. D'altra parte tale equazione non rappresenta una condizione necessaria, ma soltanto una opportunità, sicchè nella scelta definitiva del numero N e degli addendi m_g che lo compongono rimane sempre una notevole arbitrarietà.

Il numero N può essere diminuito o aumentato alquanto rispetto al valore opportuno dello schema precedente suddividendo la sfera, anzichè in nove, in otto o in dieci zone, oltre alle due calotte, e quindi ponendo l'equatore fra i cerchi separatori di due zone contigue, nel qual caso N dovrà essere un numero pari. Va da sè che N potrà essere ulteriormente diminuito o, ad arbitrio, aumentato, variando maggiormente il numero delle zone. La (10) rimane sempre l'equazione fondamentale per la soluzione della questione e quanto qui è stato detto a titolo di esempio è certo sufficiente per gli accorgimenti che dovrà adottare il calcolatore in qualsiasi altro caso.

4. Indichiamo con φ_r, λ_r ($r = 1, 2, \dots, N$) le coordinate dei punti centrali delle singole particelle di area σ nelle quali si è divisa la superficie sferica di raggio 1. Per le due calotte sarà $\varphi_r = 90^\circ$ e λ_r risulterà indeterminato; per le m parti di una stessa zona porremo φ_r eguale alla media delle due latitudini φ_r, φ_{r+1} che limitano la zona e a λ_r daremo m valori uniformemente distribuiti sulla circonferenza.

Come s'è detto, le N equazioni da risolvere con il metodo dei minimi quadrati, rispetto a quelle fra le incognite $a'_{n,i}, a''_{n,i}$ che vanno prese in considerazione, sono del tipo

$$(15) \quad \sum_{n,i} F_{n,i} (\text{sen } \varphi_r) \cos i \lambda_r a'_{n,i} + F_{n,i} (\text{sen } \varphi_r) \text{sen } i \lambda_r a''_{n,i} = l_r + v_r,$$

la sommatoria intendendosi limitata alle sole coppie di valori n, i dei termini dello sviluppo (9) ritenuti utili.

La forma generale dei coefficienti di un'incognita $a'_{n,i}, a''_{n,i}$ nelle equazioni normali è la seguente

$$(16) \quad A_{n,m,i,j,q} = \sum_r^N F_{n,i} (\text{sen } \varphi_r) F_{m,j} (\text{sen } \varphi_r) M_r^{(q)}$$

dove, omettendo per comodità l'indice r , è

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} M^{(1)} = \cos i \lambda \cos j \lambda = \frac{1}{2} [\cos (i+j) \lambda + \cos (i-j) \lambda] \\ M^{(2)} = \text{sen } i \lambda \text{sen } j \lambda = \frac{1}{2} [\cos (i-j) \lambda - \cos (i+j) \lambda] \\ M^{(3)} = \text{sen } i \lambda \cos j \lambda = \frac{1}{2} [\text{sen } (i+j) \lambda + \text{sen } (i-j) \lambda] \\ M^{(4)} = \cos i \lambda \text{sen } j \lambda = \frac{1}{2} [\text{sen } (i+j) \lambda - \text{sen } (i-j) \lambda]. \end{array} \right.$$

L'uguaglianza (16) continua a sussistere se si moltiplica il suo secondo membro per σ e il suo primo membro per l'equivalente quantità $4\pi/N$. Se poi s'immagina di far tendere σ a zero ed N all'infinito, il secondo membro della (16) moltiplicata per σ diviene l'integrale

$$(18) \quad I_{n,m,i,j,q} = J_{n,m,i,j} \cdot H_{i,j,q}, \quad \text{con} \quad H_{i,j,q} = \int_0^{2\pi} M^{(q)} d\lambda,$$

$$J_{n,m,i,j} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} F_{n,i} (\text{sen } \varphi) F_{m,j} (\text{sen } \varphi) \cos \varphi d\varphi = \int_{-1}^{+1} F_{n,i} (\mu) F_{m,j} (\mu) d\mu.$$

Per N abbastanza grande deve dunque valere in via approssimata l'eguaglianza

$$(19) \quad A_{n,m,i,j,q} = \frac{N}{4\pi} I_{n,m,i,j,q}.$$

Le forme (17) della funzione integranda $M^{(q)}$ dimostrano: α) che l'integrale H , e quindi anche l'integrale I , sono nulli quando i è diverso da j ; β) che essi sono ancora nulli quando $i=j > 0$ e $q=3$ oppure $q=4$; γ) che quando $i=j > 0$ e $q=1$ oppure $q=2$, risulta $H_{i,j,1} = H_{i,j,2} = \pi$; δ) che quando $i=j=0$ ed M può avere il solo valore 1, risulta $H_{0,0} = 2\pi$.

La teoria delle funzioni sferiche ⁽¹⁾ dimostra che, per $i=j$: *a*) l'integrale J è nullo quando n è diverso da m ; *b*) che per $m=n$, $i=j>0$ risulta $J_{n \cdot n \cdot i \cdot i} = 4/(2n+1)$; *c*) che per $n=m$, $i=j=0$ risulta $J_{n \cdot n \cdot 0 \cdot 0} = 2/(2n+1)$.

Se ne conclude che, se l'eguaglianza (19) valesse rigorosamente, i coefficienti $A_{n \cdot m \cdot i \cdot j \cdot g}$ delle incognite delle equazioni normali esterni alla diagonale principale sarebbero tutti nulli, mentre quelli della diagonale principale sarebbero dati tutti dall'unica espressione

$$A_{n \cdot n \cdot i \cdot i \cdot 1} = A_{n \cdot n \cdot i \cdot i \cdot 2} = A_{n \cdot n \cdot 0 \cdot 0} = \frac{N}{2n+1}.$$

Anche l'uniformità di questo risultato si deve alla introduzione del coefficiente $\sqrt{p_{n \cdot i}}$ nelle funzioni $F_{n \cdot i}$.

Data l'uniforme ripartizione sulla circonferenza delle longitudini λ_r per ciascuna zona e il fattore $\cos^i \varphi$ che per $i>0$ si annulla ai vertici delle due calotte, è facile riconoscere dalla (16) e dalle (17) che i coefficienti A sono effettivamente e rigorosamente nulli nel caso β) e che potrebbero non esserlo nel caso α) se per una certa zona, avente m particelle σ , fosse $i-j=m$, o $i+j=m$. Ma queste due eccezioni si possono escludere, rendendo eventualmente m superiore a 7 anche per le due zone contigue alle calotte polari; si dovrebbe rinunciare soltanto alla omogeneità delle due dimensioni delle singole particelle σ , il che non ha particolare importanza.

I coefficienti A sono ancora rigorosamente nulli nel caso α) se la loro espressione algebrica contiene soltanto potenze dispari di $\sin \varphi$ per effetto della simmetria rispetto all'equatore della suddivisione della superficie sferica.

Possiamo tuttavia raggiungere o avvicinarci maggiormente al risultato che si avrebbe se le (19) fossero rigorosamente soddisfatte, applicando ai valori $\varphi_r = (\varphi_r + \varphi_{r+1})/2$, scelti quali latitudini dei punti centrali delle particelle σ delle varie zone, opportune correzioni $\Delta\varphi_r$. Nell'esempio indicato, escludendo le latitudini dei punti centrali delle calotte ($\varphi = \pm 90^\circ$) e della zona equatoriale ($\varphi = 0$), si avranno quattro correzioni $\Delta\varphi_r$ con cui si potranno rendere quattro dei coefficienti A eguali ai loro valori teorici I quando non lo siano già *a priori*.

È evidente che quest'ultimo accorgimento va precisato caso per caso. Si può ad ogni modo affermare che sarà sempre facile raggiungere lo scopo di rendere eguali al loro valore teorico nullo i soli coefficienti A esterni alla diagonale principale delle equazioni normali.

(1) F. TISSERAND, *Mécanique céleste*. Tome II, Paris 1891 (vedi form. (R) di p. 267, form. (S) di p. 267, form. (L) di p. 258).

Chimica delle muffe. — *I pigmenti del «Deuterophoma tracheiphila»* (*). Nota di ADOLFO QUILICO, CESARE CARDANI, FRANCO PIOZZI e PIETRO SCRIVANI, presentata(**) dal Corrisp. A. QUILICO.

Il *Deuterophoma tracheiphila* Petri (= *Bakerophoma tracheiphila* Ciferri) presenta un particolare interesse per il patologo vegetale e per il chimico come agente specifico della malattia degli agrumi denominata *mal secco*, che da un ipotetico centro di origine nell'Asia anteriore è andata man mano diffondendosi nel Mediterraneo centrale, ed ha arrecato e arreca tutt'ora gravi danni alle culture agrumarie dell'Italia insulare e peninsulare.

Questa muffa sembra esistere in tre razze che sono state rispettivamente denominate ⁽¹⁾ DRP o *cromogena* ⁽²⁾, DP o *non cromogena* e R o *rosso-albina* perchè, tra i caratteri distintivi più evidenti delle culture delle varie razze su terreni solidi o liquidi, vi è la presenza nella DRP e nella R di un pigmento miceliare rosso scuro, talvolta segregato in minuti cristallini ben visibili al microscopio, che manca nella DP che ha invece un micelio bruno grigio. Di queste, le razze DRP e DP sono state isolate da piante infette e sono quindi da ritenere sicuramente patogene, mentre nulla si sa sulla razza R ottenuta solo in cultura.

Poichè per malattie simili di altri vegetali superiori provocate da funghi (tracheomicosi) e caratterizzate come il *mal secco* da un avvizzimento o marasma delle foglie e di altre parti verdi della pianta ⁽³⁾ si è invocata una *teoria tossinica* secondo la quale i fenomeni osservati sarebbero da attribuire alla produzione — da parte del parassita fungino — di sostanze tossiche per il vegetale, teoria che ha al suo attivo l'isolamento allo stato di maggiore o minore purezza in alcuni casi dalle culture *in vitro* del parassita di sostanze capaci di provocare l'avvizzimento dell'ospitante ⁽⁴⁾, ci è parso degno d'interesse lo studio sistematico dei prodotti del metabolismo del *Deutero-*

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) Per notizie più approfondite sulle razze di *Deuterophoma tracheiphila* e sui loro caratteri distintivi, rimandiamo al lavoro di E. BALDACCINI in «Notiz. Malat. Piante», 9, 27 (1950). Ci è grato in questa occasione di ringraziare il prof. Baldacci per il suo interessamento e per i consigli di cui ci è stato largo nel corso di questa ricerca.

(2) Vedi ad esempio la grafiosi dell'olmo provocata dalla *Ceratostomella ulmi* (Schwartz, Buisman) e le tracheomicosi del pomodoro e di molti altri vegetali prodotte da fusari e verticilli.

(3) Vedi ad esempio: le ricerche di P. A. PLATTNER e N. CLAUSON-KAAS, «Helv. Chim. Acta», 28, 188 (1945) sulla *licomarasmina* da essi isolata dalle culture di *Fusarium lycopersici* Sacc., responsabile dell'avvizzimento delle piante di pomodoro; quelle di G. A. ZENTMYER, «Science», 95, 512 (1942) e di DIMOND, PLUMB, STODDARD e HASPELL, «Bull. Conn. Agr. Exp. Station», 1949, 531 sulla grafiosi dell'olmo ove venne isolato un *polisaccaride* attivo nel produrre l'appassimento; infine quelle recentissime di G. S. POUND e M. A. STAHAMANN, «Phytopath.», 41, 1104 (1951), che hanno identificato nell'acido *alternarico* la tossina dell'*Alternaria solani*.

(4) Vennero impiegati in queste esperienze due ceppi di R e DP forniti dal Laboratorio Ricerche e Controlli Antiparassitari di Signa della Soc. Montecatini, presso il quale venne preparato la maggior parte del materiale biologico esaminato nel presente lavoro.

phoma tracheiphila presenti nel micelio e nel terreno di cultura, allo scopo di stabilire se tra essi non ve ne fosse qualcuno attivo nel senso considerato.

Il primo problema da risolvere era di trovare le condizioni più adatte alla preparazione del materiale di studio, miceli e liquidi culturali. Dopo prove preliminari condotte per le due razze R e DP ⁽⁵⁾ su terreni liquidi a base di brodo di patate glucosato e in liquidi culturali artificiali di differente composizione, sono stati adottati questi ultimi i quali, pur richiedendo un tempo maggiore per il completo sviluppo del micelio ⁽⁶⁾, avrebbero reso più semplice l'isolamento dei prodotti elaborati dalla muffa.

Il terreno definitivamente adottato (Czapek-Dox modificato) ⁽⁷⁾ ha inizialmente un pH di 5,2 che sale gradualmente fino a circa 8 alla fine del periodo di cultura ⁽⁸⁾. Su questo terreno lo sviluppo della muffa è piuttosto lento, ma si ottengono miceli regolari e, per la razza R, uniformemente pigmentati.

Usando le consuete bevute di Jena o meglio ancora fiasche di Roux contenenti 2 cm. di spessore di substrato, le *rese* in micelio secco si aggirano per le due razze sui 1,0–1,5 g. per dcm³ di cultura di 50 giorni.

Nel presente lavoro riferiremo sui risultati conseguiti nello studio dei miceli, riservandoci di comunicare in seguito quanto è emerso dall'esame dei liquidi di cultura.

I miceli delle due razze R e DP, separati dal liquido e lavati abbondantemente con acqua tiepida, vennero seccati in istufa a 70°–80°, polverizzati, e sottoposti a successive estrazioni in Soxhlet con i seguenti solventi:

1° etere di petrolio p. e. 45°–70°;

2° etere etilico;

3° alcool etilico al 95 %.

I singoli estratti furono esaminati separatamente, come è descritto nella parte sperimentale.

Razza R (rosso-albina). – Contiene in quantità notevoli (il 16 % sul peso del micelio secco) due pigmenti estraibili che differiscono per colore, solubilità nei solventi organici, e punto di fusione.

Il più solubile di essi (che si ritrova nell'estratto con etere di petrolio e nelle prime frazioni dell'estrazione con etere etilico), purificato attraverso il suo acetilderivato, forma aghetti di un bel rosso cinabro che fondono a 223°–225° sublimando parzialmente.

Si discioglie negli alcali caustici con colorazione violetta, e in H₂SO₄ conc. con colore rosso violaceo. La soluzione in NaOH diluita, trattata con miscela

(5) Le denominazioni « cromogena » e « non cromogena » risalgono alle ricerche originali di Petri, e si riferiscono unicamente alla presenza o meno del pigmento rosso. In realtà la razza DP o non cromogena, pur non contenendo il pigmento rosso, è colorata in bruno nero.

(6) Una cinquantina di giorni a 20° invece dei 30 sufficienti con brodo di patate al 2 % di glucosio.

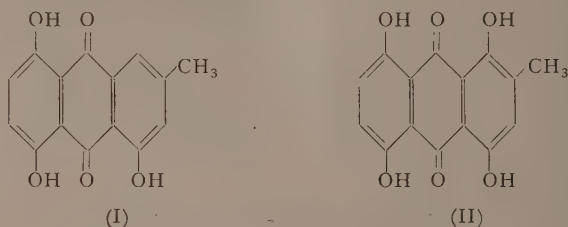
(7) Il terreno definitivamente adottato aveva la composizione: glucosio cristallizzato g. 50 NaNO₃ g. 2,0 K₂HPO₄ g. 1,0 KCl g. 0,5 MgSO₄·7H₂O g. 0,5 FeSO₄·5H₂O g. 0,01 per 1000 cm³ di soluzione.

(8) La sostituzione del NaNO₃ con la quantità equivalente (in azoto) di NH₄NO₃ allo scopo di prevenire l'alcalinizzazione finale del substrato, non ha dato buon risultato.

magnesiaca, dà una lacca di un bel colore azzurro violaceo. Il pigmento viene prontamente adsorbito dall'allumina con formazione di una lacca rosso-violetta, che rimane tale per trattamento con alcool.

All'analisi ha dato valori in ottimo accordo con quelli richiesti da una formula $C_{15}H_{10}O_5$; per acetilazione con anidride acetica fornisce un *triacetato* $C_{15}H_7O_8(OOCCH_3)_3$ che cristallizza dall'alcool in aghi gialli p. f. 223^0-224^0 con dec.

Questi dati permettono di identificarlo col *4.5.8-trioossi, 2-metilantrachinone* (I) già descritto nella letteratura ⁽⁹⁾, e ritrovato da Raistrick, Robinson e Todd che lo denominarono *elmintosporina*, nei miceli dell'*Helminthosporium cynodontis* Marignoni ⁽¹⁰⁾, dell'*H. tritici-vulgaris* Nisikado ⁽¹¹⁾ e dell'*H. gramineum* Rabenhorst ⁽¹²⁾:



Abbiamo confermato la struttura (I) del pigmento p. f. 223^0-225^0 trasformandolo per ossidazione nell'*1.4.5.8-tetraossi, 2-metilantrachinone* (II) (vedi avanti).

Il pigmento meno solubile, contenuto principalmente nelle ultime frazioni dell'estrazione eterea, si ottiene dopo ripetute cristallizzazioni da diossano, in cristallini rosso-bronzeo che fondono a 257^0-258^0 e rispondono alla formula $C_{15}H_{10}O_6$, contenente un ossigeno in più della precedente. Esso fornisce con anidride acetica un *tetraacetato* $C_{15}H_6O_9(OOCCH_3)_4$ che cristallizza dall'alcool in aghi giallo cadmio p. f. 222^0-224^0 con dec.

Il pigmento si discioglie negli alcali acquosi con intensa colorazione azzurra che passa al violetto per diluizione, e dà con H_2SO_4 conc. soluzioni bleu-violacee. Le lacche di Al e di Mg sono rispettivamente rosso-violetta e azzurro-verdastra; la prima vira all'azzurro per trattamento con alcool.

La sostanza è risultata identica all'*1.4.5.8-tetraossi, 2-metilantrachinone* (II) o *cinodontina*, che accompagna l'*elmintosporina* nell'*Helminthosporium cynodontis* Mar. già citato, e venne altresì trovato da Raistrick e collaboratori ⁽¹²⁾ nell'*H. euschlaenae* Zimmermann e nell'*H. avenae* Eidam ⁽¹³⁾.

(9) G. D. GRAVES e R. ADAMS, « Journ. Am. Chem. Soc. », 45, 2439 (1923).

(10) H. RAISTRICK, R. ROBINSON e A. R. TODD, « Bioch. Journ. », 27, 1170 (1933).

(11) H. RAISTRICK, R. ROBINSON e A. R. TODD, « Bioch. Journ. », 28, 559 (1934).

(12) T. H. V. CHARLES, H. RAISTRICK, R. ROBINSON e A. R. TODD, « Bioch. Journ. », 27, 499 (1933).

(13) Sui polioossiantrachinoni delle muffe vedi anche il Brev. Ingl. 420.362 e quello francese 770.972 di H. RAISTRICK, R. ROBINSON e T. H. V. CHARLES; C. 1935, II, 1450.

L'identità del pigmento coll'I. 4.5.8-tetraossi, 2-metilantrachinone (II) è stata altresì confermata dal confronto con un campione autentico preparato per sintesi secondo una nuova via ⁽¹⁴⁾.

Il ritrovamento di questi pigmenti in una muffa appartenente ad un genere assai differente da quello *Helmintosporium* in cui erano stati precedentemente trovati, è un'ulteriore conferma della grande diffusione in natura dei pigmenti ossiantrachinonici.

Dall'estratto in etere di petrolio sono stati altresì ricavati quantità notevoli (il 15,7 % sul peso del micelio secco) di sostanze grasse semisolide, distillabili senza decomposizione nel vuoto, che non abbiamo ulteriormente esaminate.

Finalmente nei prodotti di aspetto resinoso che si ottengono dal micelio per prolungata estrazione con alcool, si è potuto dimostrare per via cromatografica la presenza di *d-mannite* che, come è noto, è un prodotto assai frequente del metabolismo di funghi superiori, licheni, muffe e batteri.

Razza DP (non cromogena). — Le prove di estrazione coi solventi sopra indicati, hanno dimostrato l'assenza completa dei pigmenti antrachinonici abbondantemente presenti nella R e di pigmenti solubili in genere. La sostanza nerastra che colora in scuro i miceli non si discioglie negli alcali diluiti.

L'etere di petrolio estrae sensibili quantità di *grassi* prevalentemente liquidi e tracce di una sostanza di odore pungente, fortemente acida e assai solubile in acqua.

L'estratto alcoolico lascia all'evaporazione forti quantità di *d-mannite* (oltre il 20 % del peso del micelio secco), identificata all'analisi, alle caratteristiche fisiche, e alla formazione dell'*esaacetato*, p. f. 124°-125°. In questa frazione è altresì contenuta una piccola quantità di un prodotto cristallino p. f. 156°-157°, che dalla composizione e dalle reazioni cromatiche caratteristiche sembra essere uno sterolo.

Sui risultati ottenuti nelle prove biologiche sulle sostanze finora isolate verrà riferito quanto prima.

PARTE SPERIMENTALE.

A) « *Deuterophoma tracheiphila* » Petri, *razza R (rosso-albina)*. — Il micelio secco si presenta sotto forma di foglioline lisce di colore rosso bruno sulla pagina superiore, rosso chiaro su quella che era a contatto col liquido di cultura. Esala un odore caratteristico sgradevole. Grammi 82 di micelio macinato non troppo finemente vennero sottoposti in una sola volta ad estrazione in Soxhlet.

1° Estrazione con etere di petrolio p. e. 45°-70°. — Durata 8 ore. Dallo estratto di colore rosso-fucsina lasciato a sè a temperatura ambiente si separano g. 1,4 di pigmenti colorati in rosso vivo. La soluzione filtrata dai pigmenti viene lavata 4 o 5 volte con acqua. Dal liquido acquoso, per estrazione con etere etilico, si è isolata una piccolissima quantità (qualche mgr.)

(14) Vedi C. CARDANI e F. PIOZZI, questi « Rendiconti ».

di un prodotto oleoso di odore pungente assai solubile in acqua con reazione fortemente acida (pH circa 4).

Dalla soluzione in etere di petrolio lavata, si distilla via il solvente eliminandone le ultime tracce a b. m. nel vuoto. Rimangono 6,0 g. di sostanza di aspetto grasso e di consistenza simile alla vaselina. Distillata nel vuoto fornisce due frazioni p. e. 215°-225° e 250°-300° sotto 5 mm. di Hg. Entrambe si riprendono per raffreddamento in una massa parzialmente cristallina, che sembra essere costituita da acidi grassi, cere e forse anche sterine.

2° *Estrazione con etere etilico.* - Il micelio proveniente dalla precedente estrazione viene sottoposto ad estrazione con etere etilico fino a che questo passa solo assai debolmente colorato in rosso bordeaux, ciò che ha richiesto 130 ore.

Dal liquido etereo nel corso dell'estrazione cristallizzano abbondantemente i pigmenti, che debbono essere di tanto in tanto separati. Si sono così ottenuti g. 10,5 di pigmenti grezzi bruno marrone. Le acque madri etersee svaporate hanno lasciato un residuo (g. 8,3) costituito da una miscela di pigmenti e di prodotti oleosi. Posta su un piatto poroso, ha fornito ancora g. 1,4 di pigmenti che vengono uniti ai precedenti.

3° *Estrazione con alcool etilico.* - Il micelio viene ora estratto con alcool al 95 %. All'inizio l'alcool passa alquanto colorato in rosso violaceo per tracce di pigmenti ancora presenti. Durata dell'estrazione 114 ore. Dal liquido alcoolico si separa una notevole quantità di prodotti solidi scuri misti a resine. La soluzione ottenuta riprendendo con acqua e carbone decolorante, filtrata ed evaporata, dà uno sciroppo che non cristallizza, nel quale si è potuta accertare per via cromatografica la presenza di *d-mannite* ⁽¹⁵⁾.

Complessivamente, i miceli della razza R esaminati hanno fornito:

Pigmenti	16,2 %
Grassi, ecc.	15,7 %
d-Mannite	piccole quantità ⁽¹⁶⁾ .

(15) Per dimostrare la presenza della *D-mannite*, si è ricorsi in questo caso alla *cromatografia su carta* secondo L. HOUGH, « Nature », 165, 400 (1950), usando come eluente una miscela di 4,0 parti in volume di butanolo, 1,1 di etanolo e 1,9 di acqua, e come sviluppatore una soluzione ammoniacale di AgNO₃. La cromatografia durò 13 ore a 18°-20°. La striscia di carta (Whatman N. 1) esaminata alla luce di Wood mostrò due macchie fluorescenti viola a Rf 0,06 e 0,13, una intensamente fluorescente in verde-giallastro a Rf 0,29 ed una fluorescente giallo-rossa a Rf 0,98, quest'ultima corrispondente ad una miscela di *cinodontina* e di *elmintosporina* che non sono separabili per cromatografia. Spruzzata con AgNO₃ ammoniacale e asciugata in istufa a 80° per 5', ha mostrato due macchie brune a Rf 0,21 e 0,29. La prima è d-mannite; lo stesso valore dell'Rf si è avuto in una cromatografia condotta in parallelo su mannite pura, in ottimo accordo con quello di 0,22 dato da Hough.

(16) Non si può escludere che una parte della mannite originariamente presente non si sia alterata nel prolungato trattamento di estrazione, ma nell'esame di un'altra partita di micelio della stessa razza si riuscì ad isolare solo una quantità di mannite corrispondente all'1 % del peso del materiale secco.

SEPARAZIONE E RICONOSCIMENTO DEI PIGMENTI. – Constatato che i pigmenti (g. 6,6 circa) separati durante le prime ore di estrazione con etere etilico sono assai simili a quelli provenienti dall'etere di petrolio (g. 1,4), si sono riunite tali frazioni, trattando a parte quelle meno abbondanti ottenute nelle ore successive.

Le prime hanno colore rosso vivo e contengono la maggior parte dell'*elmintosporina*, mentre le ultime tendono al marrone e sono quasi esclusivamente costituite da *cinodontina*.

a) *Frazioni rosse*. – Sono solubilissime in diossano, facilmente in benzolo e piridina, poco in ligroina p. e. 90°–100° a freddo. Ricristallizzate ripetutamente da quest'ultimo solvente danno un prodotto che fonde a 208°–210°. Si giunge facilmente al prodotto puro attraverso il *triacetilderivato*, che si forma prontamente aggiungendo una traccia di H_2SO_4 conc. alla sospensione del pigmento in anidride acetica. Il prodotto passa immediatamente in soluzione con colorazione gialla, e versando in acqua fredda precipita l'acetilderivato. Ricristallizzato dall'alcool forma aghi gialli p. f. 223°–224° con dec. ⁽¹⁷⁾.

Microanalisi ⁽¹⁸⁾:

trovato %:	C 62,98	H 4,43
per $C_{21}H_{16}O_8$, calcolato:	63,64	4,07

L'acetilderivato, bollito per 1/4 d'ora con NaOH 2 N si saponifica passando in soluzione. Dalla soluzione violetta, trattata con poco carbone decolorante e filtrata, precipita per acidificazione il pigmento come polvere rossa. Ricristallizzato da ligroina p. e. 90°–100° si ottiene in minuti cristalli rossi che fondono a 223°–225° sublimando parzialmente ⁽¹⁹⁾.

Semimicro ⁽²⁰⁾:

trovato %:	C 66,45	H 4,01
per $C_{15}H_{10}O_5$, calcolato:	66,67	3,73

Il pigmento si scioglie in NaOH diluita con colorazione violetta e in H_2SO_4 conc. con colore rosso-violaceo. In soluzione di etere di petrolio (p. e. 50°–60°) viene integralmente fissato dall'allumina dando una lacca rosso violetta. Il cromatogramma su carta (carta Whatmann N. 1, eluente etere di petrolio p. e. 45°–70° saturato a 24° con metanolo al 97 %) mostra una mac-

(17) H. RAISTRICK, R. ROBINSON e A. R. TODD, « Journ. Chem. Soc. », 1933, 488, danno un p. f. di 225° per il prodotto sintetico.

(18) Le microanalisi contenute nel presente lavoro sono state eseguite dal Centro di Microanalisi Organica del C.N.R. annesso all'Istituto Ricerche G. Donegani di Novara della Soc. Montecatini.

(19) Per l'*elmintosporina* sintetica sono dati nella letteratura i p. di f. 227° (GROVES e ADAMS, loco citato) e 226°–227° (RAISTRICK, ROBINSON e TODD, loco citato).

(20) Eseguita dal dr. F. Canal del Laboratorio Ricerche della Società Farmitalia di Milano che qui ringraziamo.

chia a Rf 1,0 e non rivela la presenza di altre sostanze nemmeno se esaminato a luce Wood, che eccita una fluorescenza rossa nel pigmento ⁽²¹⁾.

Le caratteristiche osservate corrispondono perfettamente a quelle dell'*elmintosporina*. Ad ulteriore conferma, abbiamo trasformato per ossidazione il pigmento nell'*1·4·5·8-tetraossi, 2-metilantrachinone* o *cinodontina*.

Un campione del pigmento naturale accuratamente purificato, sciolto in H₂SO₄ conc., venne ossidato con MnO₂ precipitato a 50°-60° per 6 ore. Dal prodotto di reazione si è isolato per successive cristallizzazioni da diossano; una frazione di colore marrone-rossiccio p. f. 233°-236°; da questa per acetilazione si è ottenuto un *tetraacetilderivato* che cristallizza dall'alcool in aghi gialli che fondono a 222°-224° anche in miscela coll'acetilderivato della *cinodontina* (vedi avanti), mentre mostra sensibile depressione alla prova di fusione in miscela col triacetato dell'*elmintosporina* sopra descritto.

b) *Frazioni rosso-marrone*. - Sono costituite prevalentemente da *cinodontina*, che si può facilmente ottenere allo stato puro per ricristallizzazione da diossano. Si ottiene così in minuti cristalli rosso-bronzo p. f. 257°-258° ⁽²²⁾.

Semimicro (Canal):

	trovato %:	C 63,07	H 3,76
per C ₁₅ H ₁₀ O ₆ , calcolato:		62,94	3,52

Il *tetraacetilderivato*, preparato in maniera analoga al precedente, cristallizza dall'alcool in aghi giallo-cadmio p. f. 222°-224° con dec. ⁽²³⁾.

Microanalisi:

	trovato %:	C 60,72	60,74	H 4,29	4,38
per C ₂₃ H ₁₈ O ₁₀ , calcolato:		60,80		3,99	

Scaldato con NaOH si colora in azzurro e passa completamente in soluzione per breve ebollizione. Il pigmento è solubile in H₂SO₄ conc. con colorazione violetta. Si fissa su allumina dando una lacca rosso-violacea che passa all'azzurro per trattamento con alcool. Il cromatogramma su carta mostra un Rf 1,0 e non rivela la presenza di altre sostanze anche esaminato a luce di Wood, che provoca nel pigmento una fluorescenza violetta scura.

L'identità del pigmento coll'*1·4·5·8-tetraossi, 2-metilantrachinone*, oltre che dalle caratteristiche sopra indicate, è stata confermata dal confronto col prodotto sintetico.

B) «*Deuterophoma tracheiphila*» Petri, razza DP (non cromogena). - Il micelio secco si presenta sotto forma di foglie di color grigio-nerastro sulla

(21) L'alto valore trovato dell'Rf si accorda bene, secondo le osservazioni di S. SHIBATO, M. TAKITO e O. TANAKA, « Journ. Am. Chem. Soc. », 72, 2789 (1950), con la struttura di *4·5·8-triossi, 2-metilantrachinone* del pigmento, contenente cioè gli -OH in α e il -CH₃ in β .

(22) Nella letteratura sono dati i p. f. 260° per la *cinodontina* naturale (RAISTRICK, ROBINSON e TODD, loco citato) e 260°-261° per quella sintetica purificata attraverso il tetraacetato: W. K. A. ANSLOW e H. RAISTRICK, « Bioch. Journ. », 34, 1546 (1940).

(23) 224°-226° secondo ANSLOW e RAISTRICK, loc. cit.

pagina emersa, bianco su quella che era a contatto col liquido di cultura. Presenta come la razza R un odore sgradevole caratteristico.

Vennero sottoposti ad estrazione nel modo già descritto g. 42,5 di micelio secco.

1° *Estrazione con etere di petrolio p. e. 45°–70°*. – Durata 6 ore. L'estratto è praticamente incolore, contiene grassi prevalentemente liquidi e tracce di una sostanza di odore pungente solubile in acqua con reazione acida.

2° *Estrazione con etere etilico*. – Durata 10 ore. L'estratto rimane assolutamente incolore. Distillando l'etere rimangono piccole quantità di sostanze grasse liquide.

3° *Estrazione con alcool*. – L'estratto alcoolico è praticamente incolore e per raffreddamento lascia separare una sostanza bianca cristallina mista a un po' di prodotti peciosi. Per evaporazione della soluzione alcoolica se ne ottiene una seconda porzione che lavata con etere pesa g. 9,5. Il prodotto è solubilissimo in acqua, e ricristallizzato ripetutamente dall'alcool fonde a 164°.

Microanalisi:

trovato %:	C 39,28	39,57	H 7,66	7,73
per $C_6H_{14}O_6$, calcolato:	39,55		7,75	

La determinazione del *potere rotatorio* in soluzione acquosa in presenza di borace (g. 0,0389 in 2 cm³ di H₂O + g. 0,4 di borace fuso) ha dato $[\alpha]_{20}^{20} = +28^{\circ}20$, valore in ottimo accordo con quello della *d-mannite* che nelle stesse condizioni ha dato $[\alpha]_{20}^{20} = +28^{\circ}00$.

L'*esaacetilderivato*, preparato per riscaldamento del prodotto con anidride acetica in presenza di ZnCl₂⁽²⁴⁾, ricristallizzato da ligroina p. e. 75°–80° forma prismi obliqui p. f. 124°–125°.

Microanalisi:

trovato %:	C 49,01	H 6,13
per $C_{18}H_{26}H_{12}$, calcolato:	49,77	6,03

Anche i punti di fusione in miscela del prodotto da noi isolato e del suo acetilderivato, con campioni di sicura provenienza, confermano che si tratta di *d-mannite*.

L'etere di lavaggio della mannite grezza lascia per evaporazione una sostanza cristallina leggermente colorata, che ricristallizzata da alcool si presenta in scagliette incolore p. f. 156° 157° che mostrano alla luce di Wood fluorescenza viola chiaro. La sostanza non è azotata. Sono risultate positive le reazioni delle sterine di Salkowski e di Liebermann-Bouchard, negativa quella di Tortelli-Jaffe.

Microanalisi:

trovato %:	C 79,58	79,73	H 10,94	10,83.
------------	---------	-------	---------	--------

(24) Secondo E. PACSU e F. V. RICH, « Journ. Am. Chem. Soc. », 55, 3021 (1933).

Geologia. — *Movimenti orogenici quaternari nella Pianura Padana.* Nota (*) del Corrisp. ARDITO DESIO.

In occasione di una riunione scientifica organizzata dall'Istituto di Geofisica del Politecnico di Milano nel mese di febbraio 1947 avevo presentato una breve relazione, rimasta inedita, tendente ad organizzare delle ricerche in collaborazione fra geologi, geofisici e geodeti su di un problema di interesse comune. L'argomento della mia Nota era il seguente.

Il Colle di S. Colombano al Lambro, alto m. 144 s. l. m. e 70-80 m. sul livello della pianura circostante, è composto, com'è noto ⁽¹⁾ da un nucleo miocenico rivestito da sedimenti marini del Pliocene (Piacenziano), ricoperti trasgressivamente da depositi del Calabriano. Sui livelli sabbiosi più alti del Calabriano giace un deposito, potente parecchi metri, di sabbie rossastre con lenti di ghiaia, profondamente ferrettizzato. Le ghiaie sono composte in prevalenza da quarzo, gneiss, porfidi quarziferi, micascisti, calcari per lo più molto decomposti, comunque da rocce di tipo alpino.

Si tratta, dunque, di un deposito alluvionale riferibile con ogni probabilità al Mindeliano.

Un deposito analogo è stato da me segnalato nel 1937 ⁽²⁾, circa una decina di chilometri a levante del precedente e pure isolato nella pianura, presso Casalpusterlengo. Quest'ultimo è sopraelevato di soli 6-7 m. sul piano circostante.

Se il lembo di Casalpusterlengo può forse essere interpretato come un resto dell'antica pianura diluviale rimasta salvo dall'azione erosiva dei corsi d'acqua dell'epoca successiva, certamente non altrettanto si può dire del lembo di S. Colombano. Questo è troppo elevato per dare adito alla supposizione che un tempo tutta la pianura si trovasse a quella quota e che successivamente sia stata abbassata, per effetto dell'erosione, sino al livello attuale. D'altra parte che i due lembi facessero parte della coltre diluviale antica della pianura pare indubbio poichè hanno caratteri analoghi; ed allora si arriva alla conclusione che il lembo di S. Colombano deve essere stato portato alla quota attuale da un sollevamento, evidentemente posteriore alla sua deposizione e quindi posteriore al Mindeliano.

Ci si chiede ora quale genere di sollevamento può avere innalzato di ben più di 70-80 m. il lembo diluviale di S. Colombano se lateralmente i terreni coevi sono sepolti molti metri sotto il livello attuale della pianura.

(*) Presentata nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) L. COGGI e E. DI NAPOLI ALLIATA, *Pliocene e Pleistocene nel Colle di S. Colombano al Lambro (Lombardia)*. « International Geological Congress », XVII Session, Great Britain 1948, part IX, London 1950.

(2) A. DESIO, *Su alcuni resti della antica pianura diluviale nel basso Lodigiano*. « Rend. R. Ist. Lombardo Sc. Lett. », vol. LXX, fasc. III, pp. 355-357, Milano 1937.

Se non si conoscesse l'esistenza di una struttura anticlinale (dissimetrica) come ossatura del colle di S. Colombano ⁽³⁾ e se non si sapesse che un'altra anticlinale sepolta ha la sua culminazione presso Casalpusterlengo altre spiegazioni si potrebbero trovare, ma queste coincidenze non mi paiono casuali.

Se diamo uno sguardo alla carta strutturale relativa al Miocene della frazione centrale della Pianura Padana, pubblicata da Jaboli nel 1951 ⁽⁴⁾, notiamo subito che le due anticlinali di S. Colombano e di Casalpusterlengo sono di gran lunga le più elevate di tutta la regione circostante. Del resto anche l'orientazione della collina di S. Colombano e dei lembi diluviali di Casalpusterlengo, corrisponde all'orientazione degli assi di dette anticlinali.

E com'è dunque che depositi alluvionali del Mindeliano (in ogni caso postcalabrian) sono stati portati in alto in corrispondenza dei dorsì delle due anticlinali?

La risposta che appare più logica è appunto quella di attribuire il sollevamento ad una tardiva fase di attività orogenica che avrebbe agito sulle suddette anticlinali, e verosimilmente su altre, accentuando la loro curvatura, dopo il Mindeliano.

Questi sollevamenti possono apparire di primo acchito in contrasto con evidenti fenomeni di subsidenza del fondo padano che si sono verificati non solo durante il Miocene ed il Pliocene, ma anche il Calabrian, come può essere provato dalle quote altimetriche alle quali sono stati riscontrati questi terreni nel sottosuolo con le trivellazioni e dalla grande potenza dei sedimenti che li rappresentano ⁽⁵⁾.

Ma a parte il fatto che i movimenti in questione sarebbero posteriori al Calabrian, si deve aggiungere che se il fondo della Valle Padana è stato soggetto ad un movimento d'insieme di affondamento, non è detto che per questo non possano essersi verificati successivamente o anche contemporaneamente piegamenti e conseguenti sollevamenti locali d'indole orogenica, dei dorsì delle anticlinali.

C'è ora da chiederci sino a quando sono perdurati i movimenti suddetti. È difficile dirlo, poichè mancano per ora dati di riferimento.

Non è impossibile che si siano mantenuti, sia pure in forma attenuata, sino all'epoca attuale interessando anche i terreni alluvionali che costituiscono il livello generale della pianura. In tal caso dovremmo trovare delle elevazioni, per quanto deboli, sulla superficie della pianura in corrispondenza delle anticlinali. Le inflessioni negative, in corrispondenza delle sinclinali, è difficile invece che si possano essere eventualmente conservate, poichè tendono a venire rapidamente colmate dalla sedimentazione continentale.

(3) D. JABOLI, *Le gaz et le pétrole dans la plaine du Po*. « Proceeding 3^o World Petroleum Congress », Section I, Preprint 36, Leiden 1951.

(4) JABOLI, op. cit.

(5) JABOLI, op. cit.

La collaborazione da me sollecitata nel 1947 ai geodeti ed ai geofisici era diretta appunto a ricercare l'eventuale esistenza di ondulazioni della superficie della pianura corrispondente alle anticlinali sepolte ed a controllare se per caso esistessero eventuali movimenti in atto.

Difficoltà di vario ordine e soprattutto d'indole economica, non hanno consentito l'organizzazione di ricerche del genere. Ho tentato allora di ricavare elementi dalle carte topografiche esistenti, ma senza successo, anche per il fatto che troppi altri dettagli topografici interferiscono sull'andamento delle curve di livello di metro in metro, che ho cercato di ricostruire sulla base delle quote esistenti nelle carte al 25000.

Ho comunque creduto opportuno di segnalare i fatti sopra esposti, anche prima di completare le indagini in proposito ⁽⁶⁾, poichè penso che ulteriori documenti potrebbero scaturire anche da ricerche di altri.

A tale proposito devo ricordare che Comel ha pure attribuito a sollevamenti recenti i lembi di alluvioni esistenti nella pianura friulana ⁽⁷⁾. Là non si conosce per ora la struttura tettonica sottostante, come nel caso la Lombardia, ma il fatto meriterebbe qualche attenzione anche per gli eventuali effetti pratici che potrebbe avere nel campo delle ricerche petrolifere.

Fisiologia. — *Sull'ipersecrezione enterica dei lipidi durante l'iperlipidemia sperimentale* ^(*). Nota ^(**) del Corrisp. ANTONINO CLEMENTI.

La presenza di grassi nelle feci di animali digiunanti, dimostrata per la prima volta da Muller ⁽¹⁾ nel 1884, fu attribuita da alcuni fisiologi alla desquamazione di cellule epiteliali della mucosa intestinale (Ehrenthal, 1891) ⁽²⁾ alla flora batterica intestinale e al versamento della bile nell'intestino, da altri (Voit 1892) ⁽³⁾ all'attività escretiva della mucosa dell'intestino. Lombroso U. ⁽⁴⁾ nel 1904 fece l'importante osservazione, che, in un certo numero di cani spancreatici la quantità dei grassi, che si trova presente nelle feci, è superiore a quella ingerita cogli alimenti e Luciani ⁽⁵⁾ interpretò questo fatto come un argomento favorevole alla tesi dell'esistenza di un'attività emuntoria dell'intestino rispetto ai grassi.

(6) Fatti analoghi sono stati segnalati in varie parti del bacino mediterraneo e dell'Europa continentale.

(7) A. COMEL, *Una nuova concezione sull'origine dei terrazzi pruwürmiani friulani con particolare riguardo a quelli di Pozzuolo, Orgnano e Variano*. « In Alto », ser. II, anno XLIV, n. 2, pp. 3-9, Udine 1946.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della Università di Catania.

(**) Presentata nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) « Zeit. Biol. », 20, 327 (1884).

(2) « Arch. ges. physiol. » (Pflügers), 48, 74 (1891).

(3) « Zeit. Biol. », 29, 325 (1892).

(4) « Arch. Scienze Mediche », 28, 359 (1904).

(5) *Fisiologia dell'uomo*.

Nel 1926 e nel 1927 Sperry ⁽⁶⁾ sostenne la tesi della escrezione di lipidi da parte dell'intestino; egli dimostrò l'erroneità della obiezione, che i lipidi presenti nelle feci siano derivati dalla secrezione biliare e non dalla secrezione dell'intestino, rilevando che essi sono presenti nelle feci anche dei cani, ai quali era stata esclusa la bile dall'intestino mediante la fistola biliare.

La dimostrazione veramente incontrovertibile della esistenza di una secrezione lipidica da parte delle ghiandole dell'intestino non poteva venire, che dalla rigorosa dimostrazione, che i lipidi sono componenti chimici normali e costanti del succo enterico puro. Tale dimostrazione è stata data per la prima volta da me con esperienze pubblicate nel giugno del 1927 ⁽⁷⁾, sotto il titolo *Presenza di Lipidi tra i costituenti normali del secreto enterico*, dalle quali risultò, che tra i componenti del succo enterico secreto in seguito a svariati stimoli dall'ansa intestinale alla Thiry-Vella praticata nell'intestino tenue del cane, anche se liberato dagli elementi morfologici per prolungata centrifugazione, sono presenti costantemente i lipidi: la loro quantità durante l'alimentazione mista contenente grassi è di mg. 110-140 % e durante l'alimentazione molto ricca in grassi aumenta e si eleva a mg. 260 %.

Nel 1929 Angevine ⁽⁸⁾, senza citare le esperienze già da me eseguite e pubblicate due anni prima e il cui ampio riassunto era già stato pubblicato nel volume 44, 1928, p. 542 dei « *Berichte über die Gesamte Physiologie* », affermò di avere riscontrato nel succo enterico emesso in un giorno da un'ansa intestinale alla Thiry-Vella praticata nel cane mg. 2,2-mg. 2,3 di lipidi e negò che il contenuto lipidico del succo enterico sia influenzato dalla dieta alimentare.

Nel 1949 ⁽⁹⁾ confermai il risultato delle mie ricerche del 1927, dimostrando che (tabella I) il succo enterico puro secreto dall'ansa dell'intestino tenue isolata alla Thiry-Vella nel cane, dopo un lungo periodo di una dieta ricca di grassi, e quindi durante l'iperlipemia alimentare che ne consegue, contiene una quantità di lipidi molto superiore a quella del succo secreto durante una dieta poverissima in grassi. I lipidi di cui dimostrai la presenza nel succo enterico furono, oltre ai gliceridi, la colesterina e i fosfatidi.

Con successive ricerche nel 1950 ⁽¹⁰⁾ dimostrai (tabella II), che durante il periodo della iperlipemia postassorbita consecutiva ai pasti molto ricchi in grassi, la quantità dei lipidi contenuti nel succo enterico è notevolmente superiore (quasi del doppio) a quella presente nel succo secreto prima dei pasti nell'animale a digiuno da quindici ore circa, mentre uguale a quest'ultima è la quantità dei lipidi presenti nel succo secreto nel periodo postassorbitivo dopo i pasti privi di grassi.

(6) « *J. Biol. Chem.* », 71, 351 (1927).

(7) « *Bollettino Società Italiana di Biologia Sperimentale* », 2, 584 (1927).

(8) « *Journal of Biol. Chemistry* », 105, 369 (1929).

(9) « *Bollettino Società Italiana di Biologia Sperimentale* », 25, 1274 (1949).

(10) « *Bollettino Società Italiana di Biologia Sperimentale* », 26 (1950).

TABELLA I.

Dieta alimentare e secrezione lipidica di un'ansa dell'intestino tenue isolata alla Thiry-Vella nel cane (Da A. CLEMENTI, « Bollett. Soc. Italiana Biologia Sperimentale », 25 1949).

Giorni della raccolta del succo enterico (secrezione provocata dal cloridrato di pilocarpina) 1949	Razione alimentare giornaliera supplementare della razione basale costituita da g 300 di pasta e da g 200 di pane <i>pro die</i>	Quantità del succo enterico analizzato cc	Quantità dei lipidi totali estraibili con etere etilico (Soxhlet) dal succo enterico analizzato	
			trovato mg.	calcolato % mg
Luglio 1, 5, 6, 8 .	Carne magra g 200 ogni 3 giorni . . .	18	7	40
Luglio 12, 13, 14, 15	Dall'11 luglio latte cc 100, burro g 50, uova n. 3	25,5	30	117
Luglio 22, 23. . .	Dal 16 al 25 luglio olio di oliva g 100 .	10	21	210
Luglio 26, 27, 28. .	Latte cc 50, burro g 100, uova n. 2 (iniezione sottocutanea di cc 20 di emulsione asettica al 5 % dei lipidi estratti dal tuorlo d'uovo	15	24	160
Luglio 30 Agosto 4, 5, . . .	Dal 29 luglio al 5 agosto: olio di oliva g 100	11	32	300
Agosto 7	Dal 6 agosto: carne magra g 100 . .	3,5	6,5	185
Agosto 13, 14 . . .	Dall'8 agosto al 17 agosto: ogni due giorni carne magra g 100	16,5	21	127
Agosto 17	Ore 12 iniezione endovenosa di 16 cc di un'emulsione asettica al 5 % dei lipidi estratti dal tuorlo d'uovo (ore 13 e ore 13,15) raccolta del succo .	7,5	10	133

Il rapporto così da me dimostrato tra lipemia e quantità di lipidi nel succo enterico è stato pienamente confermato dalle recentissime ricerche di Arrigo e Montini ⁽¹¹⁾, che lo hanno anche brillantemente generalizzato. Infatti questi ricercatori hanno determinato il tasso dei lipidi totali, della colesterina e dei fosfatidi nel sangue e nel succo enterico e hanno trovato un perfetto parallelismo tra valori lipemici e quantità di lipidi nel succo enterico non solo nel cane normale ma anche nel cane privo di pancreas (in cui sono nettamente aumentati, e nel cane privo dei surreni (in cui appaiono lievemente diminuiti).

Mi è sembrato importante portare una definitiva e rigorosa dimostrazione del rapporto tra ipersecrezione enterica dei lipidi e iperlipidemia mediante

(11) « Atti Accademia Nazionale dei Lincei » (Classe Sc. Fis. Mat. e nat.), ser. VIII, II, 297 (1951).

il dosaggio dei lipidi totali, della colesterina e dei fosfatidi nel succo enterico prima e dopo l'introduzione diretta nel circolo sanguigno dei lipidi estraibili dal tuorlo d'uovo (gliceridi, colesteridi e fosfatidi).

Le esperienze sono state eseguite su cani di sesso femminile ai quali era stato praticato l'isolamento di un'ansa dell'intestino tenue col metodo di Thiry-Vella.

TABELLA II.

Contenuto in lipidi del succo enterico secreto da un'ansa dell'intestino tenue isolata alla Thiry-Vella prima dei pasti (dopo digiuno di 16-18 ore) e 5 ore dopo pasti privi di grassi e dopo pasti ricchi di grassi (da A. CLEMENTI, « Bollettino Società Italiana Biologia Sperimentale », 26 1950).

N. delle esperienze	Condizioni sperimentali	Volume totale del succo enterico analizzato cc	Quantità totale dei lipidi	
			trovata mg.	calcolata per cento cc. di succo mg.
1 ^a	Prima del pasto	28,5	16,4	57,5
	4 ore dopo il pasto privo praticamente di grassi (pasta g 300 e pane) . . .	28,0	16,0	57,0
2 ^a	Prima del pasto	24,2	15,3	63,2
	4 ore dopo il pasto poverissimo in grassi (pasta g 300, carne magra g 200)	29,6	18,5	62,5
3 ^a	Prima del pasto	23	15,2	66
	4 ore dopo il pasto ricco in grassi (pasta g 300, burro g. 100)	19	19,0	95
4 ^a	Prima del pasto	12	6,0	50
	4 ore dopo il pasto ricco in grassi (pasta g 300, olio g 100)	21	22,0	104

La secrezione del succo enterico veniva provocata in ogni esperienza mediante l'introduzione attraverso l'estremità orale dell'ansa di una soluzione di cloridrato di pilocarpina all'1/1000 nella quantità di cc. 2,3. Dopo il breve periodo dell'assorbimento si iniziava dall'estremità aborale dell'ansa la emissione del succo enterico, che continuava per circa 8-10 minuti. Il succo secreto nella quantità oscillante tra 4 e 6 cc., si presentava come un liquido vischioso ricco di mucina colorato lievemente e parzialmente in giallo. Il succo veniva portato a secco su bagnomaria previa neutralizzazione al tor-

nasole; il residuo secco dopo prolungata permanenza in stufa a 100°C e in essiccatore veniva polverizzato e pesato, e quindi veniva sottoposto per parecchie ore all'estrazione con etere etilico nell'estrattore di Soxhlet. Gli estratti eteri apparivano leggermente colorati in giallo per la presenza di lipocromi (carotinoidi).

Nell'estratto etero dopo l'allontanamento dell'etere si procedeva al microdosaggio della colesterina e del fosforo lipidico. La colesterina totale veniva dosata col metodo colorimetrico fondato sulla reazione di Liebermann-Bouchard. Il fosforo lipidico veniva dosato colorimetricamente dopo ossidazione con acido perclorico e successivo trattamento con molibdato di ammonio e col reattivo riducente. Le determinazioni colorimetriche venivano eseguite conformemente alle indicazioni tecniche micro-analitiche di King e la lettura si faceva al colorimetro a cellula fotoelettrica (lumetron).

Nei quindici giorni precedenti le esperienze la razione alimentare era costituita da pasta cotta senza condimenti e da poca carne magra. La secrezione del succo veniva provocata nell'animale a digiuno venti ore dopo l'ultimo pasto e in alcuni gruppi di esperienze 15 minuti dopo l'iniezione endovenosa dei lipidi totali estratti dal tuorlo d'uovo e portati allo stato di emulsione al 5 % in soluzione fisiologica; in ogni esperienza si iniettavano nella vena safena esterna quantità oscillanti tra cc. 15 e cc. 30 di tale emulsione, cioè cc. 2 pro Kg. di peso corporeo ⁽¹²⁾.

Dai dati analitici ottenuti nelle presenti esperienze riassunti nell'annessa tabella (Tabella III) risulta, che nel succo enterico secreto dall'ansa dell'intestino tenue del cane isolata alla Thiry-Vella, dopo una dieta alimentare praticamente priva di grassi e prolungata anche per parecchie settimane, e circa 20 ore dopo l'ultimo pasto, sono presenti lipidi in una quantità totale oscillante tra mg. 50 % e mg. 70 %, colesterina nella quantità di mg. 5 %-mg. 8 % circa, e fosfatidi, in una quantità di circa mg. 3,2 % corrispondente a mg. 0,14 % circa di fosforo lipidico ($0,14 \times 23$).

Nel succo enterico secreto durante la iperlipidemia consecutiva alla iniezione endovenosa dell'emulsione al 5 % dei lipidi totali estratti dal tuorlo d'uovo (circa cc. 2 per Kg. di peso corporeo), la quantità dei lipidi era notevolmente aumentata: tale aumento corrispondeva per i lipidi totali al 30 % circa e per la colesterina e i fosfatidi al 100 % circa ed era accompagnato dall'aumento dei lipocromi, evidenziato dalla intensificata colorazione giallastra del succo enterico secreto.

Circa il significato fisiologico della presenza dei lipidi nel succo enterico a me sembra giustificato affermare, che essa non è da considerarsi solamente come una semplice espressione della funzione emuntoria dell'intestino. Infatti risulta dalle mie esperienze, che nel succo enterico secreto, anche dopo una prolungata dieta alimentare priva di grassi, i lipidi sono presenti in una quantità, che non si abbassa al disotto di determinati valori.

(12) L'emulsione dei lipidi totali estratti dal tuorlo d'uovo adoperata nelle presenti esperienze è stata quella preparata dall'istituto Serson e che è denominata bioplastina.

Lipidi totali, colesterina e fosforo lipidico nel succo enterico, secreto dall'ansa intestinale alla Thiry-Vella nel cane durante l'iperlipidemia sperimentale.

Condizioni sperimentali	Volume totale del succo enterico cc.	Lipidi totali		Colesterina totale		Fosforo lipidico	
		quantità trovata mg.	quantità calcolata % mg.	quantità trovata mg.	quantità calcolata % mg.	quantità trovata mg.	quantità calcolata % mg.
I gruppo di esperienze dicembre 1951 (8, 11, 13, 15)	Succo enterico secreto 20 ore dopo l'ultimo pasto	9,2	47,1	1,0	5,6	0,026	0,133
	Succo enterico secreto 20 ore dopo l'ultimo pasto e 15 m' dopo l'iniezione endovenosa dei lipidi totali estratti dal tuorlo d'uovo (cc. 30, 28 e 15 di emulsione al 5 % <i>pro die</i>)	9,5	67,8	1,4	10,0	0,041	0,292
II gruppo di esperienze febbraio 1952 (6, 7, 8, 9) (*)	Succo enterico secreto 20 ore dopo l'ultimo pasto	11,0	68,7	1,2	7,5	—	—
	Succo enterico secreto 20 ore dopo l'ultimo pasto e 15 m' dopo l'iniezione endovenosa dei lipidi totali estratti dal tuorlo d'uovo (cc. 20, 30, 30, di emulsione al 5 % <i>pro die</i>)	13,5	84,3	2,5	15,6	—	—

(*) La cagna è aumentata di peso ed è ingrassata.

La secrezione enterica dei lipidi in tali condizioni si può considerare come basale ed evidentemente sta in rapporto, dal punto di vista teleologico, con quelle che sono le funzioni fondamentali dell'intestino, cioè con le funzioni intestinali digerente e assorbente. Secondo Favarger ⁽¹³⁾, infatti, la presenza dei fosfatidi, e secondo Kirschmair ⁽¹⁴⁾, la presenza della colesterina nel lume intestinale possono essere utili per l'assorbimento intestinale dei gliceridi. Secondo me la colesterina secreta è destinata anche ad esplicare una importante azione protettiva sulla mucosa intestinale aumentando la resistenza delle membrane cellulari rispetto all'azione citolitica delle sostanze tossiche eventualmente presenti nel lume dell'intestino.

D'altra parte, le presenti esperienze dimostrano, che quando viene provocata sperimentalmente l'iperlipidemia la quantità dei lipidi presenti nel succo enterico è fortemente aumentata: esse stanno in perfetto accordo con le mie precedenti ricerche, da cui fu dimostrata l'esistenza di un rapporto tra l'iperlipidemia alimentare e l'iperlipidemia digestiva postassorbitiva da una parte e la quantità aumentata dei lipidi nel secreto dell'intestino dall'altra.

La ipersecrezione enterica dei lipidi si può quindi considerare come una espressione della funzione emuntoria dell'intestino in evidente stretto rapporto col metabolismo generale dei lipidi e secondo noi, insieme con altri meccanismi fisiologici (deposizione dei grassi nel tessuto adiposo, lipodieresi epatica) mira ad abbassare l'aumentato tasso lipidico del sangue e a ricondurlo ai valori normali.

Riassumendo credo di potere formulare le seguenti conclusioni generali:

1° È presente normalmente nel succo enterico una notevole quantità di lipidi, tra i quali da segnalare la colesterina e i fosfatidi, che non si abbassa al di sotto di determinati valori anche quando venga prolungata per un lungo periodo la dieta alimentare priva di grassi. Essa raggiunge valori notevolmente più elevati, fino al raddoppiamento quando il succo enterico è secreto dopo l'iniezione endovenosa dei lipidi totali estratti dal tuorlo d'uovo.

2° È giustificato distinguere una secrezione enterica di lipidi, che si può denominare basale, avente luogo dopo un lungo digiuno lipidico e dopo pasti privi di grassi che è evidentemente connessa alle fondamentali attività fisiologiche dell'intestino, e una ipersecrezione enterica di lipidi, che ha luogo, quando viene provocata l'iperlipidemia sperimentale o quando insorge comunque uno stato di iperlipidemia, e che è da considerare, come uno dei meccanismi fondamentali, coi quali l'organismo tende a garantire l'omeostasia lipidica del sangue.

(13) « *Helv. Physiol. und Pharmac. Acta* », 7, 371 (1949).

(14) « *Klin. Wochens* », 27, 558 (1949).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Estensione della formula integrale di Cauchy alle algebre complesse dotate di modulo e commutative* ^(*). Nota di GIOVANNI BATTISTA RIZZA, presentata ^(**) dal Socio F. SEVERI.

1. In un mio precedente lavoro ^(*), ho stabilita, per le funzioni monogene (altrimenti dette totalmente derivabili), nelle algebre complesse dotate di modulo e commutative, una formula integrale unidimensionale generalizzante l'ordinaria formula di Cauchy. Tale formula è dimostrata nel lavoro citato subordinatamente all'ipotesi che l'algebra considerata, se irriducibile, abbia i divisori dello zero distribuiti sopra un iperpiano dello spazio complesso rappresentativo, o, se riducibile, analogamente avvenga per le algebre irriducibili delle quali può considerarsi somma diretta.

Sono ora in grado di dimostrare che la formula di cui trattasi, più oltre riportata (n. 2), ha validità del tutto generale, in quanto la già ammessa ipotesi sulla distribuzione dei divisori dello zero riesce di fatto verificata per ogni algebra complessa dotata di modulo e commutativa.

2. Sia A un'algebra complessa commutativa e dotata di modulo, ed $A^{(s)}$ ($s = 1, \dots, k$) ne siano le componenti irriducibili di cui A è somma diretta: $A = A^{(1)} + \dots + A^{(k)}$. Indicati con n, n_s gli ordini di $A, A^{(s)}$ ($n = \sum_s n_s$), rappresenteremo come d'ordinario, $A^{(s)}$ sopra uno spazio complesso n_s -dimensionale $S_{n_s}^{(s)}$ ed A sopra uno spazio complesso n -dimensionale S_n che potremo pensare come prodotto topologico degli $S_{n_s}^{(s)}$: $S_n = S_{n_1}^{(1)} \times \dots \times S_{n_k}^{(k)}$.

Come proveremo al n. 3, i divisori dello zero di $A^{(s)}$ corrispondono nell'anzidetta rappresentazione ai punti di un iperpiano $\omega_{n_s-1}^{(s)}$ di $S_{n_s}^{(s)}$. Risulta allora immediatamente (cfr. il mio lavoro già cit.) che la varietà ω_{n-1} di S_n su cui si rappresentano i divisori dello zero di A riesce costituita di k iperpiani $\Omega_{n-1}^{(s)}$, e precisamente si ha:

$$\omega_{n-1} = \sum_s \Omega_{n-1}^{(s)} = \sum_s S_{n_1}^{(1)} \times \dots \times S_{n_{s-1}}^{(s-1)} \times \omega_{n_s-1}^{(s)} \times S_{n_{s+1}}^{(s+1)} \times \dots \times S_{n_k}^{(k)}.$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Matematica dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) G. B. RIZZA, *Contributi al problema della determinazione di una formula integrale per le funzioni monogene nelle algebre dotate di modulo e commutative*. « Rend. Seminario Mat. Univ. di Roma », 1952.

Nel seguito ci occorrerà considerare anche le varietà $\bar{\omega}_{n-1}$, $\bar{\Omega}_{n-1}^{(s)}$, parallele alle varietà ω_{n-1} , $\Omega_{n-1}^{(s)}$ per un generico punto Ξ di S_n ; in guisa che, quando l'ipercomplesso X di A varia su $\bar{\omega}_{n-1}$, riesce $X - \Xi$ zero o divisore dello zero.

Sia poi A^* l'algebra reale di ordine $2n$ immagine dell'algebra complessa A . Ipercomplessi di A , A^* corrispondenti saranno indicati con la stessa lettera; i secondi però si rappresenteranno nello spazio reale $2n$ -dimensionale S_{2n}^* , immagine dello spazio complesso S_n . Indichiamo poi con $\bar{\omega}_{2n-2}^*$, $\bar{\Omega}_{2n-2}^{(s)*}$ le varietà $(2n-2)$ -dimensionali reali di S_{2n}^* , immagini delle varietà complesse $\bar{\omega}_{n-1}$, $\bar{\Omega}_{n-1}^{(s)}$ di S_n ed aventi significato corrispondente nei confronti dei divisori dello zero di A^* .

Ciò premesso, il risultato che stabilisco è il seguente:

Per le funzioni $F(X)$ della variabile X dell'algebra A^ , monogene in una regione R_{2n}^* di S_{2n}^* , essendo Ξ un punto di R_{2n}^* , sussiste la formula integrale*

$$(I) \quad \int_{\Gamma_1} \frac{F(X)}{X - \Xi} dX = 2\pi i \sum_s^k N^{(s)} u^{(s)} F(\Xi);$$

dove gli ipercomplessi $u^{(s)}$ sono gli automoduli primitivi di A^* , e Γ_1 è un ciclo 1-dimensionale soddisfacente alle condizioni:

$$(I) \quad \Gamma_1 \subset R_{2n}^* - \bar{\omega}_{2n-2}^*$$

$$(II) \quad \Gamma_1 \approx 0 \quad \text{in } R_{2n}^* - \bar{\omega}_{2n-2}^* + \Xi$$

$$(III) \quad N^{(s)} = \text{All. } (\Gamma_1, \bar{\Omega}_{2n-2}^{(s)*})^{(2)}.$$

La formula (1) risolve dunque in generale e con le condizioni topologiche più ampie, il problema della determinazione di una formula integrale di tipo Cauchy nelle algebre reali dotate di modulo e commutative, immagini di algebre complesse.

3. In base a quel che si è detto ai nn. 1, 2, per assicurare validità generale alla (1) basta dimostrare che i divisori dello zero di ciascuna delle algebre $A^{(s)}$ corrispondono ad un iperpiano dello spazio complesso rappresentativo.

Ora, N. Spampinato in un suo recente lavoro ⁽³⁾, ha osservato che un'algebra complessa commutativa dotata di modulo, irriducibile e d'ordine n_s , qual'è $A^{(s)}$, può sempre considerarsi somma, non diretta, di un'algebra $C^{(s)}$

(2) Per qualche maggior precisazione e per il significato dei simboli topologici usati. rimando al mio lavoro già citato.

(3) N. SPAMPINATO, *Le algebre complesse, commutative, dotate di modulo*. « Ricerche di Mat. », 1 (1952).

di 1° ordine equivalente all'algebra complessa ordinaria, e della sua sotto-algebra eccezionale $E^{(s)}$, di ordine $n_s - 1$.

Siccome $E^{(s)}$ è un'algebra pseudonulla, ogni ipercomplesso di $E^{(s)}$ o è lo zero o è divisore dello zero. Perciò è chiaro intanto che i divisori dello zero di $A^{(s)}$ riempiono l'iperpiano di $S_{n_s}^{(s)}$ che corrisponde ad $E^{(s)}$. Si tratta di provare ancora che nessun ipercomplesso fuori di $E^{(s)}$ può essere divisore dello zero.

Supponiamo per assurdo che x sia un tale ipercomplesso divisore dello zero, in guisa che esista un altro ipercomplesso $y \neq 0$ di $A^{(s)}$ per cui si abbia: $xy = 0$. Indicato con $u^{(s)}$ il modulo *entro* $C^{(s)}$, può scriversi:

$$(2) \quad x = x_0 u^{(s)} + \xi, \quad y = y_0 u^{(s)} + \eta,$$

ove x_0, y_0 sono ordinari numeri complessi e ξ, η elementi di $E^{(s)}$.

Si ha allora:

$$xy = x_0 y_0 u^{(s)} + x_0 \eta + y_0 \xi + \xi \eta = 0;$$

e poichè il primo addendo a secondo membro è un numero di $C^{(s)}$ e gli altri tre addendi sono ipercomplessi di $E^{(s)}$, ne segue:

$$(3) \quad x_0 y_0 = 0, \quad x_0 \eta + y_0 \xi + \xi \eta = 0.$$

Siccome x si è supposto fuori di $E^{(s)}$, è $x_0 \neq 0$ e la prima delle (3) dà $y_0 = 0$, cioè:

$$(4) \quad y = \eta.$$

D'altronde la seconda delle (3) diviene:

$$x_0 \eta + \xi \eta = 0,$$

ovvero, ponendo $\zeta = -\frac{1}{x_0} \xi$ con ζ in $E^{(s)}$,

$$(5) \quad \eta = \zeta \eta.$$

Ora, se è $\zeta = 0$, la (5) dà $\eta = 0$. Altrimenti ζ è pseudonullo; in tal caso, indicato con g il grado di ζ , risulta $\zeta^{g+1} = 0$. E moltiplicando ambo i membri della (5) per le successive potenze di ζ , si trova:

$$\eta = \zeta \eta = \zeta^2 \eta = \dots = \zeta^{g+1} \eta = 0.$$

In ogni caso si ha dunque $\eta = 0$ e quindi, per la (4), $y = 0$, contrariamente alle ipotesi poste.

Con ciò si è provato, come volevasi, che ogni divisore dello zero di $A^{(s)}$ appartiene di necessità ad $E^{(s)}$.

Astronomia (Astrofisica). - *Lo spettro di una protuberanza quiescente.* Nota di GUGLIELMO RIGHINI, presentata (*) dal Socio G. ABETTI.

Lo studio delle protuberanze solari ha avuto un notevole sviluppo in questi ultimi anni grazie all'applicazione dei filtri monocromatori che permettono di seguire per lungo tempo i moti della materia di cui esse sono costituite (1). Notevoli risultati sono stati pure ottenuti dallo studio sistematico di esse lungo il ciclo solare (2) per cui possiamo dire che oggi esse sono dopo le macchie, il fenomeno solare meglio conosciuto. Ben poco invece si sa circa lo stato di eccitazione degli atomi e circa la loro composizione causa la scarsità di osservazioni spettroscopiche. Gli spettri presi con eclissi artificiale sono molto poveri di righe e durante le eclissi totali soltanto casualmente sono stati presi degli spettri quando, per avventura, una protuberanza cadeva nella zona della corona in istudio. Per questo pochissime sono le ricerche fisiche sullo spettro delle protuberanze, la più importante è lo studio dell'Unsöld (3) sulle condizioni di eccitazione di una protuberanza eruttiva fatto sugli spettri presi casualmente dal Grotrian (4) nell'eclissi del 1926.

Durante l'eclissi totale di Sole del 25 febbraio 1952 è pure accaduto alla missione italiana che osservava l'eclissi a Chartum (Sudan) di fotografare allo spettrocoronografo lo spettro di una piccola protuberanza contemporaneamente allo spettro della corona. La protuberanza in questione si trovava in angolo di posizione 70° circa e veniva osservata anche in Arcetri nei giorni 24, 26 e 27 febbraio come risulta dalla tabellina seguente.

TABELLA I.

Posizione ed altezza della protuberanza dalle osservazioni visuali fatte in Arcetri.

Data	Angolo di posizione	Altezza
24 Febbraio	62°	43''
25 Febbraio	non osservata	
26 Febbraio	67°	43''
27 Febbraio	65°	43''

(*) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) « Ann. d'Astrophysique », 7, 31 (1944).

(2) « Pubbl. Arcetri », dal n. 39 al 66.

(3) « Zs. f. Aphys. », 24, 22 (1947).

(4) « Zs. f. Aphys. », 2, 106 (1931).

La mancata osservazione del 25 può essere imputata alla notevole agitazione atmosferica che rende molto difficile l'individuazione delle piccole protuberanze. Data la persistenza della protuberanza si può dire senz'altro che essa appartiene alla classe V di Pettit⁽⁵⁾ cioè alle protuberanze quiescenti. La protuberanza in questione appare anche nelle fotografie dirette della corona, essa è visibile soltanto nelle lastre prese all'inizio della totalità ed è invece eclissata dalla luna nelle lastre seguenti. Negli spettri della corona si vedono numerose righe dovute alla protuberanza soltanto nella posa di 10 secondi, nelle pose seguenti mancano le righe deboli mentre permangono le più intense come le righe di H, He e Ca II.

La misura della posizione delle righe nello spettro è stata fatta al macromicrometro Mioni, le lunghezze d'onda sono state poi determinate con la solita tecnica prendendo come riferimento alcune righe facilmente identificabili. Le righe di protuberanza presentano una struttura tutta particolare che deriva dalla forma della protuberanza stessa, esse sono pertanto chiaramente distinguibili dalle righe della corona. La forma della protuberanza è sensibile nonostante che le fenditure degli spettrografi avessero una larghezza di 0.08 mm. corrispondenti a circa 10'' sul sole. Data la piccola dispersione degli spettrografi e la forma irregolare delle righe si è stimato che le λ possono essere affette da una incertezza di ± 1 Å. nel violetto e ± 2 Å. nel rosso.

Nella tabella II sono contenute le righe osservate negli spettri U e V⁽⁶⁾ e sicuramente emesse dalla protuberanza. La colonna 1 contiene il numero d'ordine della riga, la 2 la sigla dello spettrografo U o V col quale è stata osservata la riga, la 3 la lunghezza d'onda di laboratorio corrispondente a quella misurata, la 4 l'elemento emittente ed il numero della M.I.T.⁽⁷⁾ relativo al multipletto, la 5 la designazione spettroscopica, la 6 il potenziale di eccitazione del livello superiore e inoltre per le righe di elementi ionizzati anche il potenziale di ionizzazione dell'atomo neutro, la 7 infine la somma dei due valori della colonna precedente cioè il potenziale di eccitazione totale contato dal livello fondamentale dell'atomo neutro.

La riga n. 33 non trova una identificazione plausibile, essa d'altronde è molto debole e la sua misura è assai incerta. Anche l'identificazione della riga n. 37 è un po' incerta, infatti non vi è traccia dell'altra riga intensa 4549.6 Å. dello stesso multipletto ed è difficile pensare che essa possa confondersi con la 4554 del Ba II.

La 46 si identifica col tripletto di O I 7772, 7774, 7775 Å. che si osserva anche nella cromosfera. Questa è la prima volta che si trova l'ossigeno nelle protuberanze.

(5) UNSÖLD, *Phys. der Sternatmosphären*, p. 396, Springer, Berlin 1938.

(6) Cfr. Nota: *Lo spettro della corona solare*. . . in questi « Rendiconti », vol. XII, fasc. 5, pp. 563-565 (1952).

(7) MOORE, *Multiplet table*. Princeton 1945.

TABELLA II.

Righe di protuberanze osservate negli spettri U e V

1	2	3	4	5	6	7
1	U	3685.25	Ti II (14)	$a^2 F - z^2 D^o$	3.95 6.81	10.76
2	U	3686.83	H ₁₈	—	—	—
3	U	3697.15	H ₁₇	—	—	—
4	U	3705.97	H ₁₆	—	—	—
5	U	3717.50	H ₁₅	—	—	—
6	U	3721.94	H ₁₄	—	—	—
7	U	3734.37	H ₁₃	—	—	—
8	U.V	3750.25	H ₁₂	—	—	—
9	U.V	3759.33	Ti II (13)	$a^2 F - z^2 F^o$	3.89 6.81	10.70
10	U.V	3761.5	Ti II (13)	$a^2 F - z^2 F^o$	3.85 6.81	10.66
11	U.V	3770.63	H ₁₁	—	—	—
12	U.V	3797.90	H ₁₀	—	—	—
13	U	3819.63	He I (22)	$2^3 P^o - 6^3 D$	24.11 —	24.11
14	U.V	3829.35	Mg I (3)	$3^3 P^o - 3^3 D$	5.92 —	5.92
15	U.V	3832.30	Mg I (3)	$3^3 P^o - 3^3 D$	5.92 —	5.92
16	U.V	3835.54	H ₉	—	—	—
17	U	3838.30	Mg I (3)	$3^3 P^o - 3^3 D$	5.92 —	5.92
18	U.V	3889.05	H ₈	—	—	—
19	U.V	3933.82	K Ca II (1)	$4^2 S - 4^2 P^o$	3.14 6.09	9.23
20	U.V	3968.63	H Ca II (1)	$4^2 S - 4^2 P^o$	3.14 6.09	9.23
21	V	3970.68	H ₇	—	—	—
22	U.V	4026.28	He I (18)	$2^3 P^o - 5^3 D$	23.49 —	23.49
23	U.V	4077.83	Sr II (1)	$5^2 S - 5^2 P^o$	3.03 5.67	8.70
24	U.V	4101.74	H ₅	—	—	—
25	U.V	4215.70	Sr II (1)	$5^2 S - 5^2 P^o$	3.03 5.67	8.70
26	V	4246.90	Sc II (7)	$a^1 D - z^1 D^o$	3.22 6.70	9.92
27	U.V	4340.46	H ₇	—	—	—
28	V	4395.13	Ti II (19)	$a^2 D - z^2 F$	3.89 6.81	10.70
29	V	4400.52	Sc II (14)	$a^3 F - z^3 F$	3.41 6.70	10.11
30	V	4443.85	Ti II (19)	$a^2 D - z^2 F$	3.85 6.81	10.66
31	U.V	4471.54	He I (14)	$2^3 P - 4^3 D$	23.49 —	—
32	V	4501.28	Ti II (31)	$a^2 G - z^2 F^o$	3.85 6.81	10.66

Segue: TABELLA II.

1	2	3	4	5	6	7
33	V	4506	—	—	—	—
34	V	4534.03	Ti II (50)	$a^2 P - z^2 D^o$	3.95 6.81	10.76
35	V	4554.11	Ba II (1)	$6^2 S - 6^2 P^o$	2.71 5.19	7.90
36	V	4563.76	Ti II (50)	$a^2 P - z^2 D$	3.92 6.81	10.73
37	V	4572.00	Ti II (82)	$a^2 H - z^2 C^o$	4.29 6.81	11.10
38	V	4685.83	He II (1)	$3^2 D - 4^2 F$	50.80 24.84	75.64
39	V	4713.15	He I (12)	$2^3 P^o - 4^3 S$	23.49 —	23.49
40	U.V	4861.33	H β	—	—	—
41	V	5183.58	Mg I (2)	$3^3 P^o - 4^3 S$	115.09 —	5.09
42	V	5875.63	He I (11)	$2^3 P^o - 3^3 D$	22.97 —	22.97
43	V	6563.05	H α	—	—	—
44	V	6678.15	He I (46)	$2^1 P - 3^1 D$	22.97 —	22.97
45	V	7771.75	O I (1)	$3^5 S^o - 3^5 P$	10.69 —	10.69
46	V	8498.02	Ca II (2)	$3^2 D - 4^2 P^o$	3.14 6.09	9.23
47	V	8542.07	Ca II (2)	$3^2 D - 4^2 P^o$	3.14 6.09	9.23
48	V	8662.10	Ca II (2)	$3^2 D - 4^2 P^o$	3.14 6.09	9.23

Dall'esame della tabella II si vede che anche nelle protuberanze si ha il noto fenomeno della alta eccitazione anomala di alcuni livelli già osservato nella cromosfera. Infatti accanto al gruppo di livelli di bassa eccitazione del MgI, BaII, SrII e Ca II il cui potenziale va da 5 a 9 volt abbiamo il gruppo di elementi Sc II, OI e Ti II con potenziali di eccitazione fra 10 e 11 volt già superiori al potenziale medio di eccitazione del Sole. Si passa poi all'ultimo gruppo di elementi H con 13.50 volt, He I con 22.97 e He II con 75.64 volt dai quali appare chiaramente come l'eccitazione di questi livelli non possa avvenire per via termica ma con altro meccanismo. Anche da questo esame qualitativo rimane confermato che le condizioni di equilibrio delle protuberanze si scostano notevolmente dall'equilibrio termodinamico che esiste invece negli strati bassi dell'atmosfera solare.

Confrontando la tabella II con l'analoga tabella data dal Grotrian per la già citata protuberanza eruttiva si nota che nei nostri spettri mancano le righe deboli osservate dal Grotrian. In particolare sono completamente assenti le righe del Fe I e del Ca I. Questi fatti sembrano indicare che dal punto di vista spettroscopico non vi sono differenze sensibili fra protuberanze quiescenti ed eruttive e che in queste ultime le righe deboli degli elementi neutri vengono intensificate. Ulteriori conclusioni si potranno trarre dallo studio fotometrico degli spettri che è attualmente in corso.

Fisica. — *Propagazione di ultrasuoni in sistemi di liquidi parzialmente miscibili*^(*). Nota di STEFANO PETRALIA e MAX CEVOLANI, presentata^(**) dal Corrisp. GIORGIO VALLE.

INTRODUZIONE. — È noto che esistono coppie di liquidi i quali mostrano una lacuna di miscibilità: posti a contatto essi si dividono in due fasi, la cui composizione varia col variare della temperatura e diviene uguale per una temperatura, detta temperatura critica di soluzione. La superficie di separazione allora scompare e la massa totale appare costituita da un'unica fase omogenea. Molte proprietà fisiche sono state studiate per tali sistemi liquidi e si è trovato che ad esempio la loro viscosità⁽¹⁾, la birifrangenza dinamica⁽²⁾, l'opalescenza e la diffusione di luce^(3,4), subiscono incrementi notevoli in vicinanza della temperatura critica di soluzione, quando i componenti si trovano in un certo rapporto, del resto variabile entro larghi limiti. Secondo R. L. Krishnan e J. Frenkel⁽⁵⁾, un siffatto comportamento è con molta probabilità legato alla formazione di aggregati molecolari dentro la massa. Questa rimarrebbe fortemente disomogenea, dal punto di vista molecolare, anche al disopra della temperatura critica di soluzione, per un intervallo di circa 25 °C. Le dimensioni degli aggregati, massime nelle condizioni di composizione e di temperatura critiche, andrebbero diminuendo col crescere della temperatura.

Noi ci siano proposti di studiare per due coppie di liquidi parzialmente miscibili, fenolo-acqua e anilina-cicloesano, come varia la velocità di propagazione e l'assorbimento di un fascio di ultrasuoni, in funzione della temperatura, in vicinanza dello stato critico di soluzione. Uno studio analogo è stato recentemente fatto da A. G. Chynoweth e W. G. Schneider⁽⁶⁾ per i sistemi anilina-esano e tetrametilammina-acqua.

TECNICA SPERIMENTALE. — Le misure sono state eseguite con un interferometro ultrasonoro per liquidi, di costruzione ormai classica. La sorgente sonora è una piastrina di quarzo oscillante sulla frequenza di 3000 kHz; essa trovasi in derivazione a un circuito LC, lievemente accoppiato al generatore di oscillazioni elettriche, che è del tipo Down. Le variazioni

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) W. OSTWALD e H. MALSS, « Koll. Zeits. », 63, 61 (1933).

(2) W. OSTWALD e H. ERBRING, « Koll. Zeits. », 64, 229 (1933).

(3) R. S. KRISHNAN, « Proc. Ind. Ac. Scien. », 2, 221 (1935).

(4) A. ROUSSET, « Ann. de Physique », 5, 1 (1936).

(5) J. FRENKEL, *Kinetic Theory of Liquids* (Oxford Press 1946).

(6) A. G. CHYNOWETH e W. G. SCHNEIDER, « Jour. Chem. Phys. », 19, 1566 (1951).

di carico acustico, che accompagnano gli spostamenti del riflettore nell'interferometro, sono rivelate mediante un voltmetro elettronico connesso alla sorgente. Poichè, come vedremo, attorno al punto critico variazioni molto piccole della temperatura hanno un effetto notevole sulla velocità e sull'assorbimento degli ultrasuoni, è stato necessario tenere l'interferometro in un termostato, nel quale la temperatura veniva regolata entro 0,01 °C. Per ciò abbiamo trovato molto conveniente un dispositivo di comando della corrente elettrica di riscaldamento a thyatron, secondo il circuito descritto da J. M. Sturtevant ⁽⁷⁾.

La determinazione della velocità, nota la frequenza della sorgente ultrasonora, è senz'altro immediata. Sulla possibilità di misurare il coefficiente di assorbimento nei liquidi, con un interferometro di usuali dimensioni, hanno largamente discusso J. C. Hubbard ⁽⁸⁾ e F. E. Fox ⁽⁹⁾. Il procedimento da questi Autori suggerito, dà ottimi risultati, però riesce alquanto laborioso. Abbiamo preferito perciò seguire una via più semplice, limitatamente alle misure fatte nell'intervallo di temperatura attorno al punto critico di soluzione, dove c'è da aspettarsi un elevato valore dell'assorbimento. Tale via è quella seguita da W. H. Pielemeier ⁽¹⁰⁾ e H. C. Hardy ⁽¹¹⁾ per le misure di assorbimento nei gas, e consiste nel determinare le variazioni di corrente anodica nel tubo del voltmetro, che hanno luogo al passaggio del riflettore da una posizione di risonanza alla posizione di antirisonanza successiva, e ciò in due regioni A e B dell'interferometro che distano per n lunghezze d'onda ultrasonore; dai valori ΔI_A e ΔI_B così determinati si ricava il coefficiente d'assorbimento dell'energia ultrasonora per lunghezza d'onda, μ , mediante l'espressione:

$$\mu = \frac{2,303 [\log \Delta I_A - \log \Delta I_B]}{n}.$$

RISULTATI. — Poichè non esistono misure di velocità sonora nel fenolo fuso, abbiamo cominciato col determinare la velocità in questa sostanza a diverse temperature, al disopra della temperatura di fusione. La tabella I dà alcuni valori della velocità, che sono serviti per costruire la curva di fig. 1. Quest'ultima ha l'andamento lineare ben noto della velocità in funzione della temperatura, che si ha per la maggior parte dei liquidi; il coefficiente medio di temperatura della velocità, $\Delta V/\Delta t$, negativo, risulta, per il fenolo liquido, uguale a $-3,0$ m/s. grad. Essendo per il fenolo a 60,7 °C la densità $= 1,0399$, si calcola per la compressibilità adiabatica $\beta_{ad} = 49,7 \cdot 10^{-12}$ cm.²/dine.

(7) J. M. STURTEVANT, « Rev. Sci. Instr. », 9, 276 (1938).

(8) J. C. HUBBARD, « Phys. Rev. », 35, 1442 (1930); 38, 1011 (1931); 41, 523 (1932).

(9) F. E. FOX, « Phys. Rev. », 52, 973 (1937).

(10) W. H. PIELEMEIER, « Phys. Rev. », 34, 1184 (1929); 41, 833 (1932).

(11) H. C. HARDY, « Jour. Acoust. Soc. Amer. », 15, 91 (1943).

TABELLA I.

Temperatura °C	V (m/s)
46	1433,3
60,7	1390,3
70	1362,2
79,7	1332,1

I risultati delle misure di velocità per i sistemi fenolo-acqua, anilina-cicloesano, sono raccolti nelle tabelle II e III e nelle curve di fig. 2 e fig. 3. Per il primo sistema, essendo la superficie di separazione dei due liquidi molto vicina alla sorgente, in una ragione non raggiungibile dal riflettore, non si sono potute fare determinazioni di velocità nel fenolo; la curva *b* di fig. 2 si riferisce all'acqua, man mano che questa coll'aumentare della temperatura si arricchisce di fenolo. È notevole la caduta brusca della velocità nel punto critico, che per noi risulta a 66 °C, la composizione ini-

ziale della miscela essendo di 34 % in peso di fenolo e 66 % di acqua. La curva *a* di fig. 2 è stata ottenuta con misure fatte nella medesima miscela, senza agitare la massa, mentre la temperatura cresceva lentamente per un periodo di nove ore. Pur avendo superato di varigradi la temperatura di soluzione, la diffusione spontanea è tanto lenta da non alterare sensibilmente la composizione della fase superiore del sistema; l'andamento della velocità con la temperatura è quasi identico a quello

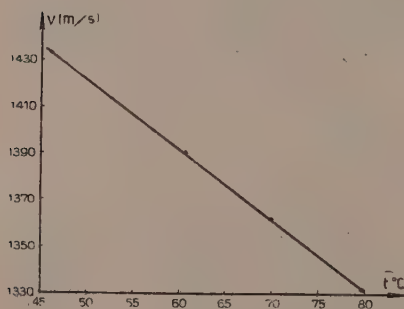


Fig. 1

mostrato dall'acqua pura in un intervallo attorno ai 60-70 °C. In tale intervallo, come è noto, la velocità degli ultrasuoni nell'acqua raggiunge un massimo, molto largo.

I punti della curva *b* sono stati perciò ottenuti agitando, ad ogni temperatura, la massa per qualche tempo e facendo poi riposare per un'ora prima di iniziare la misura.

Lo stesso procedimento è stato adottato per ottenere i punti della curva di fig. 3, relativa al sistema anilina-cicloesano. In tal caso però è stato possibile fare le misure sia nell'anilina (branca superiore della curva) che nel cicloesano (branca inferiore della curva); spostando il riflettore al di sotto

o al di sopra dell'interfacie, si hanno picchi di reazione acustica corrispondenti alla formazione di onde stazionarie, con lunghezze d'onda caratteristiche per i due liquidi. Al punto critico di soluzione, situato a $34,4^{\circ}\text{C}$ per una miscela contenente 51 % in peso di anilina e 49 % di cicloesano, si ha un brusco passaggio della velocità a un valore intermedio, che è quello dell'unica fase omogenea risultante. Al crescere ulteriore della temperatura la velocità in tale fase diminuisce linearmente ed il $\Delta V/\Delta t$ medio risulta uguale a $-3,4$ m/s. grad., inferiore a quello caratteristico per i due liquidi ($-4,6$ m/s. grad. per l'anilina e $-4,0$ m/s. grad. per il cicloesano). Lungo questo tratto di curva, come in

quello relativo alla fase omogenea fenolo-acqua, per l'intervallo di temperatura da noi esaminato, niente fa pensare a un lungo persistere di una struttura disomogenea, alla scala molecolare, nei due sistemi. Nel sistema anilina-cicloesano si può notare una lieve crescita del valore assoluto del coefficiente di temperatura della velocità, al crescere della temperatura.

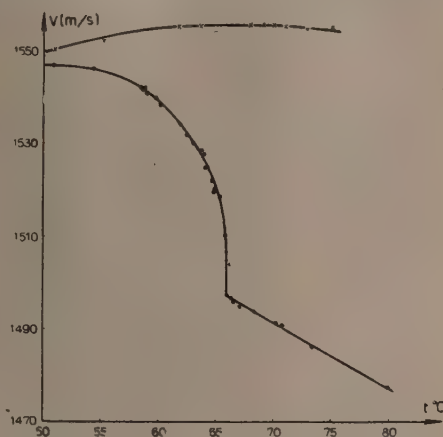


Fig. 2.

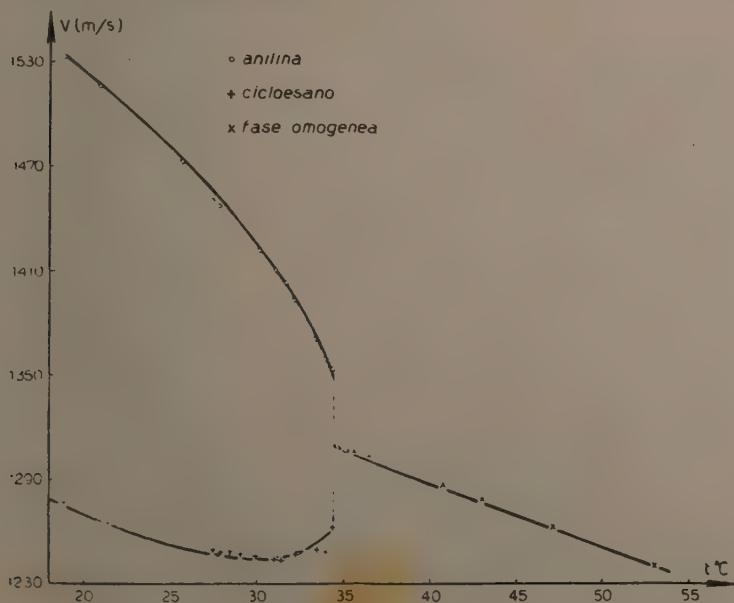


Fig. 3.

TABELLA II

Temperatura °C	V (m/s)	Temperatura °C	V (m/s)
50,8	1546,7	64,6	1522,0
54,3	1546,0	64,8	1519,4
58,4	1541,9	64,9	1520,2
58,6	1541,6	65,3	1518,8
58,8	1542,3	65,8	1510,0
58,9	1540,5	66,0	1497,0
59,7	1539,8	66,3	1496,5
60,1	1538,3	66,5	1495,7
61,8	1534,0	67,0	1494,6
62,4	1531,7	68,3	1493,5
63,0	1530,0	70,2	1491,2
63,7	1528,5	70,8	1490,9
63,9	1525,3	73,3	1486,3
64,0	1524,7	79,9	1477,5

Osserviamo che le temperature, alle quali secondo le nostre misure avviene il mescolamento nei due sistemi, sono alquanto diverse da quelle che si trovano nella letteratura (69 °C, secondo Krishnan, per il sistema fenolo-acqua, 28,9 °C per il sistema anilina-cicloesano secondo Rousset). Ciò può essere dovuto o a impurità eventualmente presenti nelle nostre sostanze, o anche al fatto che, estendendosi le misure per varie ore, la composizione della miscela può venire a cambiare col tempo, per evaporazione.

La determinazione del coefficiente di assorbimento ha presentato qualche difficoltà. Per il sistema fenolo-acqua, risultando il coefficiente d'assorbimento per lunghezza d'onda nell'acqua, unico liquido per il quale si potevano condurre le misure, piuttosto piccolo, le determinazioni hanno fornito valori affetti da notevoli errori e, solo in maniera qualitativa, si è potuto accertare che al punto critico si ha un aumento nell'assorbimento. Dati più precisi si sono ottenuti per il sistema anilina-cicloesano. I punti segnati in fig. 4 e il tratto di curva che ivi compare, danno il coefficiente d'assorbimento μ per l'anilina, per il cicloesano e per la fase risultante oltre il punto critico di soluzione; la tabella IV registra i valori corrispondenti. Si vede chiaramente che i valori di μ crescono per le due sostanze in modo cospicuo all'avvicinarsi al punto critico; la fase omogenea in quel punto ha un assor-

bimento che è circa nove volte superiore al valore che le compete a temperatura elevata.

TABELLA III.

Temperatura °C	V (m/s) anilina	V (m/s) cicloesano	Temperatura °C	V (m/s) fase omogenea
18,8	1533,2	1276,5	34,5	1308,5
20,9	1515,9	1271,0	34,7	1307,2
21,3		1264,1	35,2	1305,8
22,3	1511,7		35,6	1306,2
23,1		1261,3	36,4	1303,0
25,5	1472,3	1258,4	40,7	1286,8
27,4	1449,8	1249,7	43,0	1278,6
27,8	1447,7	1248,0	47,1	1262,2
28,5		1248,5	53,0	1238,4
28,9	1428,4			
29,0		1246,2		
30	1421,2	1244,9		
31	1410,1	1242,8		
31,4		1242,7		
31,6	1402,5			
32,2	1393,0	1246,7		
32,5		1247,7		
33,4	1370,5	1248,8		
34	1359,0	1248,0		
34,4	1353,0	1262,0		

Incrementi nel coefficiente d'assorbimento circa dello stesso ordine trovano Chynoweth e Schneider per un sistema analogo al nostro (anilina-esano). I valori di μ determinati da questi Autori per la loro miscela, sembrano superiori a quelli da noi ottenuti per un fattore sei circa. Non ci sono note misure d'assorbimento ultrasonoro nell'anilina; per il cicloesano esistono determinazioni fatte da P. Bazulin ⁽¹²⁾, dalle quali si può ricavare per μ

(12) P. BAZULIN, «Zurnal Eksper. i teoret. Fiziki URSS», 8, 457 (1938).

alla frequenza di 3000 kHz il valore $\mu = 0,00072$; da determinazioni più recenti di G. W. Hazzard ⁽¹³⁾ si ricava alla stessa frequenza, $\mu = 0,0012$. Noi troviamo per il cicloesano alquanto impuro di anilina un valore di μ un po' maggiore, $\mu = 0,0028$. Questo confronto può essere un indizio della bontà del metodo di misura da noi adottato.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. - Come osservano Chynoweth e Schneider, l'elevato assorbimento, che le miscele in esame mostrano nella regione critica di soluzione, può attribuirsi o a un processo di rilassamento connesso colle perturbazioni indotte dall'onda ultrasonora negli aggregati molecolari che, come sopra abbiamo notato, devono formarsi in vicinanza del punto

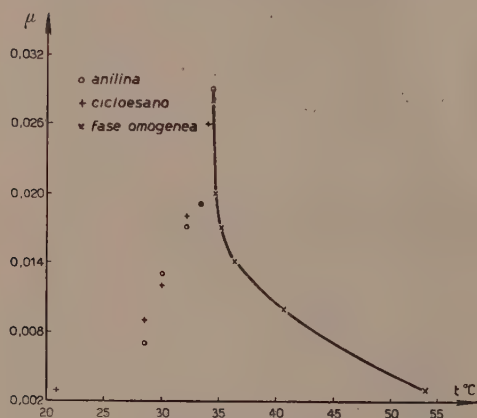


Fig. 4

critico di soluzione, oppure a un processo di diffusione dell'onda stessa in tali aggregati. Le dimensioni di questi devono, secondo Krishnan, aggirarsi attorno a 10^{-3} mm o meno, in altri termini devono essere dell'ordine della lunghezza d'onda della luce visibile, quindi piuttosto piccole rispetto alla lunghezza delle onde ultrasonore. Come è noto, la seconda ipotesi è stata sostenuta da R. Lucas ⁽¹⁴⁾, per spiegare l'elevato assorbimento che i liquidi ordinari mostrano rispetto al valore previsto classicamente. Egli ha per primo constatato, in modo qualitativo, l'assorbimento rilevante degli ultrasuoni nel sistema di due liquidi non miscibili, nitrobenzolo-esano, in vicinanza della loro temperatura critica di soluzione. Esperienze recenti di M. M. Pinkerton ⁽¹⁵⁾, in liquidi contenenti particelle in sospensione, non hanno dimostrato l'esistenza di una diffusione dell'energia ultrasonora da parte dei minuscoli ostacoli. Notiamo tuttavia che G. K. Hartmann e A. W. Focke ⁽¹⁶⁾ e R. J. Urick ⁽¹⁷⁾ hanno trovato un notevole assorbimento degli ultrasuoni in sospensioni acquose di spore di lycopodio e di particelle di caolino, del diametro variabile tra $0,2 \cdot 10^{-3}$ mm. e $30 \cdot 10^{-3}$ mm. La teoria dell'assorbimento del suono in tali sospensioni, fatta ammettendo certe restrizioni da

(13) G. W. HAZZARD, « Jour. Acoust. Soc. Amer. », 22, 29 (1950).

(14) R. LUCAS, « Jour. Phys. », 8, 41 (1937).

(15) M. M. PINKERTON, « Nature », 160, 913 (1947).

(16) G. K. HARTMANN e A. W. FOCKE, « Phys. Rev. », 57, 221 (1940).

(17) R. J. URICK, « Jour. Acoust. Soc. Amer. », 20, 225 e 283 (1948).

C. J. T. Sewell ⁽¹⁸⁾, porta alla seguente espressione per il coefficiente d'assorbimento α dell'energia ultrasonora:

$$\alpha = n\pi a^2 \left[3\sqrt{2} \cdot \frac{(\eta\omega)^{3/2}}{V} + \frac{6\eta}{Va} + \frac{7}{9} \left(\frac{\omega a}{V} \right)^4 \right]$$

dove n è il numero di ostacoli per unità di volume, a raggio dell'ostacolo supposto sferico, η viscosità cinematica, V velocità del suono e ω la pulsazione. Il terzo termine, che rappresenta l'assorbimento per diffusione dell'energia ultrasonora nelle particelle, equivale a un coefficiente d'assorbimento per lunghezza d'onda inversamente proporzionale alla terza potenza della lunghezza d'onda ultrasonora. Ora, per quanto nelle determinazioni nostre e di Chynoweth e Schneider gli errori sperimentali siano piuttosto notevoli, pure le nostre misure, fatte a una frequenza cinque volte superiore a quella usata dai suddetti Autori, su due coppie di liquidi quasi analoghe, avrebbero dovuto dare un coefficiente d'assorbimento un centinaio di volte superiore ai valori da loro riportati, il che non è. Inoltre l'entità di un assorbimento causato dalla diffusione diminuisce notevolmente col diminuire delle dimensioni delle particelle. Il primo termine di α si riferisce alla dissipazione di energia ultrasonora per effetto della turbolenza nelle immediate vicinanze delle particelle sospese; il corrispondente coefficiente d'assorbimento per lunghezza d'onda risulta inversamente proporzionale alla radice quadrata della frequenza ultrasonora. La sua considerazione nel caso in esame potrebbe avere una certa importanza; tale termine viene a dipendere dalla radice quadrata della viscosità. Dalla viscosità dipende anche il secondo termine di α . Abbiamo già osservato che questa grandezza cresce rapidamente al punto critico di soluzione. Il coefficiente μ relativo a questo termine risulta inversamente proporzionale alla frequenza. Si può allora pensare che l'elevato assorbimento constatato da Lucas, da Chynoweth e Schneider e da noi, nei sistemi di liquidi parzialmente miscibili, sia dovuto a un fenomeno di rilassamento che accompagna le variazioni nella distribuzione degli aggregati molecolari all'interno della massa liquida.

Può ancora intervenire un rilassamento inerente ad alterazioni della configurazione strutturale degli aggregati. In generale nei liquidi puri, ove i processi di rilassamento possono essere di origine intramolecolare o intermolecolare, i tempi di rilassamento ultrasonoro risultano inferiori a 10^{-8} s. Nel caso specifico però, trattandosi di aggregati di dimensioni rilevanti rispetto alle dimensioni molecolari ordinarie, il tempo di rilassamento può essere lungo e quindi la frequenza di assorbimento ultrasonora bassa, tanto da cadere entro gli estremi di frequenza, per i quali sono state fatte le misure da Chynoweth e Schneider e da noi (600 kHz e 3000 kHz). Per decidere sulle varie possibilità, assorbimento per effetto di turbolenza e viscosità e assorbimento per alterazioni strutturali, occorrerà fare ulteriori misure a frequenze diverse.

Le misure di velocità che abbiamo eseguito sulle miscele sopradette, mostrano come con un interferometro ultrasonoro si possano seguire, con precisione, i processi lenti di diffusione di un liquido in un altro, e anche lo svolgersi lento di alcune reazioni chimiche, come tante che hanno luogo nella Chimica organica. Di recente M. Kannuna ⁽¹⁹⁾ ha esposto un procedimento per la misura dei coefficienti di diffusione di liquidi, basato su osservazioni ottiche del reticolo ultrasonoro. Noi abbiamo iniziato lo studio di casi semplici di reazioni lente, quali l'inversione del saccarosio e la saponificazione degli esteri. Su tali ricerche speriamo di riferire tra breve.

TABELLA IV.

Temperatura O °C	μ anilina	μ cicloesano	μ fase omogenea
20,9		0,0028	
28,5	0,007	0,009	
30	0,03	0,012	
32,2	0,017	0,018	
33,4	0,019	0,019	
34		0,026	
34,4	0,029		
34,5			0,028
34,7			0,020
35,2			0,017
36,4			0,014
40,7			0,010
53			0,003

Concludendo si è misurata la velocità di propagazione e l'assorbimento di ultrasuoni nei sistemi di liquidi parzialmente miscibili fenolo-acqua e anilina-cicloesano, a diverse temperature. La velocità subisce una variazione brusca in vicinanza del punto critico di soluzione, e in questa regione l'assorbimento cresce notevolmente.

Gli Autori desiderano ringraziare il professore G. Valle per i mezzi messi a disposizione e per i consigli ricevuti. M. C. ringrazia anche per il conferimento di una borsa di studio, che gli ha permesso la permanenza nell'Istituto di Fisica di Bologna.

(19) M. KANNUNA, « *Helv. Phys. Acta* », **21**, 93 (1948).

Fisica matematica. — *Sulla propagazione del fronte d'onda nei mezzi dispersivi.* Nota di MARZIANO MARZIANI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

Chiameremo fronte di un'onda elettromagnetica che si propaga in una regione dello spazio, in cui il campo era inizialmente nullo, la superficie che all'istante considerato, divide quella regione in due parti; una dove il campo è ancora identicamente nullo, l'altra dove il campo è (almeno nelle vicinanze della superficie) diverso da zero. Considerando onde piane in un mezzo omogeneo e dispersivo, Sommerfeld ⁽¹⁾ e Brillouin ⁽²⁾, applicando l'integrale di Fourier, hanno dimostrato che il fronte d'onda si propaga con la velocità di fase dell'onda di frequenza infinita.

Allo stesso risultato e per via molto più semplice, come indicò il Levi-Civita al Sommerfeld, si può giungere mediante il metodo delle caratteristiche, nel quale, però, si considera il fronte d'onda come una superficie di discontinuità per il campo elettromagnetico o per le sue derivate di un certo ordine. Ora vi sono esempi in cui questa proprietà non è verificata. Si consideri infatti un campo elettromagnetico piano che, come faremo sempre nel seguito, si propaga nella direzione dell'asse z , e che rappresenteremo mediante le intensità $E(z, t)$, $H(z, t)$ del campo elettrico e del campo magnetico; in quanto non è affatto restrittivo supporre questi vettori sempre con direzione invariabile e tali da formare un triedro destro assieme alla direzione di propagazione. Allora se il campo è identicamente nullo all'istante iniziale per ogni z positiva e il mezzo in cui si propaga è dielettrico non dispersivo, di costante dielettrica ϵ e permeabilità μ , ed $E(0, t)$ vale 0 per $t \leq 0$, Me^{-a^2/t^2} per $t > 0$ (M, a costanti) si ha com'è ben noto per $0 < z < ct$, (con $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$) ⁽³⁾

$$E(z, t) = M \cdot \exp \left[-\frac{a^2}{(t - z/c)^2} \right] \quad H(z, t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E(z, t)$$

e per $z > ct$

$$E(z, t) = H(z, t) = 0.$$

Il piano $z = ct$ è il fronte d'onda, però su esso le derivate di qualunque ordine del campo sono continue ⁽⁴⁾.

Perciò in questa Nota riprenderò il problema della propagazione del fronte d'onda facendo uso della trasformata di Laplace. Mi limiterò al caso

(*) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) SOMMERFELD, *Ueber die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien.* « Annalen der Physik », Band 44, pp. 177, 202 (1914).

(2) BRILLOUIN, *Ueber die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien.* « Annalen der Physik », Band 44, pp. 203-240 (1914).

(3) In luogo di e^w scriveremo talvolta $\exp(w)$.

(4) Del resto l'applicazione del metodo delle caratteristiche, richiederebbe certe condizioni di analiticità per $E(0, t)$, talvolta molto restrittive.

di onde piane in un mezzo omogeneo, riservandomi eventualmente di tornare in altro lavoro sul caso del mezzo eterogeneo. Supporrò la legge della dispersione molto più generale di quella usata da Sommerfeld e Brillouin, inoltre $E(0, t)$ nullo per $t \leq 0$, ma variabile con legge qualunque (purché continua o al più continua a tratti) per $t \geq 0$, mentre gli autori sopra citati si limitano al caso $E(0, t)$ sinusoidale per t positivo. Ritroverò ovviamente la formula di Sommerfeld e Brillouin per la velocità del fronte d'onda, ma la mia dimostrazione, che ha il suo fondamento in una forma molto espressiva che troverò per $E(z, t)$ e $H(z, t)$, è forse più completa perchè non mi limiterò solo a provare che oltre il piano considerato come fronte d'onda il campo è nullo (risultato questo facilmente comprensibile se ci si appoggia alla teoria corpuscolare della propagazione), ma stabilirò in modo sicuro che il limite superiore dei valori di z dove il campo è diverso da zero, si trova proprio sul piano in discorso, conforme appunto alla definizione di fronte d'onda.

2. Rappresentiamo, secondo un'idea esposta per la prima volta dal Cisotti⁽⁵⁾, un mezzo dispersivo come un mezzo ereditario. Ammettiamo cioè, indicato con t il tempo, che le relazioni tra vettore spostamento $\mathbf{D}(t)$ e campo elettrico $\mathbf{E}(t)$, tra vettore densità di corrente $\mathbf{u}(t)$ e campo elettrico supposto il campo nullo per $t \leq 0$ siano della forma

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon \mathbf{E}(t) + \int_0^t \varphi(t-\tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau \quad \mathbf{u}(t) = \sigma \mathbf{E}(t) + \int_0^t \psi(t-\tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau$$

dove ϵ e σ sono rispettivamente la costante dielettrica e la conduttività del mezzo, $\varphi(t-\tau)$ e $\psi(t-\tau)$ due funzioni continue di $t-\tau$, la prima delle quali dotata di derivata continua.

Allora le equazioni di Maxwell che reggono la propagazione delle onde elettromagnetiche piane nel mezzo dielettrico dispersivo, conforme le notazioni dell'introduzione, diventano:

$$(1) \quad \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} + \gamma \mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{G}(t-\tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0,$$

dove si è posto

$$\gamma = \varphi(0) + \sigma \quad \mathbf{G}(t-\tau) = \varphi'(t-\tau) + \psi(t-\tau).$$

Alle equazioni (1) e (2) associamo le seguenti condizioni iniziali e al contorno:

(5) U. CISOTTI, *L'ereditarietà lineare e i fenomeni dispersivi*. « Nuovo Cimento », ser. VI, vol. II, pp. 234-244 (1911); D. GRAFFI, *Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia*. « Rendiconti Istituto Lombardo », ser. II, vol. LXVIII, pp. 541-568 (1935-36); D. GRAFFI, *Il metodo ereditario per lo studio di alcuni fenomeni fisici*. « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e Politecnico di Torino », vol. X, pp. 51-66 (1950-51).

$$\begin{cases} E(z, 0) = H(z, 0) = 0 & \text{per } z > 0 \\ E(0, t) = E_0(t) \quad (E_0(t) = 0 \text{ per } t \leq 0), \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} E(z, t) = 0 & \text{per ogni } t > 0. \end{cases}$$

Poichè ammettiamo che la propagazione nel semispazio $z \geq 0$ incominci all'istante $t = 0$, dobbiamo supporre che lo zero sia l'estremo inferiore dei valori di t per cui è $E_0(t) \neq 0$. Infatti se tale estremo fosse $\alpha > 0$, la propagazione incomincerebbe per $t = \alpha$, poichè per $t < \alpha$ si avrebbe $E_0(t) \equiv 0$ e, come si vedrà meglio dalle formule che svilupperemo in seguito, $E(z, t)$ sarebbe nullo, per $t < \alpha$, per ogni $z > 0$. Poichè dalle teorie proposte per interpretare la propagazione nei mezzi dispersivi ⁽⁶⁾, si deduce che $G(t)$ è un esponenziale o una somma di esponenziali, noi faremo l'ipotesi, molto più generale che $G(t)$ sia una trascendente intera di tipo esponenziale ⁽⁷⁾.

Facciamo ora l'ipotesi, affatto restrittiva dal punto di vista fisico ⁽⁸⁾, che $E(z, t)$ e $H(z, t)$ assieme alle loro derivate prime temporali siano funzioni trasformabili secondo Laplace rispetto al tempo. Perciò, detto p un parametro complesso con parte reale positiva, indichiamo le trasformate secondo Laplace di $E(z, t)$ e $H(z, t)$ rispettivamente con $e(z, p)$ e $h(z, p)$. Avremo subito che le trasformate di $\partial E / \partial t$ e $\partial H / \partial t$ sono $pe(z, p)$ e $ph(z, p)$, denotiamo poi con $e_0(p)$ la trasformata di $E_0(t)$. Per le nostre ipotesi ⁽⁹⁾, la trasformata $g(p)$ della $G(t)$ sarà una funzione analitica regolare al di fuori di un cerchio di raggio $\rho_r > \rho$ e nulla per $p \rightarrow \infty$.

Allora, scelta la parte reale di p superiore a ρ_r e sufficientemente grande in modo che le trasformate di $E(z, t)$, $H(z, t)$ e loro derivate convergano e valgano le relazioni sopra citate, applichiamo alle (1) e (2) la trasformazione di Laplace, tenendo conto delle condizioni iniziali e del teorema del prodotto integrale ⁽¹⁰⁾, qui applicabile in quanto la $G(t)$ per le ipotesi fatte, è assolutamente trasformabile secondo Laplace.

Otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} h(z, p) + (\varepsilon p + \gamma + g(p)) e(z, p) &= 0 \\ (3) \quad h(z, p) &= -\frac{1}{\mu p} \frac{d}{dz} e(z, p). \end{aligned}$$

(6) D. GRAFFI, *Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia*, già citata, p. 543.

(7) Secondo Pringsheim, una trascendente intera $G(t)$ si dice di tipo normale ρ del primo ordine (ρ costante positiva), od anche di tipo esponenziale, se comunque si fissa $\delta > 0$ per $|t|$ sufficientemente grande è $|G(t)| < e^{(\rho + \delta)|t|}$. Si veda ad esempio G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. «Dover Publications», p. 61 (1943).

Questa ipotesi è certamente soddisfatta se $G(t)$ è un polinomio o una somma di esponenziali. Anzi è da notare che nelle nostre considerazioni t si può sempre supporre minore di un numero T arbitrariamente grande, sicchè occorre conoscere il valore di $G(t - \tau)$ nell'intervallo $(0, T)$. In questo intervallo, per un noto teorema di Weierstrass, la $G(t)$ può anche rappresentarsi, con qualunque approssimazione, mediante un polinomio.

(8) Per questa ipotesi basta che $E(z, t)$ e $H(z, t)$ assieme alle loro derivate prime temporali e $E_0(t)$ per $t \rightarrow \infty$ siano d'ordine esponenziale.

(9) Cfr. G. DOETSCH, loc. cit., p. 61 e seguenti.

(10) L. AMERIO, *Alcuni complementi della teoria della trasformazione di Laplace*. «Rend. Accad. Naz. dei Lincei», ser. VI, vol. XXV, pp. 205-213 (1937).

Derivando la seconda equazione rispetto a z , e tenendo presente che nei casi concreti μ si può ritenere costante, si ricava, sostituendo nella prima equazione:

$$(4) \quad -\frac{d^2}{dz^2} e(z, p) - (\epsilon \mu p^2 + \mu \gamma p + \mu p g(p)) e(z, p) = 0.$$

Si avrà poi per le nostre ipotesi:

$$(5) \quad e(0, p) = e_0(p) \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} e(z, p) = 0.$$

Poichè d'ora in poi consideriamo il mezzo come omogeneo, $\epsilon, \mu, \gamma, g(p)$ saranno indipendenti da z .

La soluzione di (4) che soddisfa alle (5) vale, come si vede facilmente,

$$(6) \quad e(z, p) = e_0(p) \exp \left(-z p \sqrt{\epsilon \mu + \frac{\mu \gamma}{p} + \mu \frac{g(p)}{p}} \right)$$

avendo convenuto di prendere con parte reale positiva la radice che figura nell'esponenziale.

Dalla (3) si ricava poi facilmente $h(z, p)$ sulla quale si possono ripetere le considerazioni che ora faremo per $e(z, p)$.

Si ponga ora

$$f(p) = \frac{p}{c} \left[1 + \frac{b}{p} - \sqrt{1 + \frac{2b}{p} + \frac{g(p)}{\epsilon p}} \right]$$

con

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (11) \quad b = \frac{\gamma}{2\epsilon}.$$

Poichè in un intorno dell'infinito il radicale rappresenta una funzione analitica regolare e vale $1 + b/p$ sommato con una serie in $1/p^2$ e potenze superiori, si ha $f(p)$ analitica regolare in un intorno dell'infinito e nulla all'infinito.

Quindi dopo facili passaggi

$$(7) \quad e(z, p) = e_0(p) e^{-\frac{\pi}{c} p} \cdot e^{-\frac{b}{c} \pi} + e^{-\frac{b}{c} \pi} \cdot e^{-\frac{\pi}{c} p} \cdot e_0(p) [e^{z/c} - 1].$$

Allora, per quanto si è detto, il termine entro parentesi è regolare e nullo all'infinito, perciò ⁽¹²⁾, conforme alla denominazione usata a proposito della trasformazione di Laplace, antitrasformabile e l'antitrasformata è una funzione continua di z e t che indicheremo con $\Psi(z, t)$. Allora antitrasformando la (7) avremo

$$(8) \quad E(z, t) = e^{-\frac{b}{c} \pi} E_0\left(t - \frac{z}{c}\right) + e^{-\frac{b}{c} \pi} \int_0^{t-z/c} E_0(\tau) \Psi\left(z, t - \frac{z}{c} - \tau\right) d\tau.$$

(11) Si noti che la velocità di fase di un'onda piana di frequenza ω è l'inverso della parte reale del radicale che figura nell'esponenziale in cui in luogo di p si ponga $i\omega$; per $\omega \rightarrow \infty$ tale velocità tende a c conforme l'introduzione.

(12) Cfr. G. DOETSCH, loc. cit., pp. 62-65.

Naturalmente per $t - z/c < 0$ l'integrale ora scritto deve ritenersi nullo. È questa la forma espressiva di $E(z, t)$ (una analoga vale per $H(z, t)$) cui si è già accennato.

3. Facciamo ora vedere che il fronte d'onda elettromagnetica si propaga lungo l'asse z con velocità $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, come se il mezzo non fosse dispersivo, cioè dimostriamo che il piano $z = ct$ separa la regione in cui E e H sono identicamente nulle dalla regione in cui queste grandezze sono diverse da zero. Per provare ciò riferiamoci ad E , poichè analoghe considerazioni potrebbero farsi per H .

Intanto per $z > ct$ $E(z, t)$ si annulla, poichè, come si è già osservato, è nullo l'ultimo termine della (8), e inoltre è uguale a zero anche il primo, poichè, per ipotesi, $E_0(t)$ è nullo per valori negativi della variabile.

Resta da provare che, fissato t , si può trovare un valore di z , inferiore, ma prossimo quanto si vuole a ct , per cui $E(z, t)$ è diverso da zero, cioè ct è l'estremo superiore dei valori di z per cui non si annulla E .

A questo scopo, detto α_0 un numero positivo, arbitrario ed abbastanza piccolo in modo che nell'intervallo chiuso $(0, \alpha)$ $E_0(t)$ sia continua, si consideri un numero positivo $\alpha < \alpha_0$ e si prenda z in modo che

$$(9) \quad 0 < t - \frac{z}{c} < \alpha.$$

Sia ora E_{om} il valore massimo di $|E_0(\tau)|$ per τ variabile in $(0, \alpha)$, valore non nullo per ipotesi. Sia τ' il valore di τ in $(0, \alpha)$ in cui $|E_0(\tau)|$ raggiunge il valore massimo. Allora detto M il massimo di $|\Psi(z, \xi)|$ per $0 < \xi < t - z/c$ con $0 < z < ct$ si ha per ogni z soddisfacente la (9)

$$\left| \int_0^{t-z/c} E_0(\tau) \Psi\left(z, t - \frac{z}{c} - \tau\right) d\tau \right| \leq \left(t - \frac{z}{c}\right) M E_{om} < M \alpha E_{om} < M \alpha_0 E_{om}.$$

Quindi detto z' il valore di z soddisfacente la (9) tale che

$$\tau' = t - \frac{z'}{c}$$

si ha

$$|E(z', t)| = e^{-\frac{b}{c} z'} \left| E_{om} \pm \int_0^{t-z'/c} E_0(\tau) \Psi\left(z', t - \frac{z'}{c} - \tau\right) d\tau \right|.$$

Ma l'integrale ora scritto è in valore assoluto minore di $M \alpha_0 E_{om}$, e preso α_0 sufficientemente piccolo risulta in modulo minore di E_{om} . $E(z', t)$ è perciò diversa da zero.

In altre parole preso un numero positivo arbitrario $\alpha < \alpha_0$ esiste sempre un valore $z' > ct - c\alpha$ per cui $E(z', t)$ è diverso da zero. Rimane così provato che ct è l'estremo superiore dei valori di z in cui il campo è diverso da zero, cioè $z = ct$ è il fronte d'onda che si propaga appunto con velocità c .

Chimica. — *Riduzione polarografica del trifenilclorometano.*

Nota di PIETRO LANZA e LUCIANA GRIGGIO, presentata (*) dal Corrisp. G. SEMERANO.

Questa sostanza compare per la prima ed unica volta nella bibliografia polarografica con la pubblicazione di H. Heller, M. Hochweber e H. v. Halban (1), in cui viene riferito sui risultati dello studio di una serie di alogenoderivati aromatici analoghi al D.D.T.

Secondo gli Autori una soluzione di trifenilclorometano di concentrazione $1 \cdot 10^{-3}$ M in alcol etilico al 90 % e $(\text{CH}_3)_4\text{N Br}$ 0,01 M, esaminata polarograficamente, mostra un gradino di riduzione a $-1,25$ V (E.C.N.) che viene attribuito alla riduzione dell'alogenoderivato.

Nella Memoria non si fanno ipotesi circa il meccanismo della riduzione all'elettrodo affermandosi giustamente che a tal fine sarebbe necessario identificare i prodotti della riduzione.

L'interesse che presenta il trifenilclorometano, specialmente ai fini di studiare la formazione e il comportamento dei radicali liberi alle interfasi elettrodiche, ci ha spinto ad esaminare più a fondo le modalità della riduzione polarografica di questa sostanza tenendo ben presente la sua estrema idrolizzabilità la quale non permette di comprendere come possa restare inalterato il legame C—Cl nell'ambiente usato dagli Autori citati.

Anche in alcol, infatti, la sostanza subisce alcolisi ed è noto che in alcol anidro la velocità di tale reazione è paragonabile alla stessa velocità di soluzione del composto (2).

La riduzione polarografica del trifenilclorometano può essere studiata, quindi, soltanto in ambienti non idrolizzanti.

Abbiamo cercato in questo nostro lavoro di portare un contributo allo studio di questa interessante sostanza esaminandone il comportamento polarografico in vari ambienti anidri, prendendo in particolare considerazione l'acetone, l'acido acetico e l'alcol etilico saturo di HCl.

Lo studio ha presentato qualche difficoltà sperimentale data la ben nota capacità della sostanza esaminata di reagire col mercurio (3) e data la limitata libertà di scelta della soluzione base adeguata all'elettrolisi polarografica.

PARTE SPERIMENTALE.

Acido acetico. — L'acido acetico glaciale puro è stato fatto bollire a ricadere su KMnO_4 per quattro ore e distillato dopo averlo lasciato per.

(*) Nella seduta del 10 maggio 1952.

(1) H. KELLER, M. HOCHWEBER e H. v. HALBAN, «Helv. Chim. Acta», 299, 761 (1946).

(2) A. C. NIXON, G. E. K. BRANCH, «J. Am. Chem. Soc.», 58, 492 (1936).

(3) M. GOMBERG, «Ber.», 33, 3150 (1900).

qualche tempo a ricadere con il 10 % di anidride acetica; è stata usata la frazione passante a 118°.

Anidride acetica. — L'anidride acetica è stata purificata mettendola a ricadere per qualche ora su sodio metallico a pressione ridotta e infine distillandola e conservandola su sodio metallico in fili.

Acetone. — L'acetone Merck purissimo è stato ulteriormente trattato con KMnO_4 per qualche ora. Il distillato è stato tenuto a lungo su CaCl_2 anidro purissimo, frazionato e conservato su CaCl_2 anidro.

Soluzione alcolica di HCl. — L'alcol etilico, di purezza adeguata agli scopi polarografici, è stato trattato con acido cloridrico gassoso secco fino a saturazione.

Cloruro di litio anidro. — Il cloruro di litio anidro è stato gentilmente fornito dal prof. L. Riccoboni, che lo aveva ottenuto secondo il metodo da lui pubblicato ⁽⁴⁾.

Trifenilclorometano. — È stato ottenuto dal trifenilcarbinolo, sciolto in benzolo anidro, per azione dell'acido cloridrico gassoso in presenza di CaCl_2 . La soluzione, satura di HCl e decolorata con carbone attivo, è stata concentrata a bagno maria e trattata con etere di petrolio. Si ottiene così la sostanza allo stato cristallino, p. f. 107°–111°.

ESAME IN AMBIENTE ACETICO. — L'acido acetico glaciale, date le sue buone proprietà solventi e il valore della sua costante dielettrica ($D = 6,25$), che rende possibile una sufficiente dissociazione elettrolitica, ha trovato già qualche uso in polarografia.

Soluzioni base in acido acetico glaciale ($\approx 99\%$) contenente come elettroliti CH_3COONa , CH_3COOK o altri sali, sono state impiegate da G. B. Bachman e M. J. Astle ⁽⁵⁾ e hanno fornito gradini regolari di diffusione per Cd^{++} e Zn^{++} . Lo svantaggio principale delle soluzioni base di questo tipo è costituito dal limitato campo di potenziali disponibile (fino a $-1,4\text{ V}$) e dalla necessità di prolungare di molto il passaggio di gas inerti attraverso le soluzioni in esame per eliminare l'ossigeno, che dà in tale ambiente correnti molto elevate e perfino tali da mascherare del tutto i gradini delle sostanze aggiunte.

Acido acetico assolutamente anidro è stato usato da D. Mac Gillavry ⁽⁶⁾ il quale però non riuscì ad ottenere gradini definiti.

Per poterlo conservare più facilmente allo stato anidro, l'acido acetico, ottenuto come si è detto in precedenza, è stato addizionato di un eccesso di 5 % in volume di anidride acetica. Sciogliendo in tale mezzo LiCl , si ottengono buone curve basi, con minima corrente residua; il campo di potenziali utilizzabili si estende per 0,8 V.

(4) L. RICCOBONI, P. POPOFF, « Gazz. Chim. Ital. », 79, 573 (1949).

(5) G. B. BACHMAN, M. J. ASTLE, « J. Am. Chem. Soc. », 64, 1303 (1942); e ibidem, 64, 2177 (1942).

(6) D. MAC GILLAVRY, « Trans. Faraday Soc. », 32, 1447 (1936).

Si sono fatte esperienze anche con soluzioni base costituite da anidride acetica pura contenente LiCl. Anche tale solvente sarebbe adatto per polarografia data la capacità di sciogliere elettroliti e la sua costante dielettrica non troppo bassa ($D = 17,9$).

In questo ambiente si ottengono gradini di riduzione assai regolari, il polarogramma delle soluzioni base mostra però sempre un'apprezzabile corrente residua e risulta deformato da un massimo che si estende da zero a $-0,2$ V. Usando LiCl anidro come elettrolita, si ottiene un campo utilizzabile da $-0,2$ a $-1,0$ V (anodo interno di mercurio).

Per l'assoluta necessità di mantenere anidra la soluzione si è dovuto rinunciare a riferire i potenziali all'elettrodo a calomelano standard, e si è ricorso ad un anodo di Ag/AgCl. Si è evitato il più possibile l'uso dell'anodo interno di mercurio, non essendo tale metallo indifferente alla sostanza studiata.

Dato il solvente usato, non si è potuto ricorrere alle sostanze usualmente impiegate per proteggere la soluzione dal mercurio cadente al fondo della cella.

I diagrammi di taratura si sono ottenuti usando una cella, illustrata in fig. 1, che permetteva di ridurre al minimo la superficie di contatto del mercurio con la soluzione.

Il trifenilclorometano è stato dunque esaminato in una soluzione base di acido acetico anidro contenente il 5 % in volume di anidride acetica e LiCl alla concentrazione circa $0,2$ M. Alla soluzione base sono state fatte successive aggiunte di soluzione della sostanza $0,1$ M nello stesso solvente costituente la soluzione base.

Per allontanare l'ossigeno si è fatto passare attra-

verso le soluzioni, per 45-60 minuti, idrogeno elettrolitico, purificato su amianto palladiato, seccato attraverso CaCl_2 , H_2SO_4 ed infine saturato con la stessa soluzione base.

Il trifenilclorometano mostra un solo gradino di riduzione polarografica, con inizio a potenziale 0 (rif. ad un anodo interno di mercurio o di Ag/AgCl, di potenziale praticamente uguale). Se la concentrazione della sostanza non supera il valore di $3 \cdot 10^{-3}$ M il gradino appare assai regolare. Superata questa concentrazione, si nota la comparsa di un massimo appunto, con un aumento lineare di corrente da zero verso valori più negativi e brusca caduta della corrente al valore di i_d entro i primi $0,2$ V, se la concentrazione si mantiene al di sotto di $7-8 \cdot 10^{-3}$ M; per concentrazioni maggiori, la corrente del massimo procede linearmente estendendosi a valori

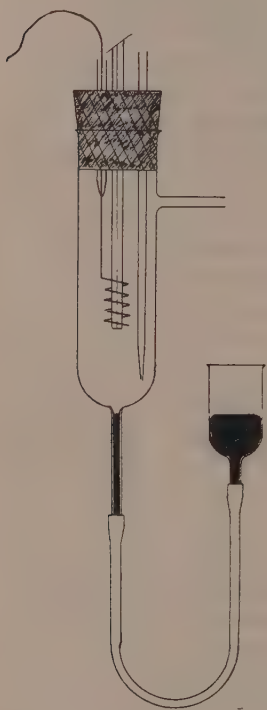


Fig. 1.

sempre più negativi e limita l'estensione della corrente di diffusione fino ad eliminarla del tutto, dato che si raggiunge il raccordo della corrente del massimo con quella dovuta alla scarica dell'idrogeno. Tale massimo non è eliminabile per aggiunta di tilosio sciolto in acido acetico anidro.

L'aumento della i_d con la concentrazione segue un andamento molto caratteristico e riproducibile come appare dalla figura (fig. 2). Il dia-

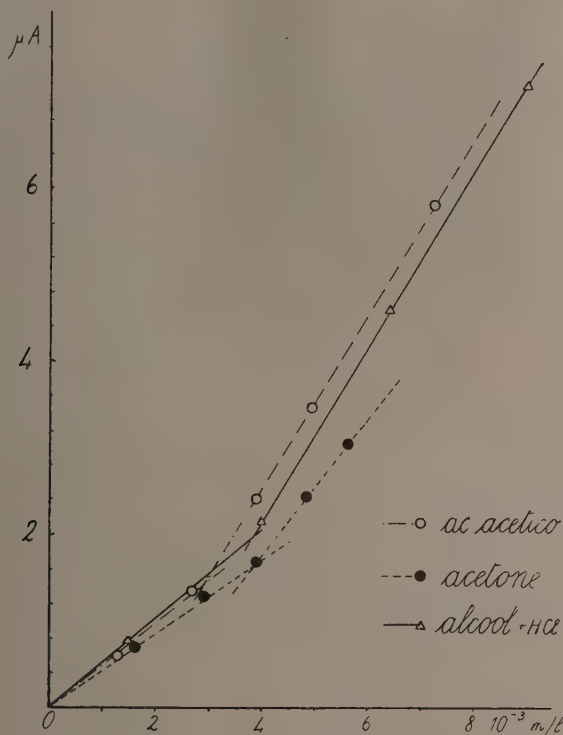


Fig. 2.

gramma è rappresentato da due rette che si tagliano a $c \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ M}$. Per $c < 3 \cdot 10^{-3} \text{ M}$, la retta i_d/c passa per l'origine degli assi e presenta una pendenza $di_d/dc = 4,85 \cdot 10^{-4}$; per $c > 3 \cdot 10^{-3}$ la pendenza del diagramma varia fino a raggiungere un valore, che, entro le incertezze sperimentali, risulta doppio.

La I dell'equazione di Ilković:

$$I = \frac{i_d}{cm^{2/3} \bar{t}^{1/6}} = \begin{cases} \text{per } c < 3 \cdot 10^{-3} & I = 2,9 \cdot 10^{-4} \\ \text{per } c > 3 \cdot 10^{-3} & I = 5,5 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

e assai piccola.

Questo fenomeno, presentato da tutti gli alogenoderivati, non ha ancora trovato una esauriente spiegazione ⁽⁷⁾.

La tabella seguente e il diagramma raccolgono i dati sperimentali.

TABELLA I.

Ambiente acetico.

Soluzione base: acido acetico glaciale + 5 % vol. anidride acetica.

$\text{LiCl} \approx 0,2\text{M}$; anodo Ag/AgCl

$m^{2/3} t^{1/6} = 1,70$ $T = 21^\circ\text{C}$

c (mM)	i_d (μA)	Osservazioni
1,32	0,598	curva regolare
2,73	1,38	curva regolare
3,92	2,42	comparsa del massimo
4,49	3,52	massimo
5,81	4,27	massimo
7,25	5,85	massimo

I valori di i_d sono stati misurati al potenziale $E = -0,2\text{ V}$ dalle posizioni dello « zero » del galvanometro.

Anche in questo ambiente si osserva una lenta decomposizione della sostanza.

i_d al gomito = $1,6\ \mu\text{A}$

c al gomito = ca. $3 \cdot 10^{-3}\text{ M}$.

ESAME IN AMBIENTE ACETONICO. - L'acetone puro anidro saturo di LiCl è pure un ambiente opportuno per lo studio polarografico del trifenilclorometano e presenta il vantaggio, nei confronti dell'acido acetico, di permettere un più esteso campo di potenziali utilizzabili. Con anodo interno di Ag/AgCl si osserva la scarica del Li a $-1,5\text{ V}$. In questo solvente però, specialmente a valori di concentrazione un po' elevati, intervengono assai facilmente irregolarità nel gocciolamento del mercurio.

Il quadro presentato dalla sostanza è perfettamente analogo a quello descritto per l'ambiente acetico. Va notato tuttavia la comparsa precoce del massimo, già a concentrazioni dell'ordine di $2,5 \cdot 10^{-3}\text{ M}$, e il suo sviluppo sempre più pronunciato che in acido acetico a pari contenuto di sostanza.

(7) V. STACKELBERG, M. STRAKE, « Z. Elektr. », 53, 118 (1949).

Il tilosio sciolto in acetone anidro, pur presentando qualche azione, non riesce a sopprimere il massimo:

I risultati sperimentali sono raccolti in tabella II e nel diagramma.

TABELLA II.

Ambiente acetone.

Soluzione base: acetone anidro, saturo di LiCl (ca. 0,5 M)

$m^{2/3} t^{1/6} = 1,256$ $T = 23^\circ$ anodo Ag/AgCl

c (mM)	i_d (μA)
1,62	0,765
2,98	1,290
3,94	1,65
4,82	2,45
5,56	3,05

Anche in acetone, come appare dal diagramma, si osserva un brusco cambiamento di pendenza:

$$\text{per } c < 4 \cdot 10^{-3} \quad \frac{di_d}{dc} = 4,29 \cdot 10^{-4} \quad i_d \text{ al gomito} = 1,60 \mu A$$

$$\text{per } c > 4 \cdot 10^{-3} \quad \frac{di_d}{dc} = 8,40 \cdot 10^{-4} \quad c \text{ al gomito} = 3,9 \cdot 10^{-3} M.$$

ESAME IN AMBIENTE ALCOLICO. — Benchè sia nota la forza azione solvolytica degli alcoli nei confronti del trifenilclorometano, si è voluto usare anche questo solvente in presenza di forti quantità di HCl. A tale scopo si è preparata la soluzione base saturando l'alcol puro a 96 % con HCl gassoso secco, in un apparecchio tutto in vetro, evitando ogni contatto delle sostanze con giunti di gomma. L'alcol così trattato presenta un potere solvente assai ridotto, in esso tuttavia la sostanza in esame si scioglie in quantità sufficiente con intensa colorazione gialla.

I polarogrammi ottenibili in questo ambiente sono regolari, esenti da massimo, con corrente di diffusione proporzionale alla concentrazione. Il diagramma di taratura i_d/c è rappresentato da due rette di pendenza diversa raccordate da un gomito; esso presenta così l'andamento caratteristico osservabile in acetone e in ambiente acetico (v. figura). In questo ambiente si ha una notevole corrente residua non eliminabile, riscontrabile in tutte le soluzioni contenenti quantità molto forti di HCl.

È interessante ricordare a questo proposito che lo stesso HCl concentrato puro ($D = 1,18$), normalmente usato, presenta all'analisi polarografica una corrente di circa $1 \mu A$, a potenziali vicini allo zero, corrente questa che non si può in alcun modo attribuire a tracce di Fe^{+++} o di Cl_2 , poichè scompare per una moderata diluizione e si nota anche in soluzioni preparate con HCl gassoso puro.

ESAME IN AMBIENTE IDRO-ALCOLICO. - Altre esperienze sono state effettuate riproducendo le condizioni sperimentali degli Autori citati per studiare la natura dei gradini da essi osservati. Si è esaminato il comportamento del trifenilclorometano nella seguente soluzione base: alcol 80 %, KCl 0,02 N. Risulta che il trifenilclorometano provoca la comparsa di gradini ben formati a concentrazioni basse ($10^{-4} M$), deformati da massimo a concentrazioni maggiori, ad un $E_{1/2}$ di ca. $-1,5 V$ (E. C. S.).

In ambiente alcalino non si hanno più gradini (NaOH 0,02 N); in ambiente acido (HCl 0,02 N), il gradino è coperto dalla scarica dell'idrogeno.

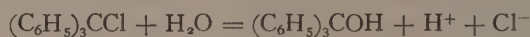
Se si mantiene la concentrazione dell'acido in un ordine di grandezza paragonabile a quello della sostanza, il gradino di quest'ultima risulta esaltato.

L'altezza del gradino aumenta linearmente con la concentrazione della sostanza. Mantenendo costante la sua concentrazione, il gradino aumenta linearmente con la concentrazione dell'acido aggiunto.

La forma del gradino varia in maniera praticamente identica sia che si aggiungano quantità crescenti di sostanza ad una soluzione base di sufficiente acidità; sia che si aggiungano quantità crescenti di acido ad una soluzione base contenente una data quantità di sostanza.

Tutto ciò fa pensare che si tratti di un'onda di idrogeno; anche quando alla concentrazioni maggiori il gradino appare sdoppiato, si tratta probabilmente di un unico processo elettrolitico. Che il gradino osservato sia dovuto alla riduzione di H^+ è stato provato mediante esame microscopico dell'elettrodo a goccia durante la riduzione della sostanza nella soluzione di KCl indicata. Ai potenziali corrispondenti alla corrente di diffusione è visibile la formazione di bolle gassose.

Evidentemente nell'esame del trifenilclorometano in ambiente idrolizzante si può osservare la scarica di H^+ liberato dallo stesso processo di idrolisi:



o di alcolisi:



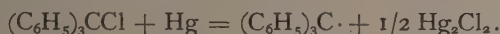
CONCLUSIONI. - Esaminato nei vari ambienti, il trifenilclorometano presenta un comportamento polarografico praticamente indipendente dalla natura del solvente usato.

Il gradino comincia ad un potenziale zero, rispetto agli anodi interni impiegati (mercurio, Ag/AgCl); superate certe concentrazioni, $2-3 \cdot 10^{-3}$ M, compare un massimo notevole e appuntito, pressoché insensibile agli usuali soppressori, e si perviene quindi, aumentando il potenziale, ad una corrente di diffusione, che si prolunga, senza alcun cenno di altri gradini, fino alla scarica della soluzione base usata. Il valore della corrente di diffusione si mantiene sempre assai basso in rapporto alle concentrazioni di sostanza impiegate.

È opportuno osservare come il quadro polarografico non cambi passando da soluzioni a carattere neutro, acetone - LiCl, ad ambienti acidi quali l'acido acetico e l'alcol saturo di HCl. Ciò porta a concludere che il processo elettrolitico non venga sensibilmente influenzato dalla disponibilità o meno di ioni H^+ .

Osservando i diversi diagrammi i_d/c ottenuti nei vari ambienti, appare evidente il caratteristico e riproducibile comportamento della sostanza, i diagrammi ottenuti alle concentrazioni maggiori (maggiori di $3 \cdot 4 \cdot 10^{-3}$ M) sono rappresentabili da rette non passanti per l'origine e aventi una pendenza circa metà delle precedenti. Ciò si verifica per tutti gli ambienti studiati e, per tutti, il gomito di raccordo tra le due rette cade nell'intervallo di concentrazione fra 3 e $4 \cdot 10^{-3}$.

Questo fenomeno è dovuto probabilmente alla reazione chimica fra trifenilclorometano e mercurio del catodo



Se una parte (a) della sostanza che diffonde verso il catodo reagisce col mercurio e c è la concentrazione della sostanza nella soluzione, la corrente di diffusione i_d sarà:

$$(1) \quad i_d = k(c - a)$$

in cui k è la costante della nota equazione di Ilković ed a dipenderà dalla stessa concentrazione c , dalla superficie e dalle altre caratteristiche dell'elettrodo. Si può interpretare bene l'andamento dei diagrammi i_d/c , ammettendo che il valore di a sia definito da leggi del tipo di Langmuir, regolanti il processo di adsorbimento. Posto quindi:

$$a = \frac{K_1 c}{1 + K_2 c},$$

la (1) diventa:

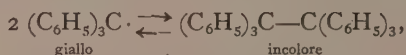
$$(2) \quad i_d = k \left(c - \frac{K_1 c}{1 + K_2 c} \right).$$

È evidente che una espressione di questo tipo rispecchia bene l'andamento dei diagrammi ottenuti: per piccoli valori di c , trascurando $K_2 c$ come termine additivo, i_d , nulla per $c = 0$, può crescere linearmente con c . Per un valore di c tanto elevato da rendere 1 trascurabile come termine addi-

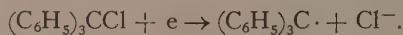
tivo rispetto a K_2c , la (2) assume la forma di $i_d = k(c - K)$, che è l'espressione di una retta non passante per l'origine, come si constata sperimentalmente per $c \sim 4 \cdot 10^{-3}$ M.

Si dovrebbe ritenere che da questa concentrazione in poi l'entità della reazione chimica abbia raggiunto il massimo possibile, cioè come se la superficie disponibile del mercurio catodico sia satura e quindi tutto ciò che arriva in più per diffusione sia disponibile per il processo elettrolitico. Il diagramma segue l'equazione della retta $i_d = k(c - K)$, assumendo la pendenza k corrispondente alla k di Ilković, e cioè la pendenza che avrebbe fin dall'origine se il processo non fosse complicato dalla reazione chimica.

Per definire la natura del processo elettrolitico primario in atto al catodo bisognerebbe conoscere il numero degli elettroni interessati nella riduzione. Data la forma dei gradini, la loro posizione, le complicazioni portate dai fenomeni di adsorbimento, il valore eccezionalmente basso del rapporto i_d/c anche nelle zone di concentrazione in cui si mantiene costante, la reagibilità della sostanza col mercurio, fattore, quest'ultimo, che già da solo è sufficiente a rendere irreversibile lo svolgimento del processo, nessuno dei metodi finora proposti nella tecnica usuale delle ricerche polarografiche, consente di valutare in qualche modo il valore di n . Sono state fatte altre ricerche sottoponendo a prolungata elettrolisi a potenziale costante ($-0,6$ V), in condizioni polarografiche con catodo a tre gocce di mercurio, piccoli volumi ($0,35-0,40$ cm³) di soluzioni acetiche della sostanza. Nel corso dell'elettrolisi la soluzione ingiallisce. La colorazione gialla scompare facendo passare aria nella soluzione. Questo comportamento corrisponde alle ben note proprietà del trifenilmetile:



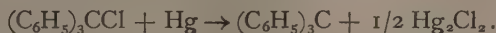
le cui soluzioni gialle vengono decolorate dall'ossigeno per formazione del perossido $(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{C}-\text{O}-\text{O}-\text{C}(\text{C}_6\text{H}_5)_3$. Resterebbe provato così che il prodotto della riduzione polarografica del trifenilclorometano è il radicale libero trifenilmetile. Il processo elettrolitico potrebbe quindi essere rappresentato con lo schema:



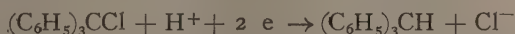
È chiaro che il semplice gocciolamento del mercurio nella soluzione è sufficiente a provocare la comparsa della colorazione gialla, ma è anche ben noto che per elettrolisi del trifenilclorometano condotta in SO_2 liquida su elettrodi di platino, Schlenk e Herzenstein⁽⁸⁾ osservarono la formazione catodica di trifenilmetile.

(8) SCHLENK, HERZENSTEIN, « Ann. der Chem. », 372, II (1909).

Norris ⁽⁹⁾, elettrolizzando soluzioni acetoniche di tritolilclorometano, ottenne al catodo tritolilmetile. Sembra quindi opportuno ritenere che nell'elettrolisi polarografica avvengano contemporaneamente i due processi:



Con i dati sperimentali raccolti appare poco sostenibile un meccanismo di riduzione portante alla formazione del trifenilmetano:



poichè in tal caso si dovrebbe notare un netto spostamento del potenziale di riduzione passando dall'ambiente acetone, incapace di cedere ioni H^+ , all'ambiente acetico ed alcolico-cloridrico, fortemente protogenico.

Chimica. — *Studio spettrofotometrico di alcuni alogenuri tetraordinati del cobalto bivalente* ^(*). Nota di ARNALDO LIBERTI e ENRICO PAPÉE, presentata ^(**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

L'esame spettrofotometrico del cloruro di cobalto eseguito da L. Katzin ⁽¹⁾ e collaboratori ha portato un contributo chiarificatore al problema cromatico mostrato da questo sale ed ha messo in evidenza che la colorazione azzurra che si ottiene in alcuni solventi, in presenza di un eccesso di cloruri (ad esempio $LiCl$), e in particolari condizioni, debba essere attribuita ad entità quali CoX_2Cl_2 , $CoXCl_3^-$, e $CoCl_4^{--}$ dove X è la molecola di solvente: le loro proporzioni relative in soluzione sarebbero dovute all'equilibrio fra lo ione metallico, gli anioni e le « basi » molecolari presenti. L'esistenza dimostrata in fase solida di complessi di cobalto bivalente a numero di coordinazione quattro ci ha indotti allo studio in soluzione acetonica dei complessi tetraalogenati di cobalto-dichinolinio.

Uno studio spettrofotometrico era stato fatto da W. R. Brode ⁽²⁾ che, senza indagare sulla reale costituzione di questi complessi in soluzione, aveva dimostrato che la molecola della base organica non è collegata all'atomo di cobalto, in quanto alogenuri di cobalto puri e complessi di cobalto e chinolina presentano in alcool gli stessi spettri di assorbimento. Scopo di questo lavoro è stato lo studio spettrofotometrico della costituzione in soluzione di questi complessi mediante l'impiego del metodo delle variazioni continue; si dimostra l'esistenza di ioni $CoBr_3^-$, $CoBr_4^{--}$, CoI_3^- , e CoI_4^{--} . Dall'esperienza sull'effetto d'idratazione, ottenuto per aggiunta di acqua

(9) NORRIS, « Am. Chem. J. », 38, 627 (1907).

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica generale ed inorganica dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) L. I. KATZIN e E. GEBERT, « J. Am. Chem. Soc. », 72, 5464 (1950).

(2) W. R. BRODE, « J. Am. Chem. Soc. », 53, 2457 (1931).

alle soluzioni acetoniche, si è osservato che le variazioni cromatiche possono essere ricondotte a due equilibri generali.

PARTE SPERIMENTALE. - Le misure spettrofotometriche sono state eseguite con uno spettrofotometro Beckman modello DU impiegando cuvette Corex dello spessore di 1.00 cm. Gli alogenuri di cobalto furono preparati allo stato anidro, il cloruro mediante disidratazione del cloruro di cobalto esaidrato riscaldato in tubo di quarzo in corrente di acido cloridrico e purificato mediante sublimazione nello stesso tubo in corrente di HCl secco. Il bromuro di cobalto fu ottenuto secondo Ducelliez ⁽³⁾ facendo reagire il cobalto metallico con bromo in soluzione eterea; a reazione avvenuta l'eccesso di bromo ed etere venne evaporato ed il bromuro di cobalto portato a costanza di peso in stufa a 140° C. Lo ioduro di cobalto venne preparato dalla soluzione acquosa ottenuta da carbonato di cobalto ed eccesso di acido iodidrico, e disidratato prima in essiccatore ad anidride fosforica e quindi sotto vuoto a circa 300° C.

I tetraalogenuri di cobalto-dichinolinio vennero preparati mescolando in una capsula una soluzione acquosa di alogenuro di cobalto, l'idracido corrispondente e la chinolina nel rapporto stechiometrico 1 : 2 : 2. Per evaporazione, la soluzione di colorazione rosa vira al bleu, al verde bleu o al verde, secondo che si tratti di soluzione cloridrica, bromidrica o iodidrica e lascia separare per raffreddamento dei cristalli dello stesso colore. I sali sono ricristallizzabili dall'acqua e le analisi dei singoli costituenti eseguite elettroliticamente per il cobalto, gravimetricamente per l'alogenuro, per perdita alla temperatura di 110° per l'acqua, e per differenza per la chinolina, hanno mostrato trattarsi dei tetraalogenuri di cobalto-dichinolinio biidrati: questi sali erano stati scoperti da Percival e Wardlaw ⁽⁴⁾, ma preparati in modo differente.

La preparazione del sale anidro fu eseguita mediante ricristallizzazione dall'acido acetico glaciale in cui il tetraalogenuro di cobalto-dichinolinio è solubile a caldo. Le analisi dei prodotti anidri ricristallizzati più volte e seccati a 110° confermarono quelle eseguite sui prodotti idrati. I punti di fusione sono:

$(\text{Chin H})_2 \text{CoCl}_4$	157°-158°
$(\text{Chin H})_2 \text{CoBr}_4$	157°-158°
$(\text{Chin H})_2 \text{CoI}_4$	153°-154°.

L'esame spettrofotometrico fu eseguito in acetone Merck $d = 0,7852$ con un contenuto in acqua pari a 0,325 % in volume. Gli altri prodotti chimici usati furono pure Merck, puri per analisi.

Soluzioni stock dei sali in acetone furono fatte mediante pesate e per diluizione con acetone vennero preparate le soluzioni alle diverse concentrazioni usate nel corso di questo lavoro.

(3) DUCELLIEZ-RAYNAUD, «C. r.», 158, 2002; «Bl. Soc. Chim. Franc.», 4, 15, 599.

(4) E. C. PERCIVAL e W. WARDLAW, «J. Chem. Soc.», 2, 1505 (1929).

Soluzioni di cloruro di cobalto - dichinolinio in acetone mostrano un colore azzurro la cui intensità è funzione della concentrazione del sale; con il bromuro si ha una colorazione bleu verde e con lo ioduro una colorazione verde. L'aggiunta di idracidi alogenici e dei corrispondenti alogenuri di litio provoca l'intensificarsi del colore della soluzione. L'effetto provocato da questi sali è mostrato nei grafici 1, 2, 3, dove vengono confrontati gli spettri ottenuti con quelli degli alogenuri puri in soluzione acetonica. Sulle ascisse dei grafici vengono messe le lunghezze d'onda e sulle ordinate i coefficienti di estinzione molare.

I grafici mostrano che l'aggiunta di alogenuro di litio, oltre che a provocare in tutti e tre i casi un aumento dell'intensità cromatica, porta a delle

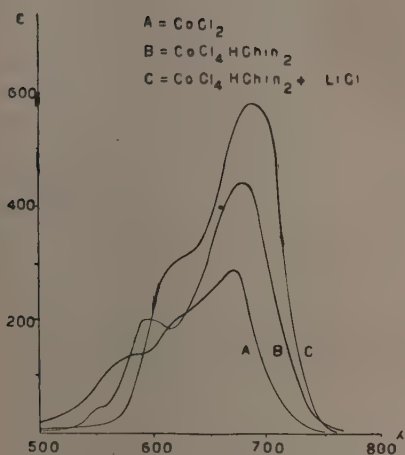


Fig. 1.

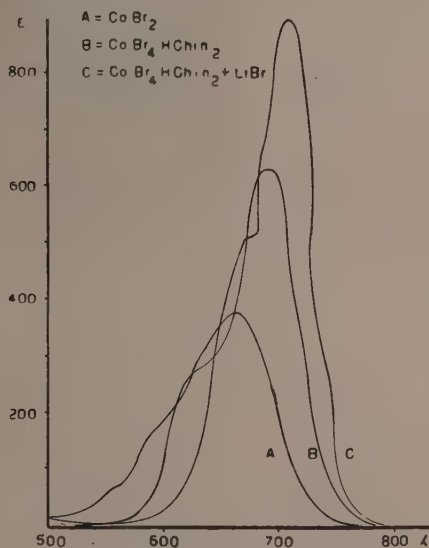


Fig. 2.

modificazioni nello spettro. Queste differenze indicano che diversi gruppi, assorbenti in modo diverso sono presenti in soluzione e che le loro quantità relative dipendono principalmente dal rapporto cobalto-cloro dei gruppi assorbenti. Katzin ha applicato il metodo delle variazioni continue al sistema cloruro di cobalto-cloruro di litio ed ha ottenuto evidenza sperimentale per l'esistenza nelle soluzioni di colore azzurro dei gruppi CoCl_2X_2 , CoXCl_3 , e CoCl_4 . Le lunghezze d'onda di 575 e $595 \text{ m}\mu$ sono caratteristiche dei gruppi CoCl_2 e CoCl_3^- , mentre l'aggiunta di acetone, permette di attribuire i massimi osservati a $\lambda = 625, 630$ e 675 al gruppo CoX_2Cl_2 , quelli a 630 e 685 a CoXCl_3^- , quelli a $625, 670$ e 700 a CoCl_4^- .

Seguendo lo stesso criterio di Katzin abbiamo applicato il metodo delle variazioni continue al sistema CoBr_2 e LiBr , operando con soluzione alla concentrazione totale di 10^{-3} M . I risultati vengono presentati nel grafico 4;

sulle ascisse sono posti i rapporti molari $\text{LiBr}/\text{CoBr}_2$ e sulle ordinate i valori di densità calcolati come differenze tra densità misurata e quella calcolata assumendo che non si formi alcun composto.

La presenza dei massimi osservati per le lunghezze d'onda più caratteristiche mostra che le variazioni dello spettro di questo sistema vanno attribuite a gruppi in cui il bromo e il cobalto sono nel rapporto 3 : 1 e 4 : 1.

Nel caso del sistema ioduro di cobalto-ioduro di litio l'esame col sistema delle variazioni continue eseguite nelle stesse condizioni del caso precedente

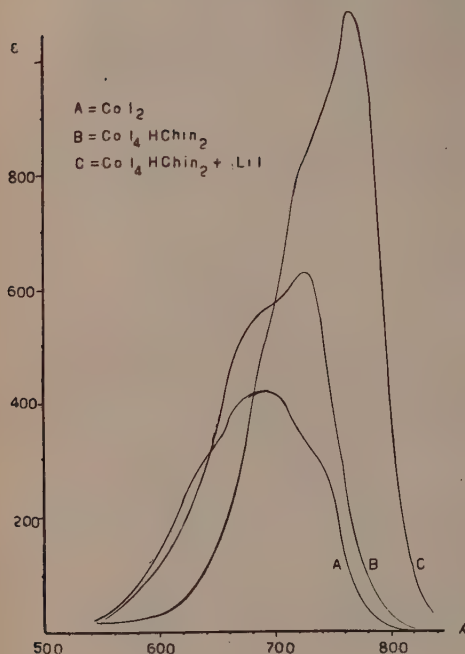


Fig. 3.

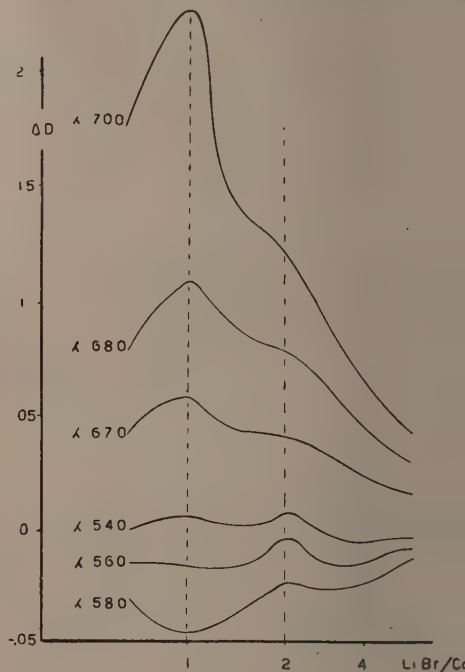


Fig. 4.

(grafico 5) mostra che anche in questo caso lo iodio e il cobalto formano aggruppamenti nel rapporto 3 : 1 e 4 : 1. Si ottiene però anche un rapporto 4 : 5.

L'analogia di questi risultati con quelli ottenuti da Katzin ci permette di estendere a questi sistemi le stesse considerazioni fatte per il cloruro ed attribuire alle diverse forme i massimi osservati negli spettri di queste sostanze: i gruppi assorbenti sono caratterizzati dalle lunghezze d'onda a fianco segnate:

CoX_2Br_2	(590-630-665-690)
CoXBr_3^-	(630)
CoBr_4^-	(675-710)
CoX_2I_2	(640-670-690-725)
CoXI_3^-	(690)
CoI_4^-	(730-770).

Gli spettri degli alogenuri di cobalto-dichinolinio sono dovuti essenzialmente agli ioni CoCl_3^- , CoBr_3^- e CoI_3^- ed in parte a CoCl_4^{--} , CoBr_4^{--} e CoI_4^{--} . Questa osservazione è in accordo con i dati ottenuti da Katzin nello studio spettrofotometrico dei tetraalogenuri di cobalto-dipiridinio. L'aggiunta degli alogenuri di litio in grande concentrazione provoca uno spostamento dell'equilibrio di dissociazione così che si può supporre che lo spettro ottenuto in queste condizioni possa essere attribuito ai radicali CoCl_4^{--} , CoBr_4^{--} , CoI_4^{--} .

STUDIO DELL'IDRATAZIONE. — Poichè le soluzioni di questi sali in acetone per successive aggiunte di acqua perdono il loro colore originale per assumere quello rosa dovuto allo ione cobalto, abbiamo studiato l'effetto di idratazione. Questo effetto è dovuto alla sostituzione degli ioni cloro coordinati intorno all'atomo di cobalto, con molecole di acqua e può essere seguito spettrofotometricamente misurando la variazione di densità ottica alla lunghezza d'onda corrispondente al massimo assorbimento osservato per il tetraalogenuro di cobalto-dichinolinio ($\lambda = 680$ per il cloruro, $\lambda = 695$ per il bromuro e $\lambda = 725$ per lo ioduro), per aggiunta di acqua. L'esperienza è stata eseguita su campioni di 20 ml di soluzione acetonica 10^{-3} M del sale, cui veniva aggiunta l'acqua per mezzo di una microburetta e che venivano portati al volume di 25 ml. in palloncino tarato per mezzo di

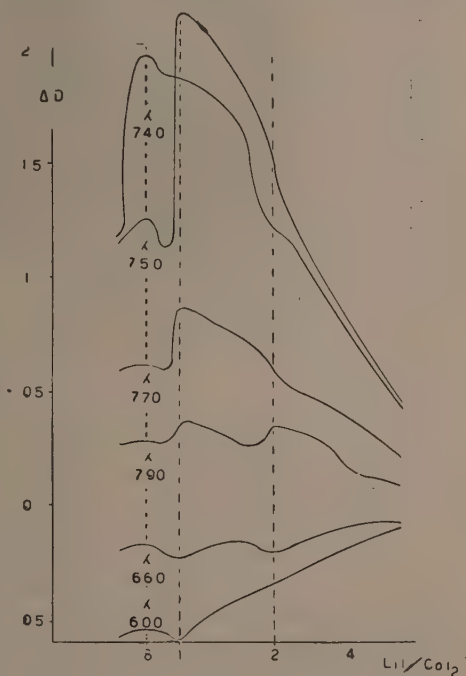


Fig. 5.

acetone. Il grafico 6 mostra i valori sperimentali: i valori di densità sono stati corretti per il contenuto in acqua dell'acetone usato. Per estrapolazione dei valori sperimentali messi in forma logaritmica si ottiene il tratto punteggiato della curva il cui valore limite è rappresentato dalla densità dovuta al tetraalogenuro di cobalto-dichinolinio. La densità corrispondente all'ascissa zero è stata misurata su di una soluzione di tetraalogenuro di cobalto-dichinolinio in acetone saturo di alogenuro di litio, avente la stessa concentrazione (8×10^{-4} M) in sale degli altri campioni. Una concentrazione in acqua pari a circa 6,5 M per il cloruro, 4 M per il bromuro e 2 M per lo ioduro provoca la totale trasparenza alle lunghezze d'onda esaminate in tutti e tre i casi.

Le curve mostrano un doppio flesso, che indica che pur potendosi avere parecchi gruppi ionici responsabili dell'assorbimento l'idratazione procede secondo due distinti processi: ciò appare ancora più evidente nel grafico 7, dove sia la densità che la concentrazione dell'acqua sono espressi in termini logaritmici. Poichè il CoAlog_4^{--} è presente solo in soluzione concentrata di alogenuro di litio, e poichè il CoAlog_3^- è la forma di complesso cobalto alogeno più stabile, come si osserva col metodo delle variazioni continue, possiamo considerare la densità corrispondente all'ascissa zero del grafico 6 dovuta al primo complesso e la densità corrispondente al punto di interse-

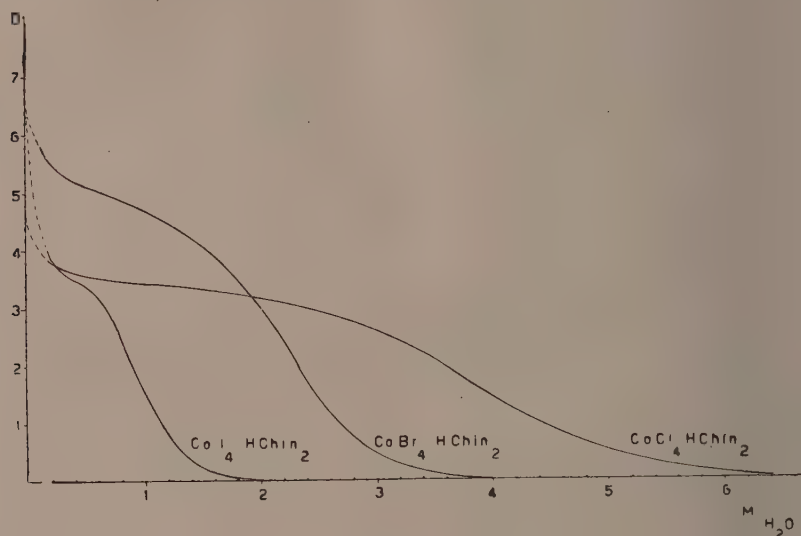
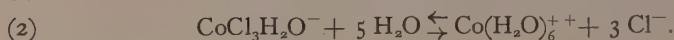
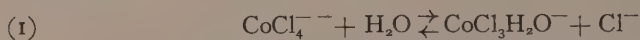


Fig. 6.

zione delle due rette tracciate attraverso i valori sperimentali (grafico 7) al gruppo CoAlog_3^- .

Noi supponiamo che gli equilibri nel caso del composto clorurato siano i seguenti:



La reazione (2) sarebbe la reazione globale includente le varie reazioni parziali attraverso cui si formano ioni e aggruppamenti intermedi che non sono spettrofotometricamente distinguibili. La nostra ipotesi può essere verificata da un semplice calcolo e da considerazioni di carattere sperimentale: la costante di equilibrio dell'effetto di idratazione (1) sarebbe nel caso più generale:

$$(3) \quad K = \frac{[(\text{CoCl}_{(4-z)}(\text{H}_2\text{O})_z)^{(-2+z)}][\text{Cl}^-]^z}{[\text{CoCl}_4^{--}][\text{H}_2\text{O}]^z} = \frac{[(\text{CoCl}_{(4-z)}(\text{H}_2\text{O})_z)^{(-2+z)}](z+1)}{[\text{CoCl}_4^{--}][\text{H}_2\text{O}]^z}$$

Ponendo questa espressione in forma logaritmica si ha:

$$(4) \quad z [\log (H_2O) - \log (CoCl_{(4-s)} (H_2O)_z)^{(-z+s)} + \\ + \log (CoCl_4^{--} - \log (CoCl_{(4-s)} (H_2O)_z)^{(-z+s)}] + \log K = 0.$$

La retta AC del grafico 7 è espressa dalla seguente relazione generale:

$$(5) \quad \log D = a \log (H_2O) + b$$

che nel caso del composto clorurato diventa:

$$(6) \quad \log (c_1 e_1 + c_2 e_2) = -0,0734 \log (H_2O)_x - 0,464$$

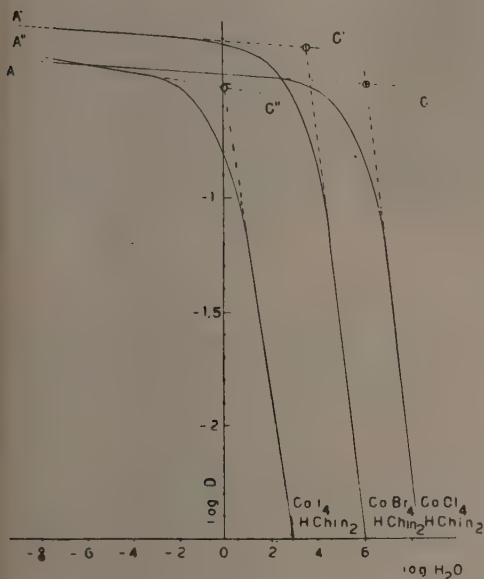


Fig. 7.

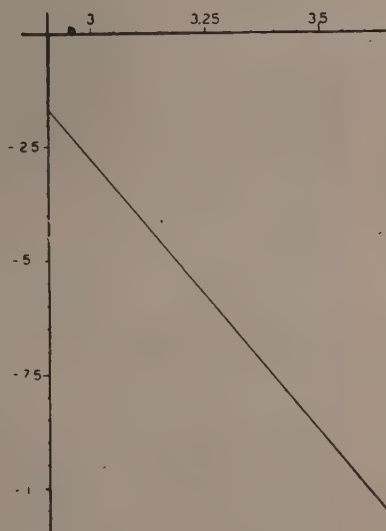


Fig. 8.

dove e_1 è il coefficiente di estinzione molare del gruppo $CoCl_4^{--}$ che risulta dal grafico 6 uguale a 576, ed e_2 è il coefficiente di estinzione del $CoCl_3^-$ che è uguale a 385 in base al grafico 7.

Per $C = c_1 + c_2 = 8 \times 10^{-4}$ si ha:

$$\log (191 c_1 + 3,08 \times 10^{-2}) = -0,0734 \log (H_2O) - 0,464.$$

Per vari valori di $\log (H_2O)$ sono stati calcolati in base a questa equazione valori di c_1 e c_2 e sostituiti nella (4). Ponendo sulle ascisse il valore di:

$$[\log (H_2O) - \log (CoCl_{(4-s)} (H_2O)_z)^{(-z+s)}]$$

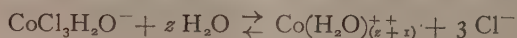
e sulle ordinate:

$$[\log (CoCl_4^{--}) - \log CoCl_{(4-s)} (H_2O)_z)^{(-z+s)}]$$

si ha una retta (grafico 8) il cui coefficiente angolare fornisce il valore di $z = 1,2$ e da cui si calcola $K = 4,7 \times 10^{-4}$.

Considerando $z = 1$ il K può essere calcolato con maggior precisione dall'equazione (6) considerando il punto dove le concentrazioni dei due ioni sono uguali ed applicando la legge di azione di massa all'equilibrio (1). Si ottiene così: $K_1 = 18,6 \times 10^{-4}$. Operando - vista l'analogia dei tre casi - in base allo stesso criterio, si ricavano per il composto bromurato e quello idurato: $K_2 = 23,1 \times 10^{-4}$ e $K_3 = 41,6 \times 10^{-4}$, rispettivamente.

Tentativi di applicare un procedimento identico al precedente alla reazione:



al fine di determinare il numero di molecole di acqua reagenti, non hanno portato a risultati attendibili: riportando su di un grafico i valori di $K(\text{H}_2\text{O})^z$ rispetto a $\log (\text{H}_2\text{O})$ si ha una retta il cui coefficiente angolare è di circa 16, che corrisponderebbe all'esponente della concentrazione dell'acqua. Noi riteniamo che il sistema grafico descritto prima non fornisce in questo caso risultati consistenti per la probabile coesistenza di numerosi equilibri intermedi e per la variazione del numero di coordinazione del cobalto durante il processo di idratazione.

Chimica. — *Momenti elettrici di acidi isossazolcarbossilici.*

Nota I di GIOVANNI SPERONI e LUCIANA MORI, presentata (*) dal Corrisp. A. QUILICO.

Lo studio dei momenti elettrici dell'isossazolo e dei suoi metilderivati (1) ha dato modo di constatare che il momento proprio dell'isossazolo non subisce modificazioni sensibili nella sostituzione con gruppi metilici e che quindi la sostituzione, almeno nel caso di raggruppamenti non polari, non determina alterazioni nella mesomeria del nucleo isossazolico. Abbiamo esteso lo studio a derivati dell'isossazolo in cui gli idrogeni sono sostituiti da gruppi polari ed in questa Nota riferiamo su ricerche effettuate su alcuni acidi isossazol- β -carbossilici e su loro esteri.

PREPARAZIONE E PURIFICAZIONE DELLE SOSTANZE.

Estere etilico dell'acido $\alpha\gamma$ -dimetilisossazol- β -carbossilico. - È stato ottenuto secondo Claisen (2) per ossimazione dell'estere diacetilacetico. Il prodotto greggio è stato ripetutamente lavato con idrossido di sodio diluito ed

(*) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) SPERONI e PINO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 6, 325 (1949); « Gazz. Chim. Ital. », 80, 549 (1950); SPERONI, PINO e MORI, « Gazz. Chim. Ital. », 82 (1952).

(2) « Ann. », 277, 171 (1893).

estratto con etere; il residuo, ottenuto per evaporazione dell'estratto etero seccato, è stato distillato quattro volte a pressione ridotta. È stata impiegata per le misure la frazione a p. eb. $104^{\circ},5-104^{\circ},7$ a 11 mm.

Acido $\alpha\gamma$ -dimetilisossazol- β -carbossilico. — È stato ottenuto per saponificazione dell'estere puro ⁽²⁾. Ripetutamente cristallizzato dall'acqua e seccato su anidride fosforica fonde a 142° .

Estere etilico dell'acido α -metil- γ -fenilisossazol- β -carbossilico. — È stato preparato secondo Quilico e Fusco ⁽³⁾ dal sale sodico dell'estere acetilacetico e cloruro dell'acido benzdrossamico. Dopo distillazione a pressione ridotta, il prodotto è stato purificato per cristallizzazione ripetuta da benzolo; p. f. 48° .

Acido α -metil- γ -fenilisossazol- β -carbossilico. — È stato ottenuto per saponificazione dell'estere puro ⁽³⁾. Cristallizzato più volte dall'alcool fonde a 190° .

Estere etilico dell'acido α -fenil- γ -metilisossazol- β -carbossilico. — È stato ottenuto secondo Claisen ⁽⁴⁾ per ossimazione dell'estere benzoilacetilacetico. Il prodotto greggio, lavato con soluzione di carbonato sodico al 5 %, è stato distillato a pressione ridotta e quindi cristallizzato ripetutamente dall'alcool; p. f. 53° .

Acido α -fenil- γ -metilisossazol- β -carbossilico. — È stato preparato saponificando l'estere puro ⁽⁴⁾. Ripetutamente cristallizzato dall'alcool fonde a 189° .

Estere etilico dell'acido $\alpha\gamma$ -difenisossazol- β -carbossilico. — È stato preparato secondo Betti ⁽⁵⁾ per ossimazione dell'estere dibenzoilacetico. Lavato con carbonato sodico, distillato a pressione ridotta e cristallizzato più volte dall'alcool, fonde a 53° .

Acido $\alpha\gamma$ -difenisossazol- β -carbossilico. — È stato ottenuto per saponificazione dell'estere puro ⁽⁵⁾. Cristallizzato più volte dall'alcool fonde a 233° .

RISULTATI DELLE MISURE. — Per la determinazione dei momenti elettrici è stato adottato come solvente il diossano che risulta particolarmente adatto in questo caso, sia per il sufficiente potere solvente che presenta nei confronti dei prodotti studiati, alcuni dei quali sono estremamente poco solubili in altri solventi, sia per il suo potere disassociante che garantisce le misure da possibili valori anomali per endoassociazioni dovute al gruppo carbossilico. Il diossano impiegato è stato purificato per ebollizione a ricadere su sodio per alcune ore e quindi distillato; il trattamento è stato ripetuto, finché il sodio, dopo 2 ore di ebollizione, non rimaneva sotto forma di sferette pulite. Dopo l'ultimo trattamento il diossano è stato cristallizzato frazionatamente e quindi distillato con colonna di Vigreux di 80 cm.

(3) « Gazz. Chim. Ital. », 67, 599 (1937).

(4) « Ann. », 291, 68 (1896).

(5) « Gazz. Chim. Ital. », 45, I, 362 (1915).

I risultati delle misure, eseguite con l'apparecchiatura precedentemente descritta ⁽⁶⁾, sono riportati nelle seguenti tabelle, con i consueti simboli.

TABELLA I.

Acido $\alpha\gamma$ -dimetilisossazol- β -carbossilico.

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
0	1,0282	1,42006	2,2053	24,560= P_1	—	21,688= MR_{D_1}	—
0,003083	1,0290	1,42046	2,2528	25,270	254,8	21,729	35,0
0,003928	1,0292	1,42056	2,2651	25,450	251,2	21,738	34,4
0,007709	1,0300	1,42096	2,3217	26,281	247,8	21,790	35,0
0,017067	1,0329	—	2,4633	28,253	240,9	—	—
0,029852	1,0360	1,42256	2,6202	30,359	218,8	22,025	33,0
						$\overline{MR}_{D_2} = 34,4$	

$$\infty P_2 = 257 \pm 3$$

$$_0P = 223 \pm 3$$

$$\mu = 3,28 \pm 0,02$$

TABELLA II.

Estere etilico dell'acido $\alpha\gamma$ -dimetilisossazol- β -carbossilico.

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
0	1,0282	1,42006	2,2053	24,560= P_1	—	21,688= MR_{D_1}	—
0,004108	1,0286	1,42066	2,2616	25,453	241,9	21,788	(46,0)
0,006843	1,0284	1,42066	2,2953	25,997	234,5	21,846	44,8
0,010747	1,0289	1,42086	2,3496	26,833	236,1	21,924	43,6
0,015014	1,0294	1,42116	2,4046	27,671	231,7	22,011	43,2
0,023443	1,0303	1,42156	2,5152	29,315	227,4	22,179	42,6
						$\overline{MR}_{D_2} = 43,5$	

$$\infty P_2 = 242 \pm 4$$

$$_0P = 198,5 \pm 4,5$$

$$\mu = 3,10 \pm 0,03$$

(6) SPERONI, *Sopra un apparecchio per la misura della costante dielettrica*. Casa Ed. Marzocco, Firenze (1950).

TABELLA III.

Acido α -metil- γ -fenilisossazol- β -carbossilico.

f_a	d_4^{25}	n_D^{25}	ε^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
o	1,0280	1,42036	2,2052	24,563= P_1	—	21,692= MR_{D_1}	—
0,003747	1,0298	1,42130	2,2634	25,477	268,5	21,816	54,8
0,009104	1,0323	1,42376	2,3468	26,757	265,6	22,003	55,7
0,013089	1,0335	1,42436	2,4093	27,702	264,4	22,133	55,4
0,018571	1,0367	1,42586	2,4952	28,953	260,9	22,296	54,2
						$\overline{MR}_{D_2} = 55,0$	
$\infty P_2 = 270 \pm 3$				$oP = 215 \pm 4$		$\mu = 3,23 \pm 0,03$	

TABELLA IV.

Estere etilico dell'acido α -metil- γ -fenilisossazol- β -carbossilico.

f_a	d_4^{25}	n_D^{25}	ε^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
o	1,0281	1,42036	2,2049	24,556= P_1	—	21,692= MR_{D_1}	—
0,004341	1,0293	1,42146	2,2640	25,551	253,8	21,878	64,5
0,008070	1,0302	1,42236	2,3149	26,402	253,3	22,032	63,8
0,010565	1,0311	1,42296	2,3484	26,950	251,2	22,130	63,1
0,014300	1,0321	1,42405	2,3975	27,758	248,5	22,291	63,6
						$\overline{MR}_{D_2} = 63,7$	
$\infty P_2 = 260 \pm 4$				$oP = 196 \pm 5$		$\mu = 3,08 \pm 0,04$	

DISCUSSIONI DEI RISULTATI. — Le medie dei valori delle rifrazioni molari dei composti studiati, ricavate dalle rifrazioni delle soluzioni in diossano, sono riportate nella Tabella IX.

Il gruppo carbossilico determina in tutti i casi una esaltazione; il confronto con i valori trovati da Von Auwers ⁽⁷⁾ per gli isossazoli, mostra che

(7) VON AUWERS, « Ber. », 57, 466 (1924); 58, 20 (1925); VON AUWERS e ERNST, « Ztschr. Phys. Chem. », 122, 226 (1926). Ved. anche nota (1).

nell'acido $\alpha\gamma$ -dimetilisossazol- β -carbossilico, la coniugazione determinata dall'introduzione del carbossile compensa ampiamente la depressione dell' $\alpha\gamma$ -dimetilisossazolo, derivante dalla struttura ciclica pentatomica. Negli acidi metilfenilsostituiti, l'esaltazione, già esistente negli isossazoli in conseguenza della sostituzione con il fenile, è aumentata; è da notare che in questi acidi isomeri è scomparsa la differenza di esaltazione in relazione alla posizione del fenile, che è invece evidente nei metilfenilisossazoli.

TABELLA V.

Acido α -fenil- γ -metilisossazol- β -carbossilico.

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
o	1,0281	1,42026	2,2085	24,609= P_1	—	21,690= MR_{D_1}	—
0,002124	1,0289	1,42066	2,2430	25,156	282,1	21,761	55,1
0,004040	1,0297	1,42166	2,2739	25,637	279,0	21,841	(57,8)
0,006654	1,0310	1,42206	2,3181	26,311	280,4	21,907	54,3
0,009325	1,0323	1,42306	2,3587	26,929	273,4	22,000	54,9
0,012717	1,0338	1,42416	2,4146	27,762	272,5	22,115	55,1
						$\overline{MR}_{D_2} = 54,8$	
$\infty P_2 = 283 \pm 6$				$\circ P = 228 \pm 6$		$\mu = 3,32 \pm 0,05$	

TABELLA VI.

Estere etilico dell'acido α -fenil- γ -metilisossazol- β -carbossilico.

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
o	1,0281	1,42026	2,2085	24,609= P_1	—	21,690= MR_{D_1}	—
0,006243	1,0289	1,42146	2,2982	26,123	267,2	21,955	64,1
0,018016	1,0309	1,42396	2,4709	28,938	264,9	22,442	63,4
0,023974	1,0334	1,42626	2,5557	30,247	259,8	22,702	63,9
0,034256	1,0368	1,42937	2,7049	32,508	255,2	23,142	64,0
						$\overline{MR}_{D_2} = 63,8$	
$\infty P_2 = 273 \pm 5$				$\circ P = 209 \pm 5$		$\mu = 3,18 \pm 0,04$	

TABELLA VII.

Acido $\alpha\gamma$ -difenilisossazol- β -carbossilico.

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
0	1,0279	1,41996	2,2090	24,620= P_1	—	21,689= MR_{D_1}	—
0,001606	1,0291	1,42096	2,2349	25,045	289,2	21,778	77,1
0,003278	1,0300	1,42176	2,2658	25,550	308,2	21,869	76,6
0,005850	1,0315	1,42316	2,3082	26,241	301,7	22,013	77,1
0,006570	1,0321	1,42366	2,3231	26,472	306,3	22,055	77,4
						$\overline{MR}_{D_2}=77,0$	
$\infty P_2 = 314 \pm 4$				$\sigma P = 237 \pm 6$		$\mu = 3,39 \pm 0,04$	

TABELLA VIII.

Estere etilico dell'acido $\alpha\gamma$ -difenilisossazol- β -carbossilico.

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
0	1,0279	1,41996	2,2090	24,620= P_1	—	21,689= MR_{D_1}	—
0,005134	1,0294	1,32226	2,2870	25,998	293,1	22,016	85,3
0,011109	1,0310	1,42486	2,3764	27,568	290,0	22,406	86,2
0,018361	1,0333	1,42767	2,4901	29,500	290,4	22,853	85,1
0,025792	1,0355	1,43108	2,5973	31,331	284,8	23,344	85,8
						$\overline{MR}_{D_2}=85,6$	
$\infty P_2 = 297 \pm 3$				$\sigma P = 211 \pm 4$		$\mu = 3,19 \pm 0,03$	

In accordo a quanto noto per gli esteri degli acidi benzoici, e in generale degli acidi non saturi in cui il gruppo carbossilico si trova in posizione tale da formare un sistema coniugato, le esaltazioni degli esteri sono sempre minori di quelle dei rispettivi acidi.

Nelle misure di momento elettrico, l'errore della estrapolazione di ∞P_2 non supera in nessun caso il 2,5 %, nonostante che, per la scarsa solubilità di alcuni dei composti esaminati, le frazioni molari siano necessariamente basse. Poichè, entro i limiti d'errore riferiti, le P_2 , come le costanti dielet-

triche e le densità delle soluzioni, sono funzioni lineari delle frazioni molari, si può escludere che in soluzione in diossano si abbia sensibile endoassociazione.

TABELLA IX.

Rifrazioni molari degli acidi e degli esteri.

	MR _D trov.	MR _D calc.	EM _D	EΣ _D
Acido αγ-dimetilisossazol-β-carbossilico	34,4	33,2	+ 1,2	+ 0,8
Id. estere etilico	43,5	42,6	+ 0,9	+ 0,5
αγ-dimetilisossazolo (7)			- 0,93	- 0,96
Acido α-metil-γ-fenilisossazol-β-carbossilico	55,0	52,7	+ 2,3	+ 1,1
Id. estere etilico	63,7	62,1	+ 1,6	+ 0,7
α-metil-γ-fenilisossazolo (7)			+ 0,64	+ 0,40
Acido α-fenil-γ-metilisossazol-β-carbossilico	54,8	52,7	+ 2,1	+ 1,0
Id. estere etilico	63,8	62,1	+ 1,7	+ 0,7
α-fenil-γ-metilisossazolo (7)			+ 1,61	+ 1,01
Acido αγ-difenilisossazol-β-carbossilico	77,0	72,2	+ 4,8	+ 1,8
Id. estere etilico	85,6	81,5	+ 4,1	+ 1,4

I risultati delle misure sono riassunti nella Tabella X.

Il calcolo dei momenti elettrici dai momenti di gruppo, può essere impostato ammettendo la libera rotazione del carbossile attorno al legame con l'eterociclo, ovvero, cosa che si equivale agli effetti del calcolo, un eguale contributo delle due posizioni estreme (A e B della fig. 1), ove si pensi che il gruppo carbossilico giaccia nel piano dell'anello, analogamente a quanto ammesso ⁽⁸⁾ per gli acidi benzoici, in conseguenza della coniugazione col sistema aromatico.

Il momento quadratico medio di due momenti μ_1 e μ_2 , facenti rispettivamente angoli φ_1 e φ_2 con l'asse di rotazione, è dato da ⁽⁹⁾

$$\bar{\mu}^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + 2 \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 .$$

(8) BROOKS e HOBBS, « J. Am. Chem. Soc. », 62, 2851 (1940).

(9) SCHNEIDER, « J. Am. Chem. Soc. », 70, 629; FUCHS, « Ztschr. Phys. Chem. », B, 14, 339 (1931).

TABELLA X.

Momenti elettrici degli acidi e degli esteri isossazol- β -carbossilici.

	Elementi per il calcolo				μ calc.	μ trov.
	μ_1	φ_1	μ_2	φ_2		
Acido $\alpha\gamma$ -dimetilisossazol- β -carbossilico.	1,78	74°	3,08	34°	3,18	3,28
Id. estere etilico.	1,9	70°	3,08	34°	3,12	3,10
Acido α -metil- γ -fenilisossazol- β -carbossilico	1,78	74°	3,14	31°	3,22	3,23
Id. estere etilico	1,9	70°	3,14	31°	3,15	3,08
Acido α -fenil- γ -metilisossazol- β -carbossilico	1,78	74°	3,28	35°	3,36	3,32
Id. estere etilico.	1,9	70°	3,28	35°	3,30	3,18
Acido $\alpha\gamma$ -difenisossazol- β -carbossilico	1,78	74°	3,14	33°30'	3,23	3,39
Id. estere etilico.	1,9	70°	3,14	33°30'	3,16	3,19

Nel calcolo sono stati assunti per il gruppo carbossilico $\mu_1 = 1,78$, $\varphi_1 = 74^\circ$ ⁽¹⁰⁾, per il gruppo $-\text{COOC}_2\text{H}_5$ $\mu_1 = 1,9$, $\varphi_1 = 70^\circ$ ⁽¹¹⁾ e per μ_2 e φ_2 i valori calcolati per i metil- e fenil-derivati dell'isossazolo (ved. Tabella X), di cui è stato precedentemente mostrato ottimo accordo con i dati sperimentali ⁽¹²⁾. Trascurando le energie potenziali dei dipoli, gli effetti di reciproca induzione e gli effetti sterici, e ammettendo che il momento medio sia uguale alla radice quadrata del momento quadratico medio, sono stati calcolati i valori riportati nella Tabella X.

La buona rispondenza fra i valori sperimentali e quelli calcolati, oltre ad indicare che il gruppo carbossilico non determina apprezzabili modifi-

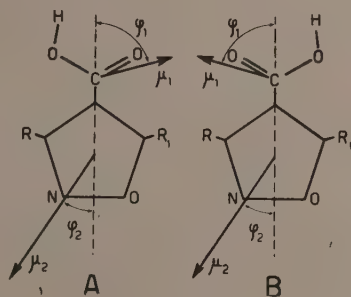


Fig. 1.

(10) HOBBS e WEITH, « J. Am. Chem. Soc. », 65, 697 (1943).

(11) SMITH, *Determination of Dipole Moments, Physical Methods of Organic Chemistry*, vol. II, Intersc. Publ. Inc. N. Y. (1949); BRANCH e CALVIN, *The theory of Organic Chemistry*, p. 146, Prentice Hall Inc. N. Y. (1941).

(12) Vedi nota (1); Ved. anche TAPPI e SPRINGER, « Gazz. Chim. Ital. », 70, 190 (1940).

cazioni del momento proprio dell'isossazolo, dimostra una simmetria del carbossile rispetto all'asse passante per il legame C—COOH.

Nell'acido $\alpha\gamma$ -dimetilisossazol- β -carbossilico la simmetria può derivare da eguale probabilità delle due posizioni estreme del carbossile nel piano



Fig. 2.



Fig. 3.

del ciclo isossazolico o, meno verosimilmente, da una effettiva libera rotazione; nel caso dei fenil derivati, causa l'ingombro del gruppo fenilico, questo è possibile solo ove si ammetta la non complanarità del fenile con l'anello isossazolico (fig. 2). Supponendo invece la complanarità del fenile con l'isossazolo, il gruppo carbossilico dovrebbe giacere nel piano perpendicolare al ciclo isossazolico (fig. 3); in questo caso la risultante dei momenti di gruppo (fig. 4) (uguale per le due posizioni estreme di μ_1 davanti o dietro il piano dei cicli) è data da

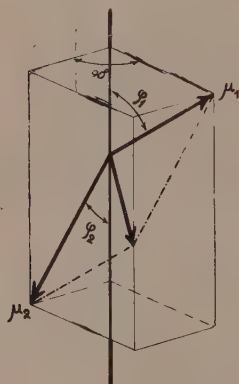


Fig. 4.

$$\mu = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2 \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2}$$

ed ha quindi un valore identico a quello ricavabile con la formula della rotazione libera.

Non è possibile una decisione fra i due casi, data però la maggiore coniugabilità del gruppo fenilico, si dovrebbe indicare la seconda ipotesi come maggiormente probabile.

Chimica fisica. — *Considerazioni quantomeccaniche intorno ad alcuni derivati carbonilici del pirrolo* ^(*). Nota di PAOLO CHIORBOLI, presentata ^(**) dal Socio G. B. BONINO.

In precedenti lavori ⁽¹⁾ sono stati esaminati e discussi gli spettri Raman dell' α -pirrolaldeide, dell' α -acetilpirrolo e dell'N-acetilpirrolo e si sono messe in rilievo talune interessanti caratteristiche che rispecchiano fenomeni di interazione intermolecolare e perturbazioni di natura intramolecolare. In particolare ci si è intrattenuti sulla profonda, caratteristica differenza delle perturbazioni cui è soggetto il gruppo carbonilico nell' α e nell'N-acetilpirrolo, per cui nello spettro Raman del primo composto la riga carbonilica appare (per le molecole libere da interazioni reciproche) a $1660-1663\text{ cm}^{-1}$, mentre nello spettro del secondo essa cade intorno a $1715-1719\text{ cm}^{-1}$, cioè in posizione nettamente più alta.

Questa situazione profondamente diversa nel caso dei due derivati acetilici del pirrolo presi in esame ci ha portati, in una discussione qualitativa dei risultati sperimentali, a talune conclusioni che ci hanno spinto ad esaminare ora il problema della possibilità di coniugazione fra $\text{C}=\text{O}$ e nucleo pirrolico, da un punto di vista meno grossolano, secondo i metodi generali coi quali la meccanica quantica studia le strutture molecolari, come per esempio il noto e classico metodo degli orbitali. Un tale studio invero potrebbe consentirci di chiarire le cause della profonda differenza fra le condizioni di oscillazione del $\text{C}=\text{O}$ nella molecola dell' α -acetilpirrolo e in quella dell'N-acetilpirrolo: cause che debbono essere ricercate in fenomeni di natura eminentemente quantistica, e che sfuggono come tali ad ogni rappresentazione mediante schemi e modelli, o provengono da caratteristiche strutturali.

Un calcolo di prima approssimazione in questo senso si può condurre, secondo la traccia già seguita in precedenti lavori ⁽²⁾, valutando per le strutture considerate l'indice di legame π del gruppo $\text{C}=\text{O}$, e, in funzione di questo, la frequenza di oscillazione del gruppo stesso. Ora l'indice di legame in questione si può calcolare, secondo il noto metodo degli orbitali, risolvendo le appropriate equazioni secolari che si possono impostare per le

(*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica-fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto chimico «G. Ciamician» dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1952.

(1) BONINO, CHIORBOLI, questi «Rendiconti» [VIII], 10, 104 (1951); GHIGI, CHIORBOLI, «Boll. sci. fac. chim. ind. Bologna», p. 89 (1951); CHIORBOLI, MORELLI, EMILIANI, «Gazz. Chim. Ital.», 81, 906 (1951); BONINO, CHIORBOLI, questi «Rendiconti» [VIII], 11, 247 (1951).

(2) a) BONINO, SCROCCO, questi «Rendiconti» [VIII], 6, 421 (1949); b) Id., Id. [VIII], 8, 183 (1950); c) SCROCCO, CHIORBOLI, questi «Rendiconti» [VIII], 8, 248 (1950); d) BONINO, CHIORBOLI, questi «Rendiconti» [VIII], 10, 7 (1951).

varie strutture considerate. Dall'indice di legame π , $I_{C=O}$, si calcola la costante della forza elastica di richiamo del gruppo $C=O$, $2\bar{k}_{C=O}$, secondo l'equazione dedotta da Bonino e Scrocco in un precedente lavoro ⁽³⁾:

$$(1) \quad 2\bar{k}_{C=O} = 2k_s + I_{C=O}(2k_d - 2k_s)$$

in cui $2k_d$ e $2k_s$ sono le costanti delle forze di richiamo dei legami $C=O$ e $C-O$ rispettivamente. Introducendo nella (1) i valori numerici delle costanti assunti dagli autori sopradetti nel citato lavoro, essendo

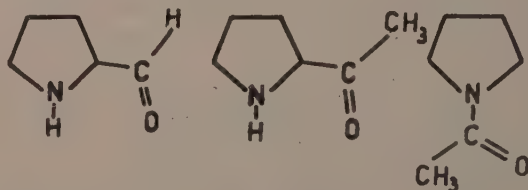
$$(2) \quad v_{C=O} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\bar{k}_{C=O}}{\mu_{C,O}}}$$

(con simboli evidenti) si calcola immediatamente per la frequenza carbonilica

$$(2') \quad \omega_{C=O} = 1,503 \sqrt{2\bar{k}_{C=O}} \text{ cm}^{-1}.$$

Date queste premesse generali, ci siamo proposti di vedere se e fino a qual punto eventualmente la teoria possa render conto del valore così nettamente diverso della frequenza di oscillazione del $C=O$ nell' α e nell' N -acetilpirrolo. In questo nostro esame abbiamo preso in considerazione anche l'aldeide α -pirrolica, per le strette analogie strutturali con l' α -acetilderivato.

È anzitutto necessario stabilire il valore dei vari parametri che intervengono nel calcolo, ossia dei diversi integrali coulombiani e di scambio che si debbono considerare per tener conto della diversa natura (e in particolare della diversa elettronegatività) degli atomi che formano le molecole in esame. In sostanza, date le tre strutture dell'aldeide α -pirrolica, dell' α -acetilpirrolo e dell' N -acetilpirrolo



si han da stabilire i parametri propri del gruppo aldeidico o acetilico e del nucleo pirrolico.

Per i gruppi $-CO \cdot H$ e $-CO \cdot CH_3$, gli integrali coulombiani e di scambio da introdurre nelle equazioni secolari sono già stati discussi in precedenti lavori ⁽⁴⁾, anche per ciò che riguarda l'effetto dell'iperconiugazione dei gruppi metilici, sicchè porremo, con le stesse notazioni altre volte usate,

$$(3) \quad \frac{\beta_{C=O}}{\beta_{C=C}} = \mu = 2 \quad \frac{H_{OO} - H_{CC}}{\beta_{C=C}} = h = -1,2 \quad \gamma = \frac{\beta_{iper.}}{\beta_{C=C}} = 0,12$$

(3) Ved. nota (2 a).

(4) Ved. nota (2 b, c, d).

dove $\beta_{C=O}$ è l'integrale di scambio del legame $C=O$, $H_{OO}-H_{CC}$ è la differenza fra gli integrali coulombiani relativi all'ossigeno carbonilico e al carbonio, e $\beta_{iper.}$ rappresenta l'integrale di scambio dovuto all'effetto della «iperconiugazione» del metile.

Per ciò che riguarda la trattazione del nucleo pirrolico sarebbe opportuna una discussione critica dei vari metodi d'approssimazione proposti da autori diversi, per adottare il più rispondente alla realtà dei dati sperimentali. Quest'argomento tuttavia preferiamo non affrontarlo criticamente in questa sede e ci riserviamo di ritornarvi prossimamente in un esame più propriamente sviluppato a questo scopo, e con più copia di argomenti. Ciò del resto non è a noi necessario qui, proponendoci ora un esame comparativo, le cui conclusioni debbono esser viste in rapporto l'una con l'altra, non in senso assoluto ciascuna a sè stante. D'altra parte non va dimenticato che, come bene osservano Longuet-Higgins e Wheland ⁽⁵⁾, entro i limiti e le possibilità del metodo degli orbitali molecolari, ogni ipotesi ragionevole intorno ai valori degli integrali coulombiani e di scambio, se applicata coerentemente, porta alle stesse conclusioni di carattere generale « sicchè il successo ottenuto sviluppando i calcoli con un determinato insieme di valori dei vari parametri non può esser ritenuto una prova del fatto che solo essi parametri siano i giusti ».

In sostanza, nello studio quantomeccanico del nucleo pirrolico col metodo degli orbitali molecolari, due sono i tipi fondamentali di approssimazione adottati: quello di Wheland-Pauling ⁽⁶⁾, ripreso non molto tempo addietro da Longuet-Higgins e Coulson ⁽⁷⁾ e quello di Dewar ⁽⁸⁾. Secondo il primo metodo (limitandosi a considerare il nucleo pirrolico) si dovrebbero considerare eguali fra loro tutti gli integrali di scambio relativi sia ai legami fra carbonio e carbonio sia a quelli fra carbonio e azoto, e riguardo agli integrali coulombiani, dicendo α quello relativo ad un atomo di carbonio non perturbato (del tipo di quelli del benzolo), si dovrebbe assumere quello proprio dell'atomo di azoto eguale ad $\alpha + 2\beta$, quelli relativi agli atomi di carbonio adiacenti all'azoto eguali ad $\alpha + 1/4\beta$ e infine quelli dei due rimanenti atomi di carbonio eguali ad α , non risentendo più, per la distanza, degli effetti induttivi dell'azoto. Longuet-Higgins e Coulson, nel citato lavoro, osservano che, prescindendo da ogni giustificazione « a posteriori » di queste posizioni iniziali nel caso del pirrolo, la scelta dei valori proposti degli integrali coulombiani è ragionevole, perchè l'azoto è considerevolmente più elettronegativo del carbonio, e gli atomi di carbonio adiacenti all'azoto debbono subire una certa esaltazione della loro elettronegatività; d'altra parte la differenza d'energia fra i legami $C-C$ e $C=C$ è pressapoco eguale a quella fra $C-N$ e $C=N$, sicchè sembrerebbe giustificato assumere tutti gli integrali di scambio eguali.

(5) « Annual Review of Physical Chemistry », **1**, 138 (1950).

(6) WHELAND, PAULING, « J. Am. Chem. Soc. », **57**, 2091 (1939).

(7) LONGUET-HIGGINS, COULSON, « Trans. Far. Soc. », **43**, 87 (1947).

(8) DEWAR, « Trans. Far. Soc. », **42**, 764 (1946).

Secondo l'altro metodo invece, quello di Dewar, si assumono eguali fra loro tutti gli integrali coulombiani degli atomi del nucleo pirrolico, ma il rapporto $\beta_{\text{CN}}/\beta_{\text{CC}}$ si prende eguale a 0,55.

I particolari di questi due diversi metodi di approssimazione saranno discussi in altro lavoro: osserviamo ad ogni modo che se col primo metodo (quello di Wheland-Pauling e di Longuet Higgins-Coulson) si ottiene una distribuzione di cariche che sembra almeno qualitativamente in accordo con quanto si può dedurre sperimentalmente da uno studio delle reattività relative nelle varie posizioni della molecola del pirrolo, col secondo metodo (quello di Dewar) si ottiene un assai soddisfacente accordo fra l'energia di risonanza calcolata e quella sperimentale, sia per il pirrolo che per l'indolo.

In sostanza i due metodi differiscono fondamentalmente per il fatto che l'uno considera eguali, nel nucleo pirrolico, tutti gli integrali di scambio e diversi quelli coulombiani, mentre l'altro considera tutti eguali gli integrali coulombiani e intrinsecamente diversi quelli di scambio, per effetto della presenza dell'eteroatomo. Ci sembrerebbe perciò interessante applicare al calcolo che ci siamo proposti entrambi i tipi di approssimazione accennati.

In questa Nota vogliamo riferire sui risultati del calcolo condotto utilizzando le approssimazioni di Dewar.

Allora, ponendo come di consueto

$$\rho_j = \frac{\alpha - E_j}{\beta}$$

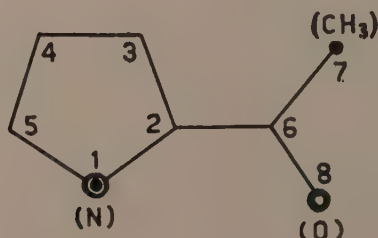
e tenendo conto delle posizioni (3), cui va aggiunta, per l'approssimazione adottata, la seguente:

$$(4) \quad \frac{\beta_{\text{CN}}}{\beta_{\text{C=C}}} = \zeta = 0,55$$

si possono scrivere per l' α -pirrolaldeide, l' α -acetilpirrolo e l'*N*-acetilpirrolo, secondo le numerazioni riportate negli schemi sottosegnati, le equazioni secolari seguenti, osservando che la prima, per l' α -acetilpirrolo, vale anche per la corrispondente aldeide, ove si ponga $\gamma = 0$.

I - α -acetilpirrolo, α -pirrolaldeide.

Schema molecolare:



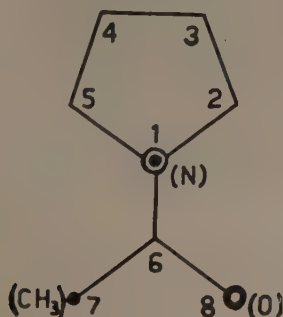
Equazione secolare:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	ρ	ζ	0	0	ζ	0	0	0
2	ζ	ρ	1	0	0	1	0	0
3	0	1	ρ	1	0	0	0	0
4	0	0	1	ρ	1	0	0	0
5	ζ	0	0	1	ρ	0	0	0
6	0	1	0	0	0	ρ	γ	η
7	0	0	0	0	0	γ	ρ	0
8	0	0	0	0	0	η	0	$\rho - h$

= 0.

II - N-acetilpirrolo

Schema molecolare:



Equazione secolare:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	ρ	ζ	0	0	ζ	ζ	0	0
2	ζ	ρ	1	0	0	0	0	0
3	0	1	ρ	1	0	0	0	0
4	0	0	1	ρ	1	0	0	0
5	ζ	0	0	1	ρ	0	0	0
6	ζ	0	0	0	0	ρ	γ	η
7	0	0	0	0	0	γ	ρ	0
8	0	0	0	0	0	η	0	$\rho - h$

= 0.

La risoluzione di queste equazioni ci dà i livelli ρ_j ed i coefficienti normalizzati c_{rj} delle combinazioni lineari $\Psi_j = \sum_r c_{rj} \psi_r$ che definiscono i vari orbitali molecolari in funzione di quelli atomici. Il doppio della somma dei prodotti $c_{rj} c_{sj}$ per il legame $C=O$, relativi a tutti i livelli di legame (ρ , negativo), definisce l'indice di legame π del $C=O$, $I_{C=O}$, da cui si può

calcolare, come si è ricordato più sopra, la frequenza di oscillazione del $C = O$ medesimo.

I risultati del calcolo condotto introducendo per i vari parametri i valori dianzi discussi sono riportati (limitatamente a ciò che riguarda il legame $C = O$ che attualmente ci interessa) nella tabella qui sotto, ove, per un diretto confronto, sono dati pure i valori sperimentali delle frequenze carboniliche nei tre casi studiati. Osserviamo che questi ultimi valori sono quelli relativi alle molecole « libere », ossia quelli dedotti dagli spettri Raman tratti da soluzioni molto diluite.

Frequenza d'oscillazione del gruppo $C = O$ in alcuni derivati carbonilici del pirrolo

Composto	$I_{C=O}$	$2\bar{k} \cdot 10^{-5}$ dine/cm	$\omega_{C=O} (cm^{-1})$ calcolata	$\omega_{C=O} (cm^{-1})$ speriment.	Riferimento bibliografico
α -pirrolaldeide	0,87649	12,319	1668	1667	(1)
α -acetilpirrolo	0,87259	12,286	1666	1660-1663	(2)
N-acetilpirrolo	0,97913	13,176	1725	1719	(2)

(1) CHIORBOLI, MORELLI EMILIANI « Gazz. Chim. ital. », 81, 906 (1951).

(2) BONINO, CHIORBOLI, questi « Rendiconti » (VIII), 10, 104 (1951).

Il confronto fra i valori della frequenza ottenuti col calcolo e quelli dedotti dagli spettri Raman è assai soddisfacente e ci sembra che porti a talune conclusioni veramente interessanti.

Osserviamo di passaggio che l'accordo migliore si ha per la pirrolaldeide e quantunque, per le intrinseche approssimazioni stesse del metodo, ciò non ha da essere considerato in senso assoluto, può tuttavia essere ritenuto come una soddisfacente prova della validità generale delle assunzioni fatte nel calcolo e quindi come un ulteriore argomento positivo a sostegno delle approssimazioni di Dewar da noi adottate per il nucleo pirrolico. Osserviamo ancora che l'« iperconiugazione » del metile (racchiusa analiticamente nell'integrale γ) non comporta una variazione sensibile della frequenza carbonilica passando dall'aldeide pirrolica all' α -acetilpirrolo: anzi la depressione che si produce è anche minore di quella sperimentalmente osservata. Ciò abbiamo potuto osservare anche in altri casi, qui non presi in considerazione, in cui ad un effetto di « coniugazione » ordinaria predominante si sovrapponga pure (sperimentalmente) un lieve effetto di « iperconiugazione »: in tali casi quest'ultimo effetto nel calcolo sfugge quasi, mentre quando l'« iperconiugazione » è l'unica causa depressiva della frequenza carbonilica, il calcolo (condotto con gli stessi criteri) riesce a prevedere soddisfacentemente e nel suo giusto ordine di grandezza la depressione indotta ⁽⁹⁾.

(9) Ved. nota (2 d).

Ma di particolare interesse ci sembra il fatto che il calcolo compiuto secondo le approssimazioni più sopra discusse, prevede brillantemente la profonda diversità tra la frequenza carbonilica propria dell' α -acetilpirrolo da una parte e dell' N -acetilpirrolo dall'altra.

Dunque senza più formulare arbitrarie ipotesi speciali, possiamo dire che una coerente trattazione quantistica delle strutture delle due molecole in questione, rende assai soddisfacentemente conto della profonda coniugazione fra $C=O$ e nucleo pirrolico nell' α -acetil-derivato da un canto e della coniugazione praticamente nulla fra i gruppi stessi nel derivato N -acetilico dell'altro. E questo fatto non era ragionevolmente prevedibile o spiegabile al di fuori degli schemi, coerentemente sviluppati, della meccanica quantica: anche le rappresentazioni modellistiche della teoria della risonanza, prese in critico esame in un precedente lavoro ⁽¹⁰⁾, si dimostrano del tutto incomplete e insufficienti dinanzi alla questione trattata.

Concludendo, le condizioni profondamente diverse di coniugazione nei due chetoni pirrolici è spiegabilissima, nell'ambito dell'interpretazione quantomeccanica delle configurazioni delle due molecole, senza che sia necessario pensare, per l' N -acetilpirrolo, ad impedimenti d'ordine strutturale, quali potrebbero ad esempio derivare da una non complanarità fra gruppo $C=O$ ed anello pirrolico.

Desidero ringraziare vivamente il prof. G. B. Bonino, per le utilissime discussioni sull'argomento, che mi hanno portato a concretare questo lavoro.

Chimica organica. — *Una nuova sintesi della cinodontina* ^(*).
Nota di CESARE CARDANI e FRANCO PIOZZI, presentata ^(**) dal Corrisp.
A. QUILICO.

Come è stato altre volte annunciato ⁽¹⁾, nei miceli di *Deuterophoma tra-cheiphila* Petri, razza R o rosso-albina di Baldacci ⁽²⁾, sono contenuti in discreta quantità (circa il 16 % del peso del micelio secco) accanto ad altre sostanze, due pigmenti ossi-antrachinonici rispondenti alle formule $C_{15}H_{10}O_5$ e $C_{15}H_{10}O_6$, dei quali il primo cristallizza in aghetti rosso-cinabro fondenti a 223–225°, mentre il secondo si presenta in cristalli rosso-bronzei fondenti a 257–258°. Le caratteristiche chimiche e fisiche di queste sostanze e dei loro derivati avevano condotto ad identificarle rispettivamente con

(10) Questi « Rendiconti », in corso di pubblicazione.

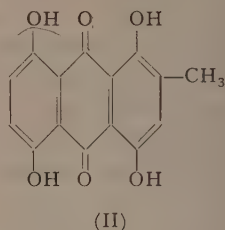
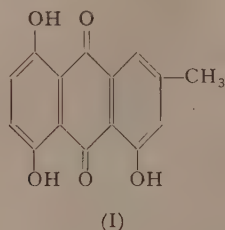
(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) A. QUILICO, C. CARDANI, F. PIOZZI e P. SCRIVANI, questo fascicolo, pp. 650–657.

(2) E. BALDACCII, « Notiz. Malat. Piante », 9, 27 (1950).

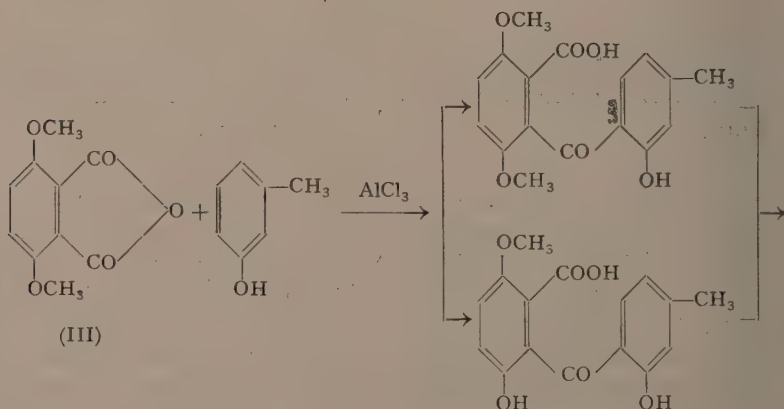
il 4,5,8-trioossi-2-metil-antrachinone (I) e l'1,4,5,8-tetraossi-2-metil-antrachinone (II):



già ritrovati da Raistrick, Robinson e Todd in alcune muffe del genere *Helmintosporium* ⁽³⁾ e da questi Autori denominate rispettivamente *elmintosporina* e *cinodontina*.

Per quanto pochi dubbi potessero sussistere sull'identità dei pigmenti del *Deuterophoma* con i derivati ossiantrachinonici (I) e (II) sopra indicati, avevamo voluto darne una definitiva conferma mediante il confronto con campioni di sicura costituzione, ciò che ha richiesto la preparazione per via sintetica di una di tali sostanze. Di ciò riferiamo nel presente lavoro ⁽⁴⁾.

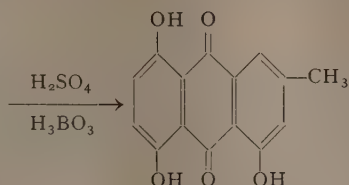
L'*elmintosporina* (I) era stata ottenuta per sintesi, prima ancora del suo ritrovamento in natura, da Graves e Adams ⁽⁵⁾ nel corso delle loro ricerche sulla condensazione dei cresoli con l'anidride 3,6-dimetossi ftalica (III) che, nel caso del m. cresolo conduce precisamente al 4,5,8-trioossi-2-metil-antrachinone, come mostra lo schema:



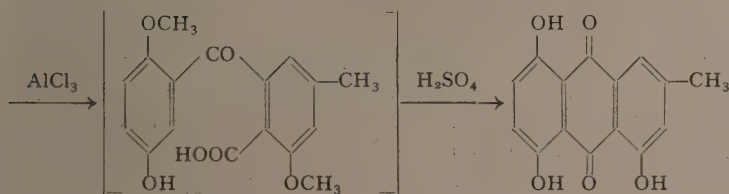
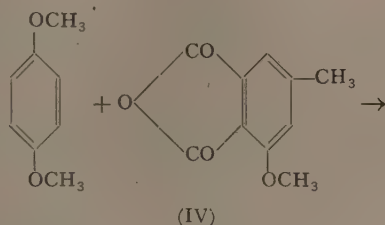
(3) H. RAISTRICK, R. ROBINSON e A. R. TODD, « Biochem. Journ. », 27, 1170 (1933); J. H. V. CHARLES, H. RAISTRICK, R. ROBINSON e A. R. TODD, « Biochem. Journ. », 27, 499 (1933); H. RAISTRICK, R. ROBINSON e A. R. TODD, « Biochem. Journ. », 28, 559 (1934).

(4) La *elmintosporina* è stata sicuramente riconosciuta perchè ossidata a 50-60° in H₂SO₄ conc. con MnO₂ precipitato, ha dato un prodotto identico all'1,4,5,8-tetraossi-2-metil-antrachinone sintetico.

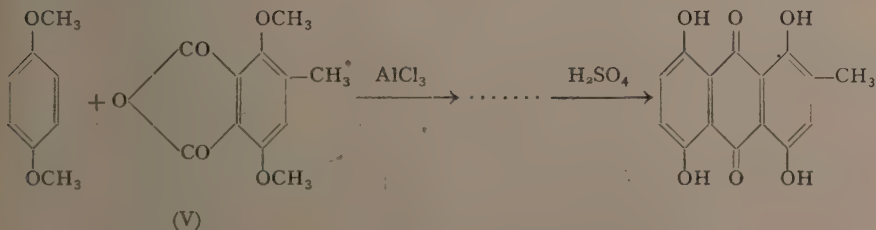
(5) G. D. GRAVES e R. ADAMS, « Journ. Am. Chem. Soc. », 45, 2439 (1923).



Più tardi Raistrick e coll. ⁽⁶⁾ la riprepararono per altra via, partendo dall'*anidride 3-metil-5-metossi ftalica* (IV) e dall'etere dimetilico dell'idrochinone, come è sotto indicato:



La costituzione della *cinodontina* (II) era stata invece solo dedotta dal suo ottenimento per ossidazione dell'*elmintosporina* con MnO_2 in H_2SO_4 ⁽⁷⁾, e solo parecchi anni più tardi Anslow e Raistrick ⁽⁸⁾ ne effettuarono la sintesi diretta a partire dall'*anidride 4-metil-3,6-dimetossi-ftalica* (V) secondo lo schema:

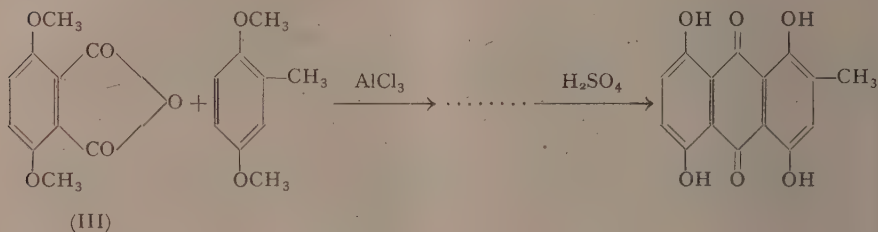


(6) H. RAISTRICK, R. ROBINSON e A. R. TODD, « Journ. Chem. Soc. », 1933, 488.

(7) H. RAISTRICK, R. ROBINSON e A. R. TODD, « Biochem. Journ. », 27, 1170 (1933).

(8) W. K. ANSLOW e H. RAISTRICK, « Biochem. Journ. », 34, 1546 (1940).

Dovendo preparare la *cinodontina* necessaria al confronto col prodotto naturale, dato che la preparazione dell'intermedio anidride 4-metil-3,6-dimetossi-ftalica ha luogo, secondo gli Autori citati ⁽⁹⁾ con rese molto basse, abbiamo trovato più conveniente di tentare una nuova via, e precisamente la condensazione dell'anidride 3,6 dimetossi-ftalica (III) con il dimetil-etere del toluidrochinone:

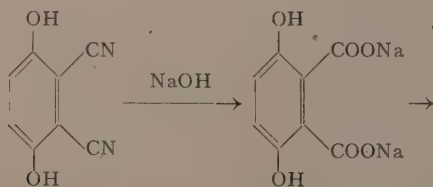


La sintesi procede infatti regolarmente secondo lo schema previsto e si ottiene la *cinodontina* con rese soddisfacenti.

Nel corso di queste prove abbiamo avuto modo di fare alcune osservazioni sulla preparazione dell'anidride dimetossiftalica, che qui comunichiamo.

Si arriva all'anidride dimetossiftalica a partire dal 2,3-dician-idrochinone secondo Thiele e Günter ⁽¹⁰⁾ in un modo piuttosto laborioso che comprende numerosi passaggi: metilazione con CH_3I del dician-idrochinone, saponificazione con H_2SO_4 conc. a dimetossiftalimmide, idrolisi di quest'ultima con HCl alcoolico. Nel seguire questa via abbiamo potuto constatare, in accordo con le precedenti osservazioni di Graves e Adams ⁽⁵⁾, che la metilazione è assai incompleta e che, nelle condizioni indicate dagli Autori tedeschi, l'idrolisi del nitrile non avviene. Anche la variante proposta da Graves e Adams, consistente nel metilare con solfato dimetilico in alcali il dician-idrochinone e saponificare poi con H_2SO_4 conc. a caldo, presenta inconvenienti nella prima fase perchè la metilazione del dician-idrochinone in soluzione concentrata porta prevalentemente al monometil-etere, mentre operando in soluzione diluita si forma il dimetil-etere con rese assai basse ⁽¹¹⁾.

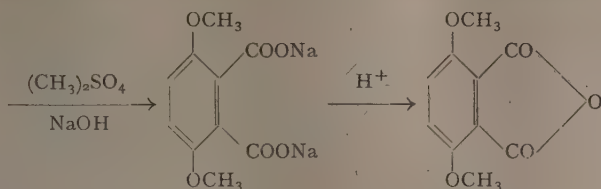
Abbiamo trovato molto più vantaggioso di seguire lo schema seguente:



(9) W. K. ANSLOW e H. RAISTRICK, « Biochem. Journ. », 34, 1124 (1940).

(10) J. THIELE e F. GÜNTER, « Ann. », 349, 64 (1906).

(11) In accordo con quanto osservato da H. KAUFFMANN e A. GROMBACH, « Ann. », 344, 72 (1906).



che conduce rapidamente e con buone rese all'anidride desiderata.

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione dell'acido 3,6-diossi-ftalico. — Si bollono a ricadere per 20 min. 11 g. di dician-idrochinone in 130 g. di NaOH 40 %. Si raffredda in ghiaccio, si acidifica con H_2SO_4 20 %, si filtra e si estrae con etere. L'acido diossiftalico ottenuto da tale estratto è quasi puro e viene usato tal quale per le successive operazioni. Resa 65 % circa.

Preparazione dell'anidride 3,6-dimetossi-ftalica (form. III). — A) In 70 cm^3 di NaOH 10 % si sciolgono 5 g. di acido diossiftalico. Nel corso di 1 ora, agitando meccanicamente e lasciando salire spontaneamente la temperatura, si aggiungono a piccole porzioni 20 cm^3 di solfato dimetilico, e si fa poi bollire dolcemente. Quando tutto il solfato dimetilico è stato consumato, si acidifica e dopo qualche ora si separa l'anidride 3,6-dimetossi-ftalica cristallina, già discretamente pura (fonde a 260–262°). Con una cristallizzazione da acido acetico la si ottiene perfettamente bianca fondente a 264°. Resa circa 70 %.

B) Dall'acido diossiftalico e diazometano in soluzione eterea si prepara il dimetiletere dell'acido dimetossi-ftalico che, cristallizzato da metanolo, fonde a 102–103°.

Si saponificano g. 0,6 di tale estere sciolti in 20 cm^3 di metanolo con l'aggiunta di 1 cm^3 di NaOH 40 %, bollendo a ricadere per 10 min. Si filtra il sale sodico separatosi, lo si scioglie nella minima quantità di acqua e si acidifica, precipita così l'anidride 3,6-dimetossi-ftalica fondente a 262–264°.

Sintesi della cinodontina: 1,4,5,8-tetraossi-2-metil-antrachinone (form. II). — In un pallone da 25 cm^3 si introducono 1 g. del dimetiletere del toluidrochinone, 1 g. di AlCl_3 , 15 cm^3 di CS_2 e 0,5 g. di anidride 3,6-dimetossi-ftalica. Si bolle a ricadere per 6 ore, si distilla via il CS_2 scacciandone le ultime tracce sotto vuoto, si decompone con ghiaccio e HCl. Si separa così una sostanza polverulenta che viene raccolta, seccata, sciolta in 2,5 cm^3 di H_2SO_4 conc. e scaldata per 20 min. a 135°. Il colore della soluzione solforica passa dal verdastro al violetto. Si versa la soluzione solforica in 20 cm^3 di acqua, si separa il precipitato nerastro formatosi e lo si estrae con benzene. Dall'estratto benzenico concentrato si ottiene la cinodontina in cristalli rosso

scuro con riflessi bronzee, che, dopo altre due cristallizzazioni da benzene fonde a 259-260°. Si sono avuti g. 0,1 di prodotto puro.

Il *tetraacetil derivato* della cinodontina viene preparato aggiungendo 0,5 cm³ di anidride acetica a g. 0,3 di cinodontina e mescolando con una bacchetta appena sporca di H₂SO₄ conc. La colorazione passa subito dal rosso al giallo. Dopo 2 ore si elimina l'eccesso di anidride acetica filtrando su buchner (un poco di prodotto lo si può ancora ottenere decomponendo con acqua l'anidride acetica). Si cristallizza da alcool ottenendo aghi gialli fondenti a 224-225°.

Mineralogia. — *Studio morfologico ed ottico della simonellite.*

Nota di FRANCESCO EMILIANI e RENATO PELLIZZER, presentata (*) dal Corrisp. C. ANDREATTA.

In una Nota preliminare del 1919, G. Boeris ⁽¹⁾ comunicava l'esistenza di un idrocarburo naturale cristallizzato che riteneva potersi considerare un minerale nuovo e per il quale proponeva il nome di « Simonellite ». Tale idrocarburo era stato trovato dal prof. Simonelli in un giacimento di lignite xiloide compreso negli strati argillosi del Pliocene di Fognano presso Montepulciano (Siena).

In tale nota Boeris riporta il punto di fusione del minerale, i dati di un'analisi chimica eseguita dal prof. R. Ciusa ⁽²⁾ ed alcune misure goniometriche effettuate in parte su frammenti di cristalli naturali ed in parte su cristalli ottenuti per evaporazione spontanea di una soluzione in etere acetico. Le misure goniometriche risultarono a Boeris malagevoli a causa dell'estrema fragilità dei cristalli naturali e del forte appiattimento dei cristalli artificiali; portarono tuttavia il Boeris a ritenere che la simonellite appartenga al sistema trimetrico (rombico) ed abbia i seguenti rapporti parametrici: $a : b : c = 0,9908 : 1 : 1,9694$.

Considerando l'incertezza e l'insufficienza, riconosciuta dallo stesso Boeris, dei dati ottenuti, il prof. Ciro Andreatta ci ha consigliato di riprendere l'argomento.

Nei numerosi campioni della lignite di Fognano esistenti nel Museo di Mineralogia dell'Università di Bologna si notano incrostazioni di simonellite con notevoli impurezze di resine che impartiscono al minerale una debole colorazione gialla, insieme a druse e geodine con cristalli incolori ben formati. Le incrostazioni si sono venute formando sulle superfici di distacco per escavazione e di taglio artificiale della lignite e le geodine in prevalenza nelle spaccature e nelle anfrattuosità. I cristalli, presenti anche sulle superfici incrostate, sono prevalentemente lamellari e quasi sempre in associazione

(*) Nella seduta del 10 maggio 1952.

(1) G. BOERIS, *Sopra un idrocarburo della lignite di Fognano. Nota preliminare*. Dai « Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Bologna », vol. XXIII, p. 83 (1918-19).

(2) CIUSA e GALLIZZI, « Gazz. Chim. It. », 51 (1921).

parallela. Abbiamo scelto quindici di tali cristalli su cui ci è stato possibile effettuare buone misure goniometriche. Da queste risulta l'esistenza di due zone equivalenti che hanno in comune le due facce più sviluppate corrispondenti all'appiattimento. Nella seguente tabella sono riportate le medie dei valori angolari misurati fra tali facce e le numerose altre, sempre assai ridotte, delle due zone equivalenti e di altre facce non comprese in tali zone: abbiamo indicato le facce con lettere convenzionali, basandoci sulle consuetudini della cristallografia, alla maniera indicata dalle figure 1 e 2.

Lettere delle facce	Numero delle misure	Limiti delle misure	Media delle misure
$c:c$	—	—	180°
$c:n$	14	$53^{\circ} 50' - 54^{\circ} 29'$	$54^{\circ} 8'$
$c:p$	28	$61^{\circ} 8' - 61^{\circ} 55'$	$61^{\circ} 28'$
$c:m$	50	$69^{\circ} 55' - 70^{\circ} 33'$	$70^{\circ} 6'$
$m:m$	3	$83^{\circ} 40' - 83^{\circ} 59'$	$83^{\circ} 54'$
$c:r$	42	$79^{\circ} 20' - 80^{\circ} 6'$	$79^{\circ} 50'$
$c:s$	7	$75^{\circ} 40' - 75^{\circ} 57'$	$75^{\circ} 48'$
$c:t$	2	$75^{\circ} 3' - 75^{\circ} 25'$	$75^{\circ} 14'$

Le facce s e t sono in zona con c ma non con n, p, m, r . La loro presenza è stata riscontrata per la faccia s in due cristalli, per la faccia t in un solo cristallo: non si può quindi affermare con certezza l'esistenza delle relative forme.

La perfetta equivalenza delle due zone ci ha portati a ritenere che l'ipotesi del Boeris sull'appartenenza della simonellite al sistema rombico fosse esatta; ulteriore prova di ciò abbiamo avuto, come diremo in una Nota successiva, dai Laue-diagrammi.

Per poter effettuare il calcolo dei rapporti parametrici e porre nella proiezione stereografica l'angolo fra le due zone equivalenti sarebbe stato necessario misurare con esattezza un angolo in zona diversa. La difficoltà e l'insufficienza delle misure ci ha indotti a preparare cristalli per evaporazione spontanea di soluzioni diverse. Come solventi abbiamo sperimentato benzolo, ligroina, acetato di etile, in cui la simonellite è solubilissima. I cristalli ottenuti da soluzioni molto concentrate risultarono poco adatti allo scopo. Tentammo quindi la cristallizzazione da alcool etilico e metilico, in cui la simonellite è assai meno solubile, riuscendo ad effettuare una purificazione per ripetute cristallizzazioni con limitatissimo spreco di materiale; i cristalli ottenuti in una prima cristallizzazione venivano ridi-

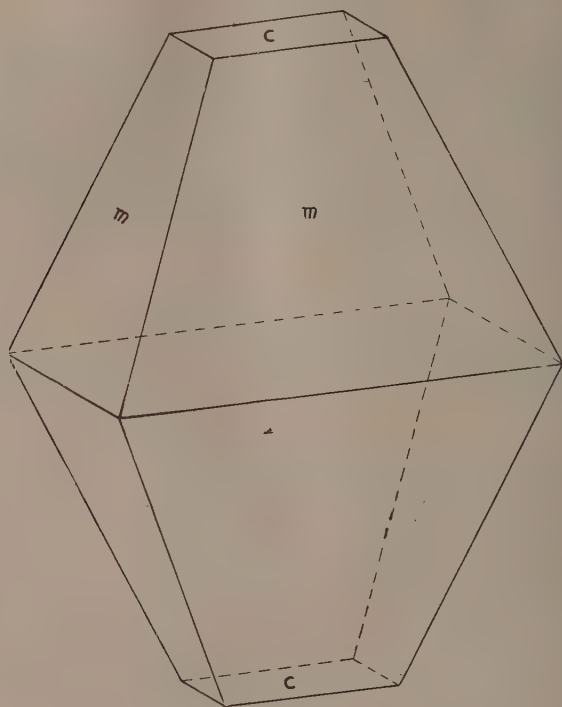


Fig. 1.

sciolti in solvente puro e l'operazione ripetuta. Così si sono ottenuti magnifici cristalli a forma di bipyramide con facce assai splendenti.

Dalle acque madri ottenute dalla cristallizzazione frazionata, dopo alcuni giorni si sono formati cristalli di simonellite molto appiattiti, il che ci fa pensare che l'appiattimento dei cristalli naturali sia dovuto alla presenza delle resine da noi eliminate nelle prime cristallizzazioni.

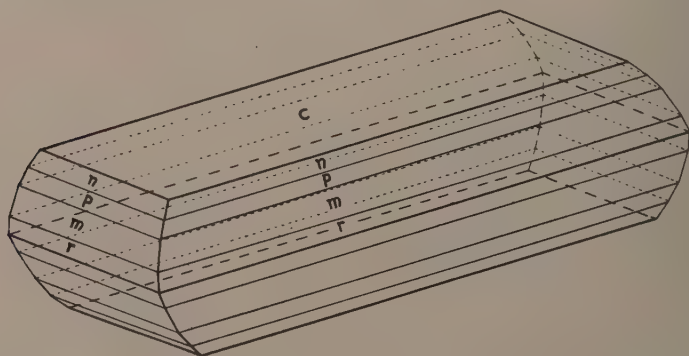


Fig. 2.

Su quattordici cristalli ottenuti da una soluzione in alcool etilico sono state fatte numerose misure riassunte nella seguente tabella :

Lettere delle facce	Numero delle misure	Limiti delle misure	Media delle misure
$c : c$	—	—	180°
$c : m$	22	$69^\circ 51' - 70^\circ 18'$	$70^\circ 3'$
$m : m$	12	$83^\circ 50' - 84^\circ 21'$	$83^\circ 58' 30''$
$m : m'$	11	$82^\circ 33' - 82^\circ 58'$	$82^\circ 39' 30''$

Scelta la m come faccia fondamentale, i valori angolari di questa tabella sono stati adoperati per il calcolo dei rapporti parametrici che risultano:

$$a : b : c = 0,9871 : 1 : 1,9354.$$

Fissati i rapporti parametrici, abbiamo calcolato i valori teorici degli angoli fra le varie facce. Nella seguente tabella sono riassunti e confrontati tutti i dati sin qui ottenuti da cristalli naturali e da cristalli artificiali:

Lettere delle facce	Simboli delle facce	Media valori crist. nat.	Media valori crist. art.	Angoli teorici
$c : c$	$(001) : (00\bar{1})$	180°	180°	180°
$c : n$	$(001) : (112)$	$54^\circ 8'$	—	$54^\circ 9' 30''$
$c : p$	$(001) : (223)$	$61^\circ 28'$	—	$61^\circ 26'$
$c : m$	$(001) : (111)$	$70^\circ 6'$	$70^\circ 3'$	$70^\circ 3'$
$m : m$	$(111) : (\bar{1}\bar{1}1)$	$83^\circ 54'$	$83^\circ 58' 30''$	$83^\circ 58' 30''$
$m : m'$	$(111) : (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$	—	$82^\circ 39' 30''$	$82^\circ 39' 30''$
$c : r$	$(001) : (221)$	$79^\circ 50'$	—	$79^\circ 43'$
$c : s$	$(001) : (201)$	$75^\circ 48'$	—	$75^\circ 48'$
$c : t$	$(001) : (021)$	$75^\circ 14'$	—	$75^\circ 31'$

Nei cristalli ottenuti per cristallizzazione da alcool etilico non compaiono affatto le forme $\{112\}$, $\{223\}$, $\{221\}$, $\{201\}$, $\{021\}$. In un cristallo naturale è stata osservata una faccia che fa un angolo di $33^\circ 28'$ con la faccia (001) . Data l'incertezza della misura non si può affermare l'esistenza di una nuova forma, che eventualmente sarebbe la $\{401\}$. In altri due cristalli naturali

sono state trovate altre facce aventi valori angolari di 90° con la faccia $\{001\}$; il che farebbe pensare alla probabile esistenza dei pinacoidi $\{010\}$ e $\{100\}$. Dato l'esiguo numero delle misure anche in questo caso, non è possibile confermare l'esistenza di tali forme.

L'attribuzione della simonellite al sistema rombico è confermata anche dai dati ottici.

Il minerale è infatti biassico e la sezione parallela a $\{001\}$, sezione ottica principale, presenta estinzione simmetrica. L'indice di rifrazione nella direzione coincidente con z è stato agevolmente misurato, durante l'effettuazione delle misure goniometriche, con il metodo della deviazione minima ed il suo valore è:

$$n = 1,670.$$

Non essendo possibile, data la fragilità del minerale, ottenere delle sezioni orientate, abbiamo tentato la misura degli altri indici di rifrazione, con il metodo dell'immersione, su preparati ottenuti per cristallizzazione di una soluzione alcoolica sopra un vetrino; abbiamo scelto sezioni parallele a $\{001\}$, numerose e facilmente individuabili. L'osservazione conoscopica su queste presenta la figura corrispondente alla normale ottica il che dimostra essere β l'indice precedentemente misurato con il metodo della deviazione minima. Ciò è stato confermato anche dalle osservazioni al T. U. Mentre è stato agevole misurare l'indice α :

$$\alpha = 1,587$$

coincidente con x , usando una miscela di essenze di garofano e di cannella, non è stato possibile invece misurare l'indice γ , poichè sarebbe necessario disporre di un liquido ad alto indice di rifrazione nel quale la simonellite sia insolubile.

Abbiamo inoltre effettuato osservazioni conoscopiche su cristalli appoggiati sulla faccia $\{111\}$ e su sezioni parallele a $\{110\}$ ottenendo l'emergenza di un asse ottico; l'isogira principale, formata da una sbarra rettilinea molto netta che ruota intorno al punto di emergenza, ben contrassegnato da nitide isocromatiche, fa pensare che l'angolo fra gli assi ottici sia:

$$2V \simeq 90^\circ.$$

In breve i dati ottici ottenuti sono i seguenti:

$$x = \alpha = 1,587$$

$$y = \gamma = n. d.$$

$$z = \beta = 1,670$$

$$2V \simeq 90^\circ.$$

Antropologia. — *Osservazioni morfofisiologiche sull'osso dell'anca e sul bacino secondo un nuovo piano di orientamento*^(*). Nota di VENERANDO CORRENTI, presentata^(**) dal Socio SERGIO SERGI.

PREMESSA. — In una precedente Nota^(†) ho già fatto rilevare gli elementi razionali che l'indagine radiologica sulla disposizione trabecolare aveva fornito per la determinazione di un orientamento fisiologico dell'osso dell'anca e del bacino.

In questa Nota tratto di alcune relazioni morfofisiologiche più importanti, messe in evidenza dal nuovo orientamento che ho adottato e che si basa sui seguenti presupposti.

In ogni organismo che vive, tutto il corpo e ciascuna sua parte, adattati secondo natura alle varie esigenze dei rispettivi complessi dinamismi, possono assumere tante posizioni nello spazio quanti sono i molteplici compiti funzionali che contingentemente debbono, di volta in volta, esplicare. E ciascuna di esse non può essere fissata secondo una concezione statica perchè rappresenta solo una fase transitoria che si inserisce in una serie di più o meno variabili successioni.

Tra queste, pertanto, bisogna cercare ed assumere quali piani di orientamento quell'espressione quantitativa e qualitativa compresa nell'ambito della variabilità propria di ogni genere, di ogni specie, di ogni individuo che realizzi una *condizione naturale* quale di regola si riscontra nel vivente; si dimostri giustificata dalle relazioni strutturali, morfologiche e funzionali che in essa si attuano; risulti significativa quale necessario punto di partenza per ogni indagine e quale idoneo termine di riferimento per gli studi comparativi.

Nella presente indagine l'orientamento delle ossa dell'anca e del bacino umano viene riferito alla stazione eretta considerata, per ora, secondo quella modalità che viene offerta dall'esame in corso, senza fermare l'attenzione sulle diverse modalità prospettate da G. H. Meyer, R. Fick, Strasser, ecc.

PUNTI, ASSI E PIANI SCELTI PER L'ORIENTAMENTO. — Come ha scritto S. Sergi a proposito dello zigomatico, anche per il bacino «partendo dal principio che le posizioni delle ossa sono posizioni di equilibrio determinate da sistemi di forze di intensità e direzioni varie, che si esercitano su di esse nel corso della loro evoluzione e del loro sviluppo» si può cercare di stabilire la sua posizione morfomeccanica «riferendola ad alcuni punti (delle ossa) nei quali è presumibile che concorrano le linee di azione delle forze che agiscono su di esse».

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Antropologia dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1952.

(†) Questi «Rendiconti», vol. XII, fasc. 5, pp. 613-618 (1952).

Riportandomi a quanto esposto nella Nota precedente, nell'osso dell'anca umano, considero pertanto, le zone suturali tra i tre pezzi di cui fino ai 12-14 anni risulta formato e porto l'attenzione sui seguenti punti:

1° *punto sinafeico ventrale* (che ho chiamato così da συναφή = punto di unione): punto del ciglio cotiloideo corrispondente alla saldatura ileo-pubica;

2° *punto sinafeico dorsale*: punto del ciglio cotiloideo corrispondente alla saldatura ileo-ischiatica;

3° *punto meso-sinafeico*: punto di mezzo del segmento che unisce i due suddetti punti di uno stesso lato.

L'indagine radiologica (anche stratigrafica) che è stata oggetto della precedente Nota, mi ha permesso di rilevare che una verticale passante per il punto mesosinafeico passa anche per il centro nodale (*chiasma trabecolare endocorico*) del più importante sistema di trabecole dell'osso dell'anca.

A tale costante relazione strutturale-suturale-articolare va attribuita, una primaria importanza funzionale (analoga a quella dimostrata per l'asse basion-bregma proposto e studiato da S. Sergi nel cranio) in quanto la verticale passante per il chiasma endocorico e per il punto meso-sinafeico costituisce quello che indico con il nome di *asse chiasma-sinafeico* e che si identifica con l'asse di carico dell'arto.

Pertanto, secondo i presupposti cui ho accennato in principio, l'orientamento fisiologico dell'osso dell'anca risulta definito - come si vedrà da quanto segue - dalla *verticalità dell'asse chiasma-sinafeico*.

Ma l'osso dell'anca di un solo lato non può essere considerato - ai fini di un orientamento fisiologico - isolatamente, bensì nella sua condizione naturale che lo rende componente di un complesso architettonico funzionalmente unitario qual'è il bacino, la cui « morfologia e posizione sono la risultante delle forze che su di esso convergono » (S. Sergi).

Anche per l'orientamento del bacino sono partito da osservazioni sperimentali condotte con il metodo radiologico: più precisamente, eseguendo un radiogramma in proiezione laterale di un bacino osseo infantile nel quale erano ancora evidenti le linee suturali tra i vari pezzi delle ossa dell'anca e nel quale la presenza di tutti i legamenti *in situ* garantiva una naturale posizione reciproca delle ossa (sacro e ossa dell'anca dei due lati) tra loro, è risultato che gli assi chiasma-sinafeici dei due lati si trovano contenuti in uno stesso piano frontale passante per il promontorio.

Come orientare il bacino partendo da queste osservazioni?

I punti prescelti e le relazioni tra le loro rispettive posizioni messe in evidenza dall'indagine radiologica offrono già elementi per la soluzione.

Intanto, i due *punti sinafeici* (ventrale e dorsale) di ciascun lato determinano un asse che chiamo: *asse sinafeico*, rispettivamente destro e sinistro.

Inoltre, i due *punti meso-sinafeici* di destra e di sinistra determinano un asse trasversale che chiamo *asse bimesosinafeico* (abbrev. B.m.s.).

Una verticale abbassata dal promontorio sull'asse bimesosinafeico lo incontra in un punto che chiamo *centro anallassico* (da ἀνάλαξιν = inco-

cio) e che non sempre coincide con il punto di mezzo dell'asse bimesosinafeico a causa dell'asimmetria del bacino.

Il promontorio ed il centro anallassico determinano un asse verticale che chiamo *asse verticale promontorio-anallassico* (abbrev. V.p.a.).

In tal modo, tenendo conto della posizione e dei punti suturali delle ossa dell'anca e del promontorio, ho potuto determinare i suddetti assi che ora elenco per maggiore chiarezza chiamandoli:

ASSI PRIMARI DEL BACINO:

1° *assi di carico dell'arto* o *assi chiasma-sinafeici*, rispettivamente destro e sinistro, determinati in ciascun lato dal chiasma trabecolare formato dai fasci sacro-iliaco e bituberale e dal punto mesosinafeico;

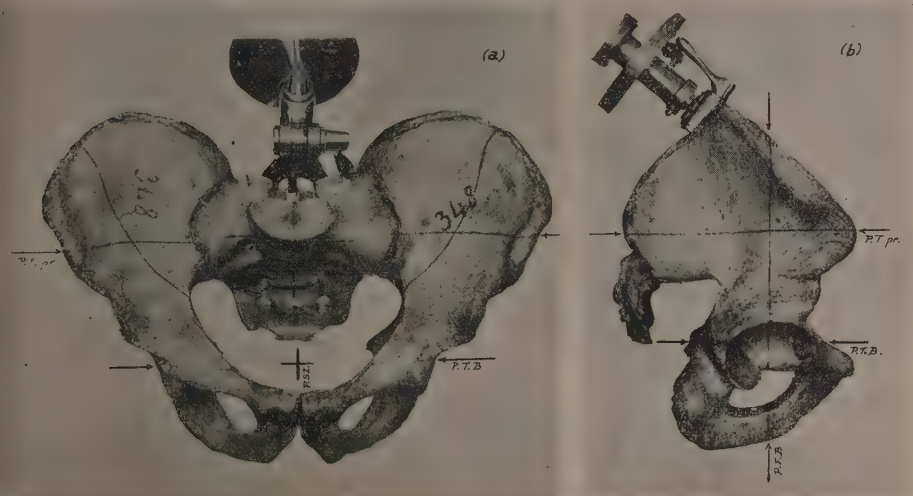


Fig. 1. — Bacino di europeo ad. ♂ orientato secondo i piani primari sinafeici veduto dalla *Norma ventralis* (a) e dalla *Norma lateralis* D. (b).

P.T.B. = Piano primario trasverso bimesosinafeico; P.T. pr. = Piano trasverso per promontorio (parallelo al piano precedente); P.S.I. = Piano sagittale intermesosinafeico; P.F.B. = Piano frontale promontorio-bimesosinafeico (contiene l'asse di carico di ciascun arto).

2° *asse verticale del bacino* o *asse promontorio-anallassico*, determinato dal promontorio e dal centro anallassico;

3° *asse trasverso del bacino* o *asse bimesosinafeico*, determinato dai punti mesosinafeici di ciascun lato e su cui si trova il centro anallassico.

Definiti gli assi primari, sono passato a determinare, servendomi di essi e degli altri punti sopraricordati, i seguenti piani (ved. fig. 1) che adotto quali:

PIANI PRIMARI DEL BACINO:

1° *piano frontale promontorio-bimesosinafeico* (abbrev. P.F.B.) determinato dall'asse bimesosinafeico e dal promontorio i quali, secondo l'osservazione radiologica, sono risultati appunto su di uno stesso piano frontale;

2° piano sagittale intermesosinafeico (abbrev. P.S.I.) che interseca il precedente piano frontale perpendicolarmente secondo l'asse verticale promontorio-anallassico;

3° piano trasverso bimesosinafeico (abbrev. P.T.B.) perpendicolare ai due piani precedenti secondo l'asse trasversale bimesosinafeico.

I tre suddetti piani primari si intersecano pertanto nel centro anallassico

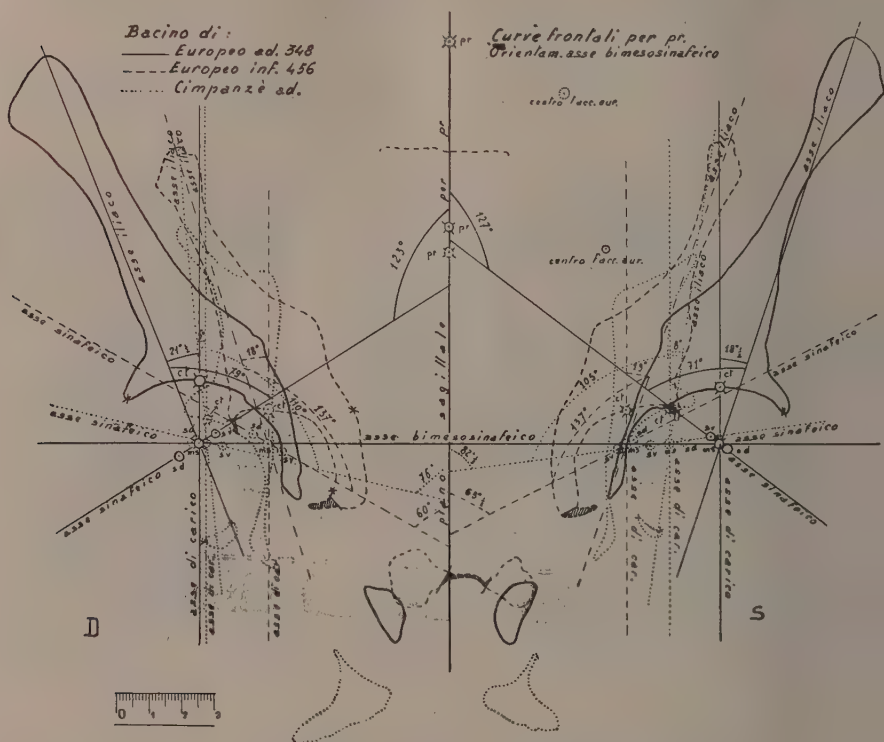


Fig. 2. - Osteogrammi frontali del bacino per promontorio.

sv = punto sinifeico ventrale; sd = punto sinifeico dorsale; ms = punto mesosinafeico; ct = punto cotiloideale (punto del tetto cotiloideo per il quale passa l'asse di carico); pr = promontorio; D = lato destro; S = lato sinistro. Nel bacino infantile le zone ombreggiate corrispondono ai legamenti. Angoli tra assi sinifeici e piano sagittale per pr.: nell'europeo ad.: a D. = 123° , a S. = 127° ; nell'europeo inf.: a D. = 60° , a S. = $63^{\circ} 30'$; nel cimpanzè ad.: a D. = 75° , a S. = $82^{\circ} 30'$; Angoli tra assi sinifeici ed assi iliaci: nell'europeo ad.: a D. = 79° , a S. = 71° ; nell'europeo inf.: a D. = 137° , a S. = 137° ; nel cimpanzè ad.: a D. = 110° , a S. = 105° . Angoli tra assi iliaci ed assi di carico: nell'europeo ad.: a D. = $21^{\circ} 30'$, a S. = $18^{\circ} 30'$; nell'europeo inf.: a D. = 18° , a S. = 19° ; nel cimpanzè ad.: a D. = 5° , a S. = 8° .

È da aggiungere che nei riferimenti adottati, in conseguenza dei principî su cui si fondano i presupposti, si è anche tenuto conto delle faccette auricolari e delle connessioni che per loro mezzo si stabiliscono con il sacro.

Tecnica usata e risultati ottenuti. - Le relazioni che dal punto di vista morfofisiologico sono rilevabili tra le varie parti dell'osso dell'anca e del bacino sono state messe in evidenza con la tecnica craniosteografica di

S. Sergi, usando apparecchi da lui stesso ideati e che, permettendo l'orientamento di ciascun osso dello scheletro secondo un qualsiasi sistema di piani, rendono possibile di « indagare le leggi della statica e della dinamica del cranio ed in genere dello scheletro » (S. Sergi).

I tracciati grafici che se ne ottengono in funzione di determinati piani costituiscono gli *osteogrammi*, rispettivamente sia dell'osso dell'anca sia del bacino.

Dato il carattere sintetico di questa Nota, non posso esporre dettagliatamente le numerose relazioni che vengono messe in evidenza,

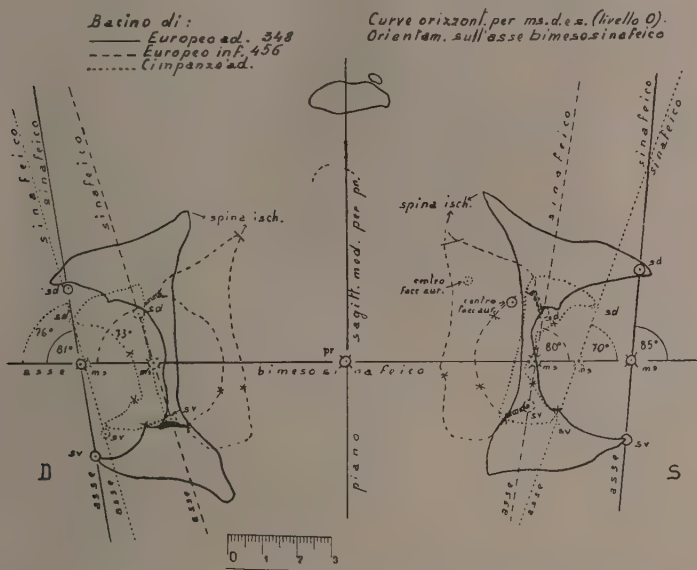


Fig. 3. — Osteogrammi orizzontali del bacino per asse bimesosinafeico.

Abbreviazioni come nella fig. 2. Angoli tra assi sinafeici ed asse bimesosinafeico: nell'europeo ad.: a D. = 82° , a S. = 85° ; nell'europeo inf.: a D. = 73° , a S. = 80° ; nel cimpanzé ad.: a D. = 76° , a S. = 70° .

ma accenno schematicamente solo ad alcuni tra i risultati che ritengo più dimostrativi e che lasciano intravedere quali possibilità di ulteriori sviluppi, comporta l'orientamento proposto.

Considerando gli osteogrammi frontali per promontorio (ved. fig. 2) e gli osteogrammi orizzontali a livello dell'asse bimesosinafeico (ved. fig. 3) di bacini di un europeo adulto, di un europeo infantile di anni 8 e di un cimpanzé adulto, le curve dei quali ho sovrapposto a scopo comparativo in riferimento alle differenze dovute all'età (nei due bacini umani) ed a quelle esistenti tra bacino umano e bacino antropoide, si osserva che gli assi sinafeici, pur risentendo delle asimmetrie laterali, si dirigono:

nel bacino umano adulto dall'indietro in avanti, dal basso in alto (ved. fig. 2), lateromedialmente (ved. fig. 3);

osservare che nel cimpanzé la curva dell'ala iliaca rimane tutta all'indietro del piano frontale primario, mentre le curve omonime dei bacini umani infantile ed adulto, si portano molto al davanti di questo piano. Ed ancora, se si uniscono tra loro gli estremi della proiezione dell'ala iliaca di ciascun lato, si osserva che tali rette, o assi della lamina iliaca, corrispondenti alla direzione delle rispettive ossa iliache, risultano divergenti in senso dorso-ventrale ma in misura che è minore per il bacino umano adulto, maggiore per quello umano infantile, notevolmente maggiore (ved. valori riportati nelle figure) per il bacino del cimpanzé.

Tali constatazioni individuano così l'appiattimento caratteristico dell'ala iliaca in questo antropoide dove costituisce una vera « paletta » ed evidenziano d'altra parte che, nei bacini umani, dall'età infantile a quella adulta, l'ala iliaca ruota su un asse verticale in senso latero-mediale; e questa rotazione può essere misurata nelle diverse età e nei diversi tipi etnici per stabilire così il grado di incurvamento dell'ala iliaca nel senso laterale sul profilo ventrale.

Quest'ultima considerazione, messa in relazione con la rotazione in senso medio-laterale che si verifica nell'ischio-pube umano dall'età giovanile all'età adulta, mette chiaramente in evidenza la torsione che si attua nell'osso dell'anca tra la parte iliaca e quella ischio-pubica affinché tutto l'osso e ciascuna sua parte vadano adeguando sempre più la loro forma alle definitive esigenze posturali.

Ma altri interessanti rilievi suggerisce l'esame degli osteogrammi orizzontali presi a confronto nel piano trasverso primario (ved. fig. 2) sugli stessi bacini.

Il contorno osteografico di ciascun lato a tale livello ricorda, per la sua forma, le sezioni di due pilastri che, in riferimento alla loro posizione rispetto al piano frontale primario, possono essere distinti in uno ventrale ed in uno dorsale, riuniti tra loro da un ponte molto assottigliato, a guisa di istmo, veduto in sezione, che corrisponde al fondo della cavità cotiloidea.

Tali sezioni corrispondono alla posizione rispettiva dei fasci sacro-pubico e bituberale che vengono a costituire i suddetti pilastri (rispettivamente anteriore e posteriore nel piano degli osteogrammi) e che rappresentano i fasci trabecolari più importanti del sistema idiobadismatico (ved. Nota precedente). I suddetti osteogrammi orizzontali primari danno chiare indicazioni per lo studio delle somiglianze e delle differenze morfofisiologiche dei bacini studiati. Fermando l'attenzione sulla loro estensione e sulla loro posizione rispetto al piano frontale primario adottato, si osserva che:

nel bacino umano adulto queste sezioni, in ciascun lato, appaiono l'una quasi come l'immagine speculare dell'altra;

nel bacino umano infantile la sezione del pilastro dorsale si presenta di diversa forma e più estesa di quella del pilastro ventrale che è meno esteso perchè ancora non si è completamente sviluppato il pube e l'ischio;

nel bacino del cimpanzé adulto le sezioni di ciascun lato ricordano l'aspetto speculare osservato nel bacino umano adulto presumibilmente perchè essendo i due bacini presi a confronto entrambi adulti, essi hanno

già raggiunto il loro assetto morfomeccanico definitivo; nel cimpanzé adulto, però, le dette sezioni sono meno estese che nell'uomo adulto verosimilmente perchè nell'antropoide manca una vera stazione eretta.

Inoltre, volendo fare dei riferimenti alle relazioni tra le posizioni delle varie parti dell'osso, si osserva che questa curva orizzontale primaria passa, nei bacini umani, per la spina ischiatica e che la proiezione del centro della

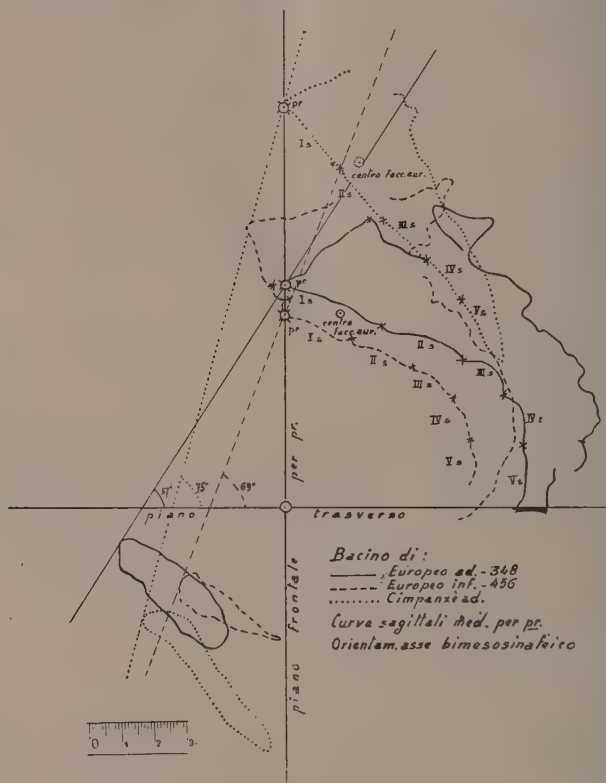


Fig. 5. - Osteogrammi sagittali primari del bacino.

Abbreviazioni come nella fig. 2. Angoli tra congiugata normale e piano trasverso: nell'europeo ad. = 57° ; nell'europeo inf. = 69° ; nel cimpanzé ad. = 75° .

faccetta auricolare di ciascun lato colpisce tangenzialmente, nei bacini umani, il margine mediale della sezione, mentre nel bacino antropoide se ne allontana notevolmente spostandosi in senso mediale.

Tale rilievo lascia intravedere l'importanza che l'articolazione sacroiliaca assume per lo studio delle condizioni morfofisiologiche del bacino, importanza che risulta confermata dalle relazioni che sono state messe in evidenza da osteogrammi eseguiti in altri piani. Più precisamente da osteogrammi frontali di ossa dell'anca umana eseguiti a livello del centro articolare della faccetta auricolare, parallelamente al piano frontale primario,

è risultato che detto piano colpisce sempre tangenzialmente il fondo della grande incisura ischiatica individuando il punto di ripiegamento dell'ileo sull'ischio e determinando la grande incisura ischiatica che è un carattere tipico del bacino umano architetturealmente adattato per la stazione eretta.

Gli osteogrammi sagittali primari (ved. fig. 5) relativi agli stessi bacini finora presi in considerazione, dimostrano che il piano trasverso primario colpisce il sacro a livello della articolazione sacro-coccigea ed indicano, per altra via, le relazioni esistenti tra quest'osso ed i punti sinafeici delle ossa dell'anca, punti in funzione dei quali sono stati determinati i nostri piani primari. Gli osteogrammi sagittali primari, inoltre, permettono di studiare e di mettere bene in evidenza la morfologia del sacro e della regione della sinfisi pubica, e le relazioni che tra loro si attuano.

I risultati qui riportati, che sono un saggio di quelli ottenuti in seguito alla presente indagine, sono sufficienti ad indicare la necessità di uno studio unitario ed armonico delle varie parti dello scheletro ed a dimostrare che tali studi vanno condotti tenendo conto di tutte le condizioni strutturali, morfologiche e funzionali.

Nel lavoro in esteso sarà analizzato il confronto tra il metodo del Weidenreich con il mio; per intanto metto in evidenza che nella *stella cotiloidea* del Weidenreich non sono tenute presenti le direzioni secondo le quali, rispetto ai tre piani dello spazio, si effettuano i movimenti considerati dall'Autore.

Concludendo, si può ritenere che la presente ricerca conferma ancora una volta la giustezza di quegli indirizzi secondo i quali « l'esatta e completa distinzione delle forme può soltanto risultare dalla metodica osservazione, quando, seguendo un criterio unitario, la descrizione d'insieme dei tre profili, il laterale, il frontale e l'orizzontale, sia fondata sulla determinazione della posizione e della forma degli elementi ossei che contribuiscono alla loro costituzione » (S. Sergi).

L'adozione di tali indirizzi, ai fini di un orientamento fisiologico del bacino, mi ha portato alla definizione di assi e piani primari, la cui fondatezza è giustificata dalle relazioni morfofisiologiche che essi hanno permesso di rilevare e la cui analisi sarà oggetto di un esteso lavoro attualmente in corso.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

- V. CORRENTI, *Sulla disposizione delle trabecole dell'osso dell'anca in relazione alla loro morfodinamica*. « Rend. Accad. Naz. Lincei », Cl. Sc. F.M.N., fasc. 5, maggio 1952.
S. SERGI, *La topografia dell'osso zigomatico nell'uomo in relazione ai problemi dell'architettura del cranio e della faccia*. « R. Accad. d'Italia », Rend. Cl. Sc. F.M.N., fasc. 6, serie VII, vol. IV (1942).
S. SERGI, *Pantogonistato craniosteforo e assidiatetero*. « Riv. Antrop. », vol. XXXVII, 1949.
F. WEIDENREICH, *Ueber das Hüftbein und das Becken der Primaten und ihre Umformung durch den aufrechten Gang*. « Anat. Anz. », Bd. 44 (1913).

Anatomia. — *Nuovi dati e nuove concezioni sulla innervazione pressorecetttrice.* Nota di GENNARO PALUMBI, presentata (*) dal Socio A. PENSA.

Nel 1950⁽¹⁾ ebbi per primo a dimostrare l'esistenza di particolari strutture nervose sensitive nella parete del labirinto membranoso anteriore dell'uomo, e più precisamente nella regione apicale della chiocciola membranosa. In base ai loro caratteri morfologici le considerai apparati pressocettori esprimendo l'ipotesi che esse possano avere il compito di regolare fra l'altro la pressione endolinfatica nel canale cocleare, provocando in via riflessa modificazioni vasomotorie e secretorie.

Più recentemente ⁽²⁾ ho dimostrato la presenza di analoghe strutture nel labirinto membranoso posteriore e cioè nella porzione extramaculare dell'utricolo e del sacculo, nella porzione di parete ampollare non occupata dalla cresta, e nella parete stessa dei canali semicirculari.

Trattasi di strutture terminali di natura sensitiva, che si estendono principalmente nel connettivo sottoepiteliale della parete degli organi suddetti, essenzialmente rappresentate dall'insieme delle numerose anse e volute, fra loro più o meno intimamente intrecciate, formate dai rami di divisione, collaterali e terminali, di alcune grosse fibre midollate di natura sicuramente sensitiva, provenienti dalla regione maculare. Alcuni di detti rami sono provvisti di corpuscoli globosi a struttura finemente fibrillare, disposti anche nel connettivo sottoepiteliale. Dalle anse sopradescritte si diramano filamenti molto esili che in parte terminano nel connettivo fibrillare ed in parte invece, facendosi più superficiali, sembrano esaurirsi fra gli elementi epiteliali, non sensoriali, della parete stessa.

Anche a queste strutture terminali sensitive ho attribuito il significato di formazioni pressocetttrici aventi la funzione di regolare in via riflessa la pressione endolinfatica nel labirinto membranoso posteriore, sia influenzando la formazione ed il riassorbimento della endolinfa a livello delle regioni secretorie paramaculari e nella plana semilunata, sia provocando variazioni di ordine vasomotorio.

Se con la stessa tecnica di impregnazione argentea (metodo Bielschowsky da me opportunamente modificato) si studia il comportamento delle fibre nervose in corrispondenza della tonaca vaginale del testicolo, anche qui si ri-

(*) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) G. PALUMBI, *L'innervazione dell'orecchio interno dell'uomo alla luce di nuove ricerche istomorfologiche.* « Rend. Istit. Lombardo di Scienze e Lettere », Classe di Scienze, vol. LXXXIII, 1950.

(2) G. PALUMBI, *Nuovi dati sull'innervazione recetttrice e simpatica del labirinto membranoso dell'orecchio interno dell'uomo.* « Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », Classe di Scienze, vol. LXXXIV, 1951.

velano strutture di natura sicuramente recettrice, delle quali alcune hanno carattere terminale ed altre invece hanno la strana caratteristica di essere intercalate sul percorso di alcuni fasci nervosi decorrenti per tratti più o meno lunghi nel foglietto esterno della tonaca vaginale stessa.

Vale la pena soffermarsi un momento su queste formazioni che non erano mai state descritte prima d'ora. Come risulta dai preparati microscopici del mio allievo dott. Corona ⁽³⁾, che si è occupato dell'argomento nell'Istituto da me diretto, alcune delle grosse fibre midollate che compongono un fascio nervoso, improvvisamente danno origine ad un numero vario di collaterali che nello spessore stesso del tronco nervoso, nel mentre si avvolgono più volte su loro stesse, emettono brevi rami che terminano con laminette a struttura finemente reticolare. Ne derivano glomeruli di forma più spesso fusata ed a struttura più o meno complessa. Le fibre principali attraversano detti glomeruli e si continuano quindi nel fascio nervoso.

In uno stesso tronco nervoso si possono trovare più glomeruli intercalati disposti l'uno dopo l'altro. Inoltre alcune fibre midollate, dopo aver dato luogo per mezzo dei loro rami collaterali a detti glomeruli intercalati, possono partecipare alla costituzione di uno o più corpuscoli terminali di tipo Pacini formando in ciascuno di questi l'espansione nevressiale.

Ai glomeruli intercalati sopradescritti non è possibile attribuire altra funzione che quella di registrare eventuali stiramenti del foglietto parietale della tonaca vaginale. Dal punto di vista morfologico esse si possono considerare come un tipo intermedio fra le espansioni nervose periferiche libere e quelle capsulate.

È assai probabile che la stimolazione di detti glomeruli possa provocare in via riflessa reazioni di vario ordine a carico del testicolo.

Un reperto fondamentalmente analogo ma assai più complesso nei particolari strutturali ed assai più difficile da interpretare, ha ottenuto il De Caro ⁽⁴⁾, mio allievo interno, studiando con la stessa tecnica l'innervazione del surrene. Nella guaina connettivale che avvolge la ghiandola surrenale egli ha potuto mettere in evidenza due particolari ordini di formazioni nervose, di natura sensitiva, le une terminali e le altre intercalate sul percorso di alcuni fasci nervosi capsulari, mai fino ad ora descritte. Le prime, che sono sempre applicate alla faccia esterna della guaina del surrene, sono dei veri e propri corpuscoli terminali a gomito, e rassomigliano molto da vicino ai tipici corpuscoli di Krause; ad esse si può attribuire il significato di recettori di pressione, deputati cioè a ricevere ed a trasmettere eventuali stimoli di pressione che si applicano alla superficie esterna del surrene.

Le altre invece, intercalate sul percorso di alcuni fasci nervosi costituiti prevalentemente da fibre grosse e midollate, sono rappresentate da particolari

(3) G. L. CORONA, *L'innervazione della tonaca vaginale propria del testicolo*. Comunicazione tenuta alla seduta del 29 aprile 1952 della Società Medico-Chirurgica di Pavia.

(4) L. DE CARO, *L'innervazione della capsula connettivale del surrene*. Comunicazione tenuta alla seduta della Società Medico-Chirurgica di Pavia del 29 aprile 1952.

avvolgimenti a gomito che dette fibre formano di tanto in tanto ripiegandosi su loro stesse ed intrecciandosi in modo talora inestricabile tra loro. La caratteristica di questi corpuscoli è che le fibre che hanno preso parte alla loro costituzione, si riordinano subito dopo tutte contemporaneamente a ricostituire il fascio nervoso primitivo, il quale riprende così il suo cammino nello spessore della guaina connettivale. A volte dal contorno di tali corpuscoli irradiano sottili fibrille che terminano in parte a breve distanza dal corpuscolo stesso con placchette di varia forma e grandezza. In alcuni casi il De Caro è riuscito infine a dimostrare la partecipazione di sottili fibre, sicuramente postgangliari simpatiche, alla costituzione di tali corpuscoli. In altri casi dette formazioni si trovano in prossimità di grossi vasi ed a volte anche di anastomosi artero-venose.

Pur riconoscendo che è assai difficile attribuire un significato funzionale a queste ultime formazioni, è però assai probabile che esse si possano considerare come formazioni recettrici deputate ad informare i centri delle variazioni di tensione della guaina del surrene, in rapporto alle variazioni di volume dell'organo e, quindi, al vario grado di attività funzionale della ghiandola stessa.

Ricordo infine che alcuni anni or sono dimostrai in corrispondenza della regione sclero-corneale ⁽⁵⁾ l'esistenza di particolari strutture sensitive intimamente connesse al fitto reticolo espansionale di natura vegetativa ivi presente. Ad essi attribuii il probabile compito di regolare in via riflessa la formazione ed il riassorbimento dell'umore acqueo.

Non può sfuggire l'analogia morfologica e funzionale esistente fra le strutture sopra ricordate e quelle pressocettive da tempo dimostrate nella parete di alcuni grossi vasi sanguigni quali ad esempio: il seno carotideo, il tratto iniziale dell'aorta, ecc.

Sappiamo dai lavori del De Castro e di numerosi altri Autori che la caratteristica fondamentale dei pressocettori vasali è rappresentata dagli intimi rapporti topografici esistenti fra le espansioni terminali delle arborizzazioni nervose appartenenti al sistema pressocettore e le fibre connettivali dell'avventizia. È oggi comunemente ammesso che le prime vengano meccanicamente stimulate dalle seconde le quali sono suscettibili di variare la loro disposizione architettonica in rapporto alle variazioni della pressione endovasale.

Anche nei casi da noi esaminati esistono indubbi intimi rapporti topografici fra terminazioni sensitive e tessuto connettivo, tali da far pensare che ogni variazione del grado di tensione delle lamine connettivali rappresenti uno stimolo meccanico per gli apparati recettori in esso contenuti e ciò può valere tanto nei casi nei quali l'apparato è rappresentato da semplici anse nervose più o meno fittamente intrecciate che nei casi in cui esso è invece rappresentato da corpuscoli a struttura maggiormente complessa intercalati sul percorso dei fasci nervosi.

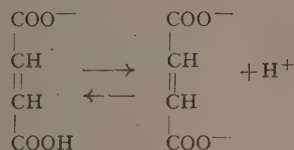
(5) G. PALUMBI, *Sulla innervazione della regione sclero-corneale*. « Ricerche di Morfologia », vol. XXII, 1947.

Nel caso del labirinto membranoso è la variazione della pressione endolinfatica che costituisce lo stimolo per le strutture recettrici della parete; nel caso della tonaca vaginale del testicolo detto stimolo può essere rappresentato da aumentata tensione o da eventuali versamenti nella cavità vaginale; nel caso infine dell'involucro connettivale del surrene, è probabile che lo stimolo sia rappresentato dalle variazioni di tensione della capsula stessa in rapporto alle variazioni di volume dell'organo connesse col suo stato funzionale.

Dall'insieme di queste ricerche l'osservazione più importante che si ricava è che i recettori di pressione e di trazione dei tipi sopra descritti — liberi nel tessuto connettivo o intercalati sul percorso dei fasci nervosi — sono molto più estesamente distribuiti nei vari organi di quanto generalmente si ritiene e che la dimostrazione di essi in nuove parti dell'organismo, mercè l'impiego di metodi adeguati di ricerca, nel mentre completa le nostre conoscenze morfologiche, porta un indubbio contributo alla interpretazione del significato funzionale di queste strutture.

Biochimica. — *La riduzione polarografica dell'acido fumarico in presenza di fosfati*^(*). Nota di ANTONIO PITTONI e di VITTORIO MORET, presentata^(**) dal Corrisp. A. RONCATO.

Nella Nota precedente⁽¹⁾, dicevamo come l'acido fumarico al polarografo dia, in tampone NH_4Cl molare/ NH_3 conc. a $\text{pH} = 7,3$, due onde di riduzione che, secondo la nostra ipotesi, corrispondono alla riduzione della forma mono- e bi-dissociata in equilibrio tra loro in concentrazione pressochè eguale



Siccome nelle ricerche biologiche si usano di solito i fosfati per tampone il mezzo a $\text{pH} = 7,3$, abbiamo ritenuto opportuno vedere se con tale tampone si avesse la stessa curva polarografica che con il NH_4Cl , sapendo che in qualche caso la natura del tampone usato influisce sulla riducibilità polarografica di una data sostanza. Il metodo e le modalità sperimentali sono identiche a quelle esposte nella Nota precedente⁽¹⁾.

(*) Eseguito presso l'Istituto di Chimica biologica dell'Università di Padova ed in parte presso il Centro di Polarografia del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) A. PITTONI e V. MORET, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 12, 456 (1952).

Come si vede dal polarogramma di fig. 1, l'acido fumarico in tampone fosfati molari a $\text{pH} = 7,3$ (K_2HPO_4 e KH_2PO_4 molari) dà una curva polarografica (2) nettamente diversa da quella (1) in NH_4Cl allo stesso pH . Parrebbe a prima vista che l'onda fosse addirittura scomparsa: in realtà non è così. Infatti se l'onda fosse effettivamente scomparsa, la curva polarografica dovrebbe assumere l'aspetto di quella base ottenuta con il solo tampone fosfati (curva 3). Invece, come ben si vede dalla fig. 1, la curva polarografica dell'acido fumarico comincia a salire ad un potenziale di circa 100 mV più

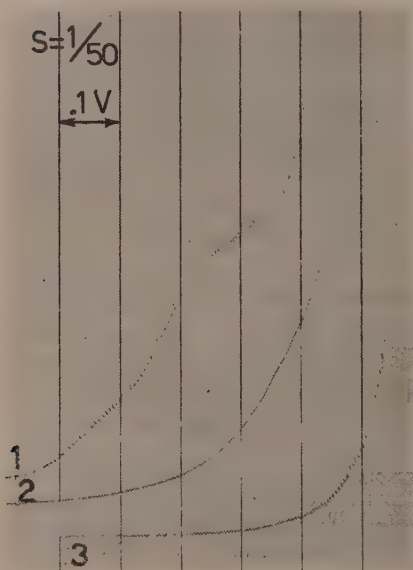


Fig. 1. - Curve polarografiche dell'acido fumarico.

- n. 1, in tampone $\text{NH}_4\text{Cl}/\text{NH}_3$ conc. fino a $\text{pH} 7,3$;
n. 2, in tampone fosfati molari allo stesso pH ;
n. 3, curva base del tampone fosfati molari.

negativo di quello a cui si drizza quando è in tampone di NH_4Cl molare, ma a circa 200 mV più positivo di quello a cui comincia a drizzarsi la curva base del tampone fosfati molari. Inoltre si osservi la fig. 2.

La curva 1 è data da un campione così costituito: 2 ml di acido fumarico 2 mM + 4 ml di tampone NH_4Cl molare/ NH_3 conc. a $\text{pH} = 7,3$. La curva 5 è data dalla stessa concentrazione di acido fumarico in tampone fosfati molari allo stesso pH . La curva 6 è quella base del tampone fosfati.

Le curve 2, 3, 4 sono state ottenute aggiungendo al campione che ha dato la curva 1, rispettivamente 0,2; 1; 2 ml di tampone fosfati molari a $\text{pH} = 7,3$. Tutte le curve (1-6) hanno inizio al potenziale di: $-1,10$ volts.

Come si vede, aggiungendo quantità crescenti di tampone fosfati molari al tampone NH_4Cl molare contenente acido fumarico, l'onda di elettro-

riduzione di questo acido si presenta più obliqua. A nostro avviso si deve quindi concludere che in presenza dei soli fosfati l'onda dell'acido fumarico venga spostata a potenziali più negativi ed inoltre resa più obliqua (come se il processo di elettroreduzione dell'acido fumarico fosse reso più irreversibile ancora di quanto lo è in tampone di NH_4Cl). Come conseguenza di questi due fatti, l'onda non può presentare il tratto orizzontale della corrente di diffusione limite perchè, prima di raggiungere il potenziale a cui può manifestarsi tale tratto orizzontale, incontra potenziali ai quali si drizza la curva polarografica del tampone fosfati.

Ci si potrebbe obiettare che ai pH alcalini esaminati ($\text{pH} = 7,3 \div 8,2$) il fenomeno suesposto sia dovuto al fatto che l'interfase goccia di mercurio/

soluzione non abbia lo stesso pH, da noi determinato nelle nostre misure, del resto della soluzione, bensì un pH più alcalino per una diminuzione di ioni idrogeno che si avrebbe a tale interfase in seguito al consumo di tali ioni nella elettroreduzione dell'acido fumarico, consumo che potrebbe non essere compensato dall'efficacia tamponante dei fosfati del mezzo. Questa, secondo noi, ci sembra un'eventualità da escludere per le seguenti ragioni:

1° perchè abbiamo potuto constatare che in tampone NH_4Cl molare, a cui si è aggiunta NH_3 conc. fino ad ottenere un $\text{pH} = 11,2$, cioè di ben 4 unità superiore a quello dei fosfati al quale si è osservato il fenomeno suesposto, l'onda dell'acido fumarico si è ottenuta nella sua forma integrale con il tratto orizzontale della corrente di diffusione limite;

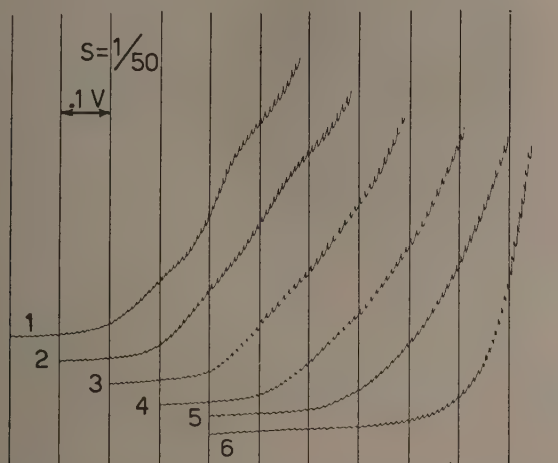


Fig. 2. - Influenza sulla curva polarografica dell'acido fumarico a $\text{pH} = 7,3$ in tampone NH_4Cl molare/ NH_3 conc., da parte di quantità crescenti di tampone fosfati molari allo stesso pH.

2° perchè ci sembra improbabile che il tampone fosfati ad una concentrazione così elevata (molare) non riesca a compensare totalmente il consumo di ioni idrogenici verificantesi all'interfase, e che comunque ci possa essere tra l'interfase ed il resto della soluzione una differenza di pH maggiore di 4 unità.

A nostro avviso quindi, l'acido fumarico in presenza del tampone fosfati molari darebbe luogo alla formazione di un complesso presentante una curva polarografica di elettroreduzione diversa da quella dell'acido fumarico.

Infatti si osservi il polarogramma di fig. 3. La curva 1 è quella dell'acido fumarico in tampone sodio-acetato molare/acido acetico glaciale a $\text{pH} = 5,54$. L'acido fumarico a tale pH si trova in equilibrio tra la forma mono- ed indissociata, alla cui elettroreduzione sono dovute rispettivamente la seconda e la prima onda della curva polarografica. Se mettiamo l'acido fumarico nello stesso rapporto quantitativo in tampone di fosfati molari, allo stesso

pH, vediamo che la curva (2) presenta quantitativamente un andamento diverso: cioè l'altezza dell'onda dovuta alla riduzione della forma indissociata *a*) diminuisce ed aumenta quella dell'onda dovuta alla riduzione della forma monodissociata *b*); fatto questo interpretabile con l'ipotesi che il fosfato formi un complesso con la forma dissociata sottraendola all'equilibrio il quale verrebbe così spostato con conseguente diminuzione della concentrazione della forma indissociata dell'acido.

Un accenno alla possibilità che l'acido fumarico e l'acido maleico diano un complesso con i fosfati è stato dato anche da Elving e Teitelbaum ⁽²⁾, i

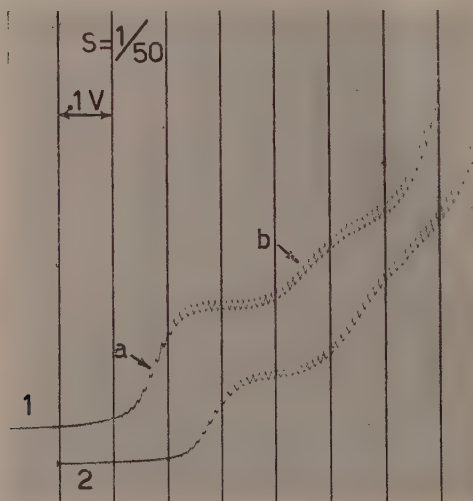


Fig. 3. - Curve polarografiche dell'acido fumarico.

n. 1, in tampone Na-acetato molare/acido acetico glaciale fino a pH = 5,54;

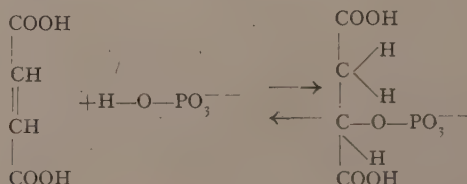
n. 2, in tampone fosfati molari allo stesso pH.

quali, riportando su un sistema di assi cartesiani i $\pi_{1/2}$ dell'acido fumarico e maleico in funzione del pH, osservarono come a pH = 8,68, ottenuto a differenza di tutti gli altri pH presi in considerazione da questi Autori, con tampone fosfati, il punto relativo sia al di sopra della curva abbastanza regolare congiungente i valori del $\pi_{1/2}$ agli altri pH.

Nel corso della nostra ricerca si è osservato che l'acido maleico, nelle stesse condizioni usate per l'acido fumarico, non presenta lo stesso fenomeno: cioè l'acido maleico in presenza di tampone fosfati molari dà la stessa onda di quella ottenuta con tampone NH_4Cl molare; da cui deduciamo che alla possibi-

lità di formazione del complesso con i fosfati non è estranea la configurazione sterica dei due acidi *cis-trans*-isomeri.

Il complesso, che l'acido fumarico formerebbe con l'ione fosforico, potrebbe essere, secondo noi, di questo tipo:



CONCLUSIONI E CONSIDERAZIONI. — I. La riduzione polarografica dell'acido fumarico è influenzata dalla natura del tampone usato. Il tampone fosfati molari tende a spostare tale riduzione verso potenziali più negativi di quelli ai quali avviene in presenza di tampone NH_4Cl molare/ NH_3 conc. nell'intervallo di pH esaminato ($\text{pH} = 6,80 \div 8,20$).

II. In base ai risultati ottenuti in particolari condizioni sperimentali si è potuto dedurre che tale spostamento verso potenziali più negativi da parte dei fosfati non dipende da una causa cinetica dovuta al depauperamento degli ioni idrogenici all'interfase goccia di Hg/soluzione, ma deve dipendere con ogni probabilità dalla formazione di un complesso tra l'acido fumarico e l'ione fosforico. Tale complesso avrebbe un potenziale di riduzione spostato verso valori più negativi che l'acido fumarico.

Su eventuali complessi dell'ione fosforico col legame etilenico, quale è presente nell'acido fumarico, non ci risultano esempi nella letteratura chimica, il che non meraviglia qualora si ammetta che tali complessi sono notevolmente instabili.

III. La riduzione dell'acido maleico a differenza dell'acido fumarico non è influenzata dal tampone fosforico.

IV. La probabilità dell'esistenza, sia pure labile e rilevabile solo mediante il metodo polarografico, di un complesso tra legame etilenico e l'anione fosforico è certamente di notevole interesse biologico, in quanto un nuovo tipo di complesso fosforico verrebbe ad aggiungersi agli altri che l'acido fosforico dà con parecchie sostanze organiche di interesse biochimico.

V. Poichè polarograficamente l'acido fosforico ostacola la riducibilità dell'acido fumarico, se tale azione fosse lecito estendere senza una qualche riserva alla riducibilità dell'acido fumarico: negli organismi nei quali son sempre presenti ioni fosforici, si potrebbe pensare che l'acido fosforico ostacoli la ritrasformazione dell'acido fumarico verso l'acido succinico da cui cronologicamente deriva nella serie dei processi metabolici. In tal modo l'acido fumarico potrebbe incontrare minori resistenze nella partecipazione ad altri processi cui esso di solito soggiace nel metabolismo, ad esempio alla sua ossidazione ad acido malico, ossal-acetico ecc.

Biochimica. — *Un nuovo enzima capace di ossidare l'acido urico nel fegato di «Emys europaea»: l'uricossidasi (*)*. Nota di GIUSEPPE RICCI, presentata (**) dal Corrisp. A. CLEMENTI.

Con ricerche precedenti [1] ho iniziato l'indagine sull'eventuale presenza dell'enzima uricolitico nel fegato dei Cheloni. Sono stato indotto allo studio di questo argomento dalle ricerche di Clementi [2], le quali avevano dimostrato, che nel fegato dei Cheloni è presente l'arginasi e che il metabolismo azotato di questi rettili è contemporaneamente ureotelico come quello degli Anfibi (in armonia con la legge dell'arginasi epatica dallo stesso ricercatore enunciata [3]) e uricotelico come quello dei Rettili superiori: si presentava perciò interessante stabilire, se il fegato dei Cheloni è dotato della capacità di ossidare l'acido urico, analogamente al fegato degli Anfibi, o se questa proprietà, che non si riscontra nei Rettili degli ordini superiori, sia già scomparsa nell'organismo dei Cheloni. Questo problema, d'altra parte, era stato trascurato dai ricercatori che avevano precedentemente studiato il sistema uricolitico dei Rettili (Przylecki [4], Florkin e Duchateau [5]). Le mie precedenti ricerche, limitate alla *Testudo graeca*, dimostrarono che nel fegato dei Cheloni terrestri non è presente alcun enzima capace di degradare l'acido urico. Di maggiore interesse si presentava la ricerca della capacità uricolitica nei Cheloni acquatici, in quanto non si poteva escludere un comportamento diverso da quello dei Cheloni terrestri e dei Rettili superiori, dato che il loro ambiente naturale è l'acqua. Mi sono proposto perciò di studiare l'eventuale capacità del fegato dei Cheloni d'acqua dolce (*Emys europaea*) a degradare l'acido urico.

PRIMA SERIE DI ESPERIENZE. — UN NUOVO ENZIMA URICOLITICO: L'URICOSSIDASI. — Con diverse modalità di tecnica ho eseguito numerosi esperimenti, impiegando o l'omogeneizzato del fegato o il succo ottenuto con la micropressa di Buchner. I campioni attivi venivano preparati con aggiunta di acido urico sciolto in NaOH 0,1 N, di soluzione di Ringer e di soluzione tampone a pH 9; quelli di controllo erano ottenuti per inattivazione da calore o per aggiunta di NaCN, oppure erano preparati senza succo, con l'impiego di ovoalbumina sciolta in soluzione di Ringer, cui si aggiungeva l'acido urico e la soluzione tampone. Nelle tabelle sono riportati, come esempio, alcuni degli esperimenti eseguiti. I risultati si possono così riassumere:

1° nei campioni attivi di fegato di *Emys*, dopo due giorni di permanenza in termostato a 37° C sotto toluolo a pH 9, l'acido urico aggiunto risulta diminuito di circa il 50 %, mentre nei campioni di controllo non si osserva alcuna sensibile diminuzione (Tabella I). Questo fatto dimostra che nel fegato di *Emys* è presente un principio termolabile, cioè un enzima, ad azione uricolitica;

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Catania.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

2° nei campioni stessi, dopo permanenza in termostato, la ricerca dell'allantoina risulta sempre negativa (Tabella I). Poichè il fegato di *Emys* non ha la proprietà di degradare o di fissare l'allantoina (come ho potuto assicurarmi con esperimenti adeguati), questa, sicuramente, non è il prodotto che si forma per azione dell'enzima del fegato di *Emys* sull'acido urico; questo enzima è quindi certamente diverso dall'uricasi, presente negli Anfibi e nella maggior parte dei Mammiferi;

3° se i campioni di fegato attivi, dopo permanenza in termostato, si sottopongono a riscaldamento in ambiente acido, si ha formazione di allantoina (Tabella II). Questo fatto dimostra che per azione dell'enzima del fegato di *Emys* sull'acido urico ha origine un composto, il quale è capace di trasformarsi in allantoina in determinate condizioni;

4° dai cianuri l'enzima viene parzialmente inibito, in quanto la molecola dell'acido urico viene degradata, ma la degradazione si arresta con la formazione di un composto intermedio dotato di potere riducente, come l'acido urico; esso però, a differenza dell'acido urico, si decompone per riscaldamento in ambiente acido (Tabella III). Questo fatto rappresenta un'ulteriore conferma, che l'enzima presente nel fegato di *Emys*, che propongo sia chiamato uricossidasi, è diverso dall'uricasi; infatti quest'ultima è in modo assoluto inibita dai cianuri (Keilin e Hartree [6]).

TABELLA I.

Ricerca dell'enzima uricolitico nel fegato di «Emys europaea».

Esperimento	Peso del fegato g.	Soluz. di Ringer cc.	Campioni esaminati (1)	Acido urico aggiunto mg.	Acido urico dosato (2)			Acido urico degradato		Ricerca dell'allan- toina
					nella fra- zione ana- lizzata mg.	nel volume totale mg.		mg.	in ‰	
I	14	28	1° Omogeneizzato cc. 9 + soluz. tampone a pH 9 cc. 10	10	0,008	4,0		6,0	60	negativa
			2° come il 1°	10	0,009	4,5		5,5	55	negativa
			3° come il 1° con omo- geneizzato bollito . .	10	0,018	9,0				negativa
			4° come il 1° + NaCN 1 : 5000	10	0,019	9,5				negativa
			5° ovoalbumina g. 1 + so- luz. di Ringer cc. 8 + soluz. tampone cc. 10	10	0,018	9,0				negativa

(1) I campioni sono stati posti in termostato a 37° C. sotto toluolo per 72 h.

(2) Col micrometodo colorimetrico di Folin [10] dopo deproteinizzazione alla Folin e Wu [11].

TABELLA II.

Individuazione dell'uricossidasi del fegato di «Emys europaea».

Esperimento	Peso del fegato g.	Succo ottenuto dal fegato con la micropressa di Buchner cc.	Campioni esaminati (1)	Acido urico aggiunto mg.	Ricerca dell'allantoina (2)		Allantoina dosata mg.
					direttamente	dopo riscal- damento con HCl 10%	
II	12	6	1° Succo cc. 1,5 + soluz. di Ringer cc. 2,5 + soluz. tampone a pH 9 cc. 3	5		positiva	1,2
			2° come il 1°	5		positiva	1,2
			3° come il 1°	5	negativa		0
			4° come il 1° con succo bollito	5		negativa	(0,2)

(1) Posti in termostato a 37° C sotto toluolo per 72 h.

(2) Col metodo di Fosse [12], all'allantoinasi.

TABELLA III.

Effetto degli ioni CN⁻ sull'azione dell'uricossidasi.

Esperimento	Peso del fegato g.	Succo ottenuto dal fegato con la micropressa di Buchner cc.	Campioni esaminati (1)	Acido urico aggiunto mg.	Acido urico dosato (2)			Acido urico degradato mg.
					direttamente mg.	dopo riscalda- mento con HCl 1% in ambiente di:		
						aria mg.	H ₂ mg.	
III	24	10	1° cc. 2 di succo + cc. 3 di soluz. di Ringer + cc. 8 di soluz. tam- pone a pH 9	2		0,3		1,5
			2° come il 1° + NaCN 1 : 5000	2		0,8		1,0
			3° come il 1° + NaCN 1 : 5000	2			1,0	0,8
			4° ovoalbumina g. 0,2 + cc. 5 di soluz. di Ringer + cc. 8 di soluz. tampone	2		1,8		
			5° come il 1° + NaCN 1 : 5000	2	1,8			

(1) Posti in termostato a 37° C sotto toluolo per 48 h.

(2) Col micrometodo colorimetrico di Folin.

SECONDA SERIE DI ESPERIENZE. — STUDIO DEL MECCANISMO D'AZIONE DELL'URICOSSIDRASI. — Con ulteriori esperimenti mi sono proposto di studiare il meccanismo d'azione dell'uricossidrasi, per cercare di chiarire la natura delle reazioni, per effetto delle quali si attua la degradazione enzimatica dell'acido urico, ed eventualmente individuare il prodotto ultimo della degradazione stessa. I numerosi esperimenti eseguiti (di cui solo qualcuno è riportato nelle tabelle, come esempio) mi hanno permesso di stabilire i seguenti fatti:

1° l'uricossidrasi in ambiente privo di O_2 è del tutto inattiva e in tali condizioni l'acido urico, aggiunto all'omogeneizzato o al succo di pressa del fegato, rimane immutato;

2° in seguito all'azione dell'enzima sull'acido urico in presenza di NaCN, ha origine un composto dotato di potere riducente, che per successivo riscaldamento in ambiente acido si decompone; tale decomposizione è favorita dalla presenza dell' O_2 (Tabella III);

3° il prodotto cui conduce l'azione enzimatica in presenza di NaCN non è precipitabile, a differenza dell'acido urico, allo stato di sale di ammonio (Tabella IV);

4° se all'azione dell'enzima sull'acido urico si fa seguire il riscaldamento in ambiente acido, ha luogo formazione di allantoina; in questo caso la trasformazione non è favorita dalla presenza dell' O_2 ; questo fatto dimostra che la molecola dell'acido urico ha già subito un processo ossidativo per azione dell'enzima.

TABELLA IV.

Effetto degli ioni CN^- sull'azione dell'uricossidrasi.

Esperimento	Peso del fegato	Succo ottenuto dal fegato con la micropressa di Buchner	Campioni esaminati (1)	Acido urico aggiunto	Dosaggio dell'acido urico (2)				Acido urico degradato	
					Volume totale dopo precipitazione	Volume del filtrato	Acido urico dosato			
							nel volume parziale	nel volume totale	mg.	in ‰
g.	cc.			mg.	cc.	cc.	mg.	mg.	mg.	in ‰
IV	18	9	1° cc. 3 di succo + cc. 4 di soluz. di Ringer + cc. 10 di soluz. tampone a pH 9 . . .	20	52	49	10,5	11,1	8,9	44,5
			2° come il 1° + NaCN 1 : 5000 .	20	54	51	13,5	14,8	5,2	26,0
			3° ovoalbumina g. 0,2 + soluz. di Ringer cc. 7 + soluz. tampone cc. 10 .	20	52	50	19,1	19,8		

(1) Posti in termostato a 37° C sotto toluolo per 96 h.

(2) Col metodo di Folin-Shaffer modificato (Ricceri, [13]).

TABELLA V.

Ricerca dell'uricossidasi nel fegato di «Emys europaea» durante il letargo.

Esperimento	Peso del fegato g.	Succo ottenuto dal fegato con la micropressa di Buchner cc.	Campioni esaminati (1)	Acido urico aggiunto mg.	Acido urico dosato (2)		Acido urico degra- dato mg.	Osservazioni
					direttamente mg.	dopo ri- scaldamento con HCl 1 % mg.		
V 19-12 1951	12	6	1° cc. 1,5 di succo + cc. 2,5 di soluz. di Ringer + cc. 4 di soluz. tampone a pH 9	2	1,8		0	
			2° come il 1° . . .	2		1,7	0	
			3° come il 1° con suc- co bollito	2	1,8			
			4° come il 1° con suc- co bollito	2		1,7		
VI 4-1 1952	18	8	1° cc. 2 di succo + cc. 2 di soluz. di Ringer + cc. 6 di soluz. tampone a pH 9	2	1,65		0,20	
			2° come il 1° . . .	2		1,50	0,30	
			3° come il 1° con suc- co bollito	2	1,85			
			4° come il 1° con suc- co bollito	2		1,80		
VII 29-12 1951	9	4	1° cc. 2 di succo + cc. 3 di soluz. di Ringer + cc. 5 di soluz. tampone a pH 9	2	1,20		0,70	Esemplare sacrificato dopo perma- nenza alla temperatura di 27° C per 5 giorni.
			2° come il 1° con suc- co bollito	2	1,90			

(1) Posti in termostato a 37° C sotto toluolo per 72 h (Esp. V e VI) o per 48 h (Esp. VII).

(2) Col micrometodo colorimetrico di Folin.

I risultati di questa seconda serie di esperienze permettono di affermare che la degradazione dell'acido urico per azione dell'uricossidasi comprende almeno due fasi diverse, di cui la prima si può interpretare come un processo di idratazione, mentre l'altra è di natura ossidativa e conduce alla formazione di un prodotto capace di dare luogo ad allantoina per riscaldamento in ambiente acido.

TERZA SERIE DI ESPERIENZE. — L'URICOSSIDASI NEL FEGATO DI *Emys europaea* DURANTE IL LETARGO. — Nel continuare le ricerche sull'uricossidasi durante il periodo invernale, ho potuto osservare che in alcuni esemplari di *Emys* non era possibile mettere in evidenza l'enzima, mentre in altri esemplari l'attività enzimatica si presentava notevolmente attenuata e di molto inferiore che nel periodo estivo (Tabella V). Il diverso comportamento presentato dai vari esemplari (della stessa specie) non si è potuto mettere in rapporto né col sesso, né con l'età degli animali; esso si può spiegare considerando che questi possono entrare in letargo più o meno profondamente, con un rallentamento più o meno marcato dei processi vitali, a loro volta in relazione con le diverse attività enzimatiche.

È notevole il fatto che l'enzima riappare, se l'animale viene posto per cinque giorni alla temperatura di circa 27°C e in presenza dell'acqua (Tabella V). Viceversa, l'effetto di una temperatura di circa 8°-10°C (cioè più bassa di quella media invernale degli ambienti interni della nostra regione) prolungata anche per 15 giorni nel periodo finale del letargo, non pare che abbia avuto influenza nel favorire la scomparsa dell'enzima.

Per questo particolare comportamento, l'uricossidasi rappresenta un enzima caratteristico, la cui presenza è strettamente connessa alle condizioni fisiologiche dell'organismo.

CONSIDERAZIONI. — A differenza dunque dei Cheloni terrestri e dei Rettili degli ordini superiori, i Cheloni d'acqua dolce possiedono nel fegato un enzima uricolitico. Tale caratteristica biochimica si può mettere in relazione con l'ambiente in cui questi vertebrati vivono. Infatti secondo le vedute di Delaunay [7], di Baldwin [8] e di Clementi [9], la formazione e l'escrezione dell'acido urico negli organismi animali è connessa con la diminuita disponibilità di acqua: sia in quanto l'acido urico, poco solubile, viene escreto in massima parte non disciolto nell'acqua (Delaunay e Baldwin), sia in quanto, secondo Clementi, essendo la sintesi dell'acido urico accompagnata da formazione di acqua in maggiore quantità rispetto alla sintesi dell'urea, la diminuita disponibilità di acqua avrà potuto determinare, nella filogenesi, la sintesi stessa, secondo il principio di Le Chatelier. Nei Cheloni d'acqua dolce, la cui vita si svolge nell'acqua, la necessità dell'eliminazione dell'acido urico come tale viene a mancare; ed è presente l'enzima in quale, appunto con l'intervento dell'acqua, tende a degradarlo.

Riguardo al meccanismo di tale degradazione, esso si può interpretare come un'ossi-idratazione, cosicché l'uricossidasi è da considerare come un

enzima capace di idratare e di ossidare l'acido urico, analogamente all'uricasi, ma incapace, a differenza di quest'ultima, di decarbossilare il prodotto formatosi.

CONCLUSIONI. - 1° Nel fegato dei Cheloni d'acqua dolce (*Emys europaea*) è presente un nuovo enzima ad azione uricolitica, il quale in presenza di O_2 trasforma l'acido urico in un composto privo di potere riducente;

2° l'allantoina, sicuramente non è il prodotto che ha origine dall'acido urico per azione dell'enzima del fegato di *Emys*; questo enzima è quindi certamente diverso dall'enzima uricolitico presente negli Anfibi e nella maggior parte dei Mammiferi (uricasi);

3° il meccanismo dell'azione enzimatica si può ricondurre a due fasi fondamentali: la prima, non inibita da HCN, dà luogo a un composto riducente; essa perciò non è di natura ossidativa e si può interpretare come dovuta a un processo di idratazione; la seconda, inibita da HCN, conduce a un composto privo di potere riducente ed è di natura ossidativa. Si è proposto perciò che a questo nuovo enzima sia dato il nome di uricossidrasi;

4° negli esemplari di *Emys* in letargo, l'attività dell'uricossidrasi si attenua notevolmente, fino a scomparire;

5° la presenza di tale enzima uricolitico nel fegato costituisce una caratteristica biochimica, che distingue fundamentalmente i Cheloni di acqua dolce sia dai Cheloni terrestri, sia dai Rettili degli ordini superiori.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. RICCERI, « Boll. Soc. ital. Biol. sper. », 25, 1505 (1949); « Arch. Sc. Biol. », 36, 23 (1952).
- [2] A. CLEMENTI, « Boll. Soc. ital. Biol. sper. », 3, 938 (1928); « Arch. Sc. Biol. », 14, 171 (1929); « Atti XIV Congr. Fisiol. », Roma 1932; « Arch. Sc. Biol. », 18, 98 (1933); « Boll. Soc. ital. Biol. sper. », 25, 1503 (1949); « Arch. Sc. Biol. », 36, 10 (1952).
- [3] A. CLEMENTI, « Atti IX Congr. intern. Fisiol. », 1913; « Rend. R. Acc. Lincei », (s. 5^a) 23, 517 e 612 (1914); « Arch. Fisiol. », 13, 189 (1915).
- [4] ST. J., PRZYLECKI « Arch. intern. Physiol. », 24, 317 (1925).
- [5] M. FLORKIN e G. DUCHATEAU, « Arch. intern. Physiol. », 27, 159 (1926).
- [6] D. KEILIN e E. F. HARTREE, « Proc. Roy. Soc. » (London), B, 119, 114 (1935).
- [7] DELAUNAY, « Ann. Physiol. et Physicochim. », 10, 635 (1934).
- [8] E. BALDWIN, *An introduction to comparative Biochemistry*, Cambridge 1948; *Dynamic aspects of Biochemistry*, Cambridge 1948 (p. 266).
- [9] A. CLEMENTI, « Boll. Soc. ital. Biol. sper. », 26, 448 (1950).
- [10] O. FOLIN, « J. Biol. Chem. », 54, 153 (1922).
- [11] O. FOLIN e WU, « J. Biol. Chem. », 38, 81 (1919).
- [12] R. FOSSE, A. BRUNEL, P. DE GRAEVE, P. THOMAS e J. SARAZIN, « Compt. rend. Acad. », 191, 1388 (1930).
- [13] G. RICCERI, « Boll. Soc. ital. Biol. sper. », 25, 483 (1949).

Biologia generale. — *Variazioni della competenza arto-formativa negli Anfibi Anuri*^(*). Nota di TEODORO PERRI, presentata^(**) dal Socio G. COTRONEI.

Lo scopo di questa Nota è di esporre, tenendo conto dei nuovi risultati ottenuti, come varia negli Anfibi Anuri la competenza arto formativa, a seconda della specie sulla quale si esperimenta.

Nelle mie ricerche⁽¹⁾ sull'induzione di arti soprannumerari negli Anfibi Anuri, nelle quali come sorgente di stimolo ho usato soprattutto abbozzi cefalici che vanno in citolisi perchè röntgenirradiati con dosi nettamente letali, ho notato, come più volte ho detto, grandissime differenze a seconda delle specie esaminate. Quest'anno ho esteso l'esame comparativo, particolarmente in *Hyla arborea* e in *Discoglossus pictus* nei quali ho avuto interessanti risultati, ed ho iniziato ricerche con trapianti eteroplastici, e precisamente trapianti di abbozzi röntgenirradiati di *Rana esculenta* sul tronco di embrioni normali di *Hyla*.

Debbo premettere che nella competenza arto-formativa della somatopleura si hanno anzitutto variazioni nel senso che si possono avere, a seconda del territorio embrionale interessato, sia arti anteriori che posteriori. Inoltre, nell'ambito di uno stesso embrione, nella regione posteriore del tronco si ha una facilità ad avere arti soprannumerari maggiore che nelle altre zone. Preciso che in questo lavoro mi riferisco alla diversa facilità con cui si hanno a seconda della specie interessata. In concreto, esamino la frequenza con cui si ottengono arti soprannumerari nella metà posteriore del tronco mediante il trapianto della parte apicale della testa di embrioni fortemente röntgenirradiati, operando allo stadio di bottone codale piccolissimo; viene così studiato come varia nelle diverse specie di Anfibi la soglia della competenza arto-formativa. È legge di biologia generale che per aversi un effetto occorre che lo stimolo superi una certa soglia: nell'ambito dell'induzione di arti soprannumerari l'uso di uno stimolo più forte ha potuto mettere in evidenza una competenza arto-formativa della somatopleura, che invece stimoli meno energici non avevano rivelato. Lo stimolo da me usato, costituito dal graduale citolizzarsi di abbozzi fortemente röntgenirradiati, si è manifestato di potenza assai notevole.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « B. Grassi » dell'Università di Roma, con contributi del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) T. PERRI, in questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. I, p. 995 (1946); ivi, vol. III, p. 613 (1947); ivi, vol. IV, p. 585 (1948); ivi, vol. 5, p. 442 (1948); ivi, vol. VII, p. 157 (1949); ivi, vol. VIII, p. 65 (1950 a); ivi, vol. VIII, p. 394 (1950 b); ivi, vol. X, p. 64 (1951); « Arch. Zool. Ital. », vol. XXXIII, 1948; « Memorie Accad. Naz. Lincei », vol. III, fasc. 2, sez. III, 1951; « La Ricerca Scientifica », vol. 22, 1952 a; « Riv. di Biologia », 1952 b, in stampa.

Dei dati bibliografici ricordo che il Balinsky nelle sue ricerche d'induzione di arti soprannumerari negli Urodeli mediante trapianto dell'otocisti (dal 1925 in poi), eseguì pure ⁽²⁾ il trapianto di otocisti di *Rana* e di *Hyla* su *Triton* ed ebbe alcuni casi positivi d'induzione. Non eseguì i trapianti inversi, perchè negli Anuri non aveva ottenuto alcun risultato positivo; in effetti si conosceva in questi, prima delle mie ricerche, un solo caso positivo ottenuto dal Filatow ⁽³⁾ in *Bufo vulgaris* mediante trapianto dell'abbozzo dell'ipofisi. Il Ruud ⁽⁴⁾, nel 1931, osservò che la Kaan nelle sue esperienze di trapianti eteroplastici di otocisti su *Amblystoma punctatum* non aveva segnalato nessun caso di arto soprannumerario; ma il Glick ⁽⁵⁾ proprio su questa stessa specie ne ebbe molti casi mediante il trapianto del placode olfattorio.

Vediamo ora le differenze che sono emerse dalle mie ricerche in varie specie di Anfibi Anuri.

Bufo vulgaris. - È la specie nella quale ebbi il maggior numero di casi di arti soprannumerari. La percentuale delle induzioni raggiunse, in singoli lotti di esperienze, fin quasi il 100 %. La tecnica che mi diede i migliori risultati fu quella del trapianto della parte apicale della testa di embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali.

Bufo viridis. - In questa specie ebbi invece induzioni di scarsissima entità: nel caso rimasto finora il migliore, ebbi che l'arto indotto cominciava a presentarsi distinto nei suoi tre segmenti.

Bufo vulgaris ♀ × *Bufo viridis* ♂. - In questi ibridi vitali ho eseguito il trapianto della parte apicale della testa di embrioni röntgenirradiati di *Bufo vulgaris*. Su quattro esperienze ebbi due casi positivi d'induzione di arti soprannumerari ben conformati. La loro peculiare importanza sta nel fatto che è interessante studiare come si trasmetta la competenza arto formativa nell'ibridazione tra specie che la presentano in misura chiaramente diversa. Tutto lascia ritenere che si conservi il grado di competenza arto-formativa della specie materna, e ciò è d'accordo con il fatto che sino al termine della vita embrionale questi ibridi presentano esclusivamente (Montalenti ⁽⁶⁾) caratteri morfologici materni, ed è da ricordare che è durante la vita embrionale che si ha l'induzione degli arti sia normali che soprannumerari.

Hyla arborea. - In una precedente pubblicazione riferii che in questa specie avevo ottenuto, su due casi di trapianto, un caso d'induzione di un arto soprannumerario. Recentemente ho eseguito altri casi di trapianto con la stessa tecnica, cioè trapianto della parte apicale della testa di embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali. Su sei trapianti ho avuto in tre larve l'induzione di arti soprannumerari: nel caso che ha già raggiunto un discreto sviluppo, l'arto, che è a notevole distanza dagli arti normali, è ad

(2) B. J. BALINSKY, « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 110, p. 63 (1927).

(3) D. FILATOW, ivi, vol. 127, p. 776 (1933).

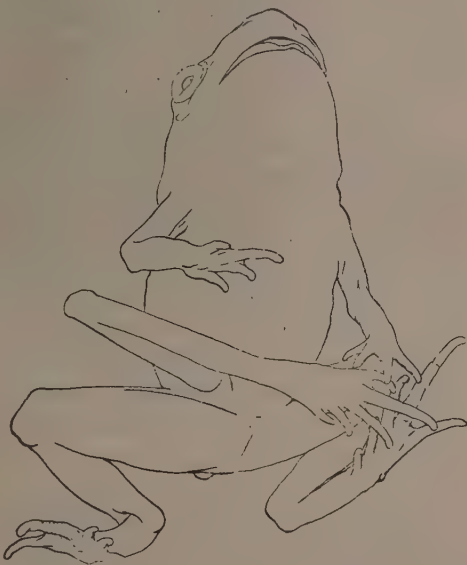
(4) G. RUUD, ivi, vol. 124, p. 522 (1931).

(5) B. GLICK, « Anat. Rec. », vol. 48, p. 407 (1931).

(6) G. MONTALENTI, « Arch. Zool. Ital. », vol. 26 (1939).

inizio digitazione, ben conformato, ed è un arto controlaterale. Adunque in questa specie si sono avuti complessivamente 4 casi d'induzione su 8. È chiaro che sono numeri troppo piccoli per stabilire una percentuale; tuttavia questi dati permettono di affermare che la frequenza dei casi positivi che si ottengono in *Hyla* è notevole. Come dirò in seguito, su questa specie ho pure eseguito trapianti usando come donatori embrioni röntgenirradiati di *Rana esculenta*, con un risultato positivo d'induzione.

Discoglossus pictus. — In questa specie ho avuto quest'anno un caso chiarissimo d'induzione di un arto soprannumerario usando la tecnica del trapianto della parte apicale della testa di embrione röntgenirradiato con dose nettamente letale. Ne avevo parlato in una mia recente pubblicazione (1952, b) ⁽¹⁾, mentre era allo stadio di abbozzo; l'ho successivamente fissato in metamorfosi (v. figura). Sulla zona del trapianto, eseguito nella metà posteriore del tronco, a destra, si è sviluppato un tipico arto posteriore sinistro, cioè controlaterale, ben differenziato in tutte le sue parti, rigido, esile. È rimasto chiaramente distante dal vicino arto posteriore. All'esame istologico si osserva la presenza di un emicinto posteriore completo e chiaramente indipendente dal normale, e si ribadisce l'ottimo sviluppo raggiunto dall'arto. La sua muscolatura, pur essendo meno sviluppata del normale,



Discoglossus pictus con arto soprannumerario sorto in seguito a trapianto (a bottone codale piccolissimo) della parte apicale della testa di embrione röntgenirradiato.

è tuttavia di notevole entità; si osserva che nel portatore la muscolatura ventrale del tronco è, sul lato destro, assai deficiente, specie a carico del muscolo retto, un tratto del quale s'inserisce sull'emicinto soprannumerario. Un altro caso di arto soprannumerario in *Discoglossus pictus* è stato ottenuto, con la stessa tecnica, dalla sig.na L. Dei, interna in questo Istituto. Nel 1950 era stato descritto un caso di arto soprannumerario in seguito a trapianto di coda, in questa stessa specie, dalla Farinelli-Ferruzzi ⁽²⁾, che rimase però in dubbio se non si trattasse di uno sdoppiamento del normale abbozzo dell'arto. Il caso che ho descritto non lascia alcun dubbio; è certamente un'induzione da stimoli abnormi, indipendentemente dagli abbozzi

(7) N. FARINELLI-FERRUZZI, « Boll. di Zool. », vol. 17, p. 113 (1950).

degli arti normali; ed è perciò dimostrato in modo esauriente che la specie *Discoglossus pictus* è una di quelle ove sono sicuramente possibili le induzioni di arti soprannumerari, così come avviene in *Bufo vulgaris* ed altre specie di Anfibi.

Rana agilis. - Vi ho recentemente eseguito esperienze di trapianto della parte apicale della testa di embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali. Ne ho eseguito pochi casi, tutti con risultato negativo. Queste esperienze saranno ripetute per poter decidere con sicurezza se in questa specie si ha effettivamente un comportamento simile a quello di *Rana esculenta*.

Rana esculenta. - In questa specie, come ho detto più volte, non sono finora riuscito ad ottenere l'induzione di arti soprannumerari pur avendo usata la stessa tecnica che in *Bufo vulgaris* e nelle altre specie (ved. appresso nelle Considerazioni).

Mi fu portato un esemplare di *Rana esculenta* maschio, raccolto nella campagna dell'Alto Lazio, presentante una coppia di arti posteriori soprannumerari, in simmetria speculare secondo le leggi del Bateson; assai ben conformati e con movimenti spontanei benchè limitati. Praticai la fecondazione artificiale con uova di una *Rana esculenta* normale, ma purtroppo essa non avvenne perchè le uova non erano, in realtà, in buone condizioni; difatti non si fecondarono neppure le uova che per controllo portai a contatto con spermatozoi di una *Rana esculenta* normale; inoltre gli spermatozoi della rana con arti soprannumerari risultarono, all'esame microscopico, dotati di normale mobilità. Volevo vedere se emergesse qualche dato sulla trasmissione genetica, ritenuta possibile da qualche autore (ved. appresso), della polimelia, ma tale tentativo non è riuscito.

CONSIDERAZIONI. - È innanzitutto opportuno qualche breve riferimento alla frequenza dei casi di arti soprannumerari trovati in natura nelle varie specie di Anfibi Anuri. La massima parte dei casi descritti riguarda *Rana esculenta*; per *Bufo vulgaris* e *Bufo viridis* ne sono registrati dal Przibram⁽⁸⁾ un caso ciascuno; in *Discoglossus pictus* ne fu descritto uno da Avel e Bauer nel 1929 (cit. da Canella, p. 27)⁽⁹⁾; e in *Hyla arborea* non mi pare se ne conosca alcuno. Purtroppo sfugge il numero degli individui di ciascuna specie capitati all'osservazione degli studiosi, onde l'impossibilità di stabilire, sia pure molto all'ingrosso, una percentuale dei casi. Dati più significativi risultano dagli autori che eseguirono ampi allevamenti o che tennero conto del numero degli individui esaminati. Così il Reichenow⁽¹⁰⁾ riferisce che su parecchie migliaia di larve metamorfosate di *Rana esculenta* (da fecondazione artificiale) osservò solo due casi con arti soprannumerari. Il Rostand (1949)⁽¹¹⁾ su circa 44.000 rospi comuni (*Bufo bufo*) non ne trovò nessun caso; e nella

(8) H. PRZIBRAM, « Arch. f. Entw. mech. », vol. 48, 1921.

(9) M. F. CANELLA, « Scritti Biologici », vol. 12, 1937.

(10) E. REICHENOW, « Zool. Anz. », vol. 32, p. 677 (1908).

(11) J. ROSTAND, « C. r. Soc. de Biol. », vol. 143, p. 758 (1949).

discendenza di un maschio polidattilo ne osservò uno soltanto ⁽¹²⁾. I dati sopra riferiti non permettono, a parer mio, di stabilire in modo concreto una scala di frequenza di arti soprannumerari in natura a seconda della specie esaminata; si può solo dire che sono del tutto eccezionali.

Occorre inoltre tener presente, pur essendosi descritti casi di arti soprannumerari (in natura) in sede anomala, che la stragrande maggioranza dei reperi è di arti soprannumerari sviluppatasi nella zona normale degli arti anteriori o dei posteriori; invece nei casi ottenuti sperimentalmente da Balinsky, Filatow, Choi, da me e da altri si tratta di formazioni soprannumerarie che possono essere indotte sia vicino alla normale zona degli arti sia a distanza da essi. Non si hanno ancora dati sufficienti per decidere se nei casi trovati in natura trattasi di una conseguenza del fatto che nelle immediate vicinanze degli arti vi è una maggiore capacità (o competenza) arto-formativa; oppure se essi, come sostengono vari autori, siano riferibili a sdoppiamenti o triplicazioni di arti già in sviluppo. È stata pure emessa l'ipotesi (recentemente dal Rostand ⁽¹²⁾) che almeno in alcuni casi si tratti di trasmissione genetica: come già dissi, io non potei utilmente sfruttare il mio caso, ma è sperabile che altri ne abbia la possibilità, tanto meglio se capitassero con arti soprannumerari sia il maschio che la femmina. Ricordo che Saint Hilaire riferì che nella discendenza di alcune galline pigomiche non si ebbero individui mostruosi.

Lasciando adunque da parte, almeno per ora, riferimenti ai casi trovati in natura, posso, in base ai risultati che ho raggiunto, asserire che quello che più concretamente è emerso, è che esiste una enorme differenza nella frequenza d'induzione secondo la specie esaminata. Frequenza altissima, si può dire del 100 % per alcuni lotti di esperienze, in *Bufo vulgaris*; molto notevole in *Hyla arborea*; di gran lunga minore in *Discoglossus pictus* e in *Bufo viridis*; nessuna in *Rana esculenta* e nessuna, probabilmente, in *Rana agilis*.

Ho iniziato esperienze di trapianto della parte apicale della testa di embrioni röntgenirradiati di *Rana esculenta* sul tronco di embrioni di *Hyla arborea*. Ho già osservato una larva, che doveti fissare ancora giovane perché sofferente, con una gemma soprannumeraria di arto. Queste esperienze saranno continuate, ma già fin da ora mostrano che gli abbozzi röntgenirradiati di *Rana esculenta* posseggono la capacità di stimolare la somatopleura, onde il non aver avuto in detta specie casi positivi dipende dal fatto che in essa la soglia della competenza arto-formativa è assai più alta che in *Hyla* ed in altre specie. Questo risultato positivo d'induzione concorda con l'aver già notato (1949) ⁽¹⁾ che nei trapianti omoplastici in *Rana esculenta* da embrione röntgenirradiato su normale si ha, specie nei riguardi dell'acido ribonucleico, lo stesso comportamento che nei corrispondenti trapianti in *Bufo vulgaris* (1950 b) ⁽¹⁾. Questo risultato, qualunque sia l'interpretazione che si voglia dare ai fattori costituenti lo stimolo aspecifico che agisce sulla somatopleura, non infirma l'interpretazione che ho data sull'importanza della competenza arto-formativa, anche in rapporto allo stadio.

(12) J. ROSTAND, *ivi*, vol. 143, p. 666 (1949).

Dagli studi sulla determinazione dell'abbozzo lentogeno sono emerse, com'è noto, notevolissime differenze da specie a specie. Ciò particolarmente per *Rana esculenta*, che, in base alle ricerche dello Spemann (1912), era stata ritenuta l'unico Anfibio con sviluppo del cristallino indipendente dalla vescicola ottica. Nel 1925 il Filatow ⁽¹³⁾ mostrò che la vescicola ottica primaria di *Rana esculenta* (che non ha la capacità di determinare un cristallino sul suo ectoderma perioculare) ha invece la capacità d'indurlo su ectoderma del tronco di *Bufo vulgaris*. Nel 1934 ⁽¹⁴⁾ potei dimostrare che in *Rana esculenta* asportando il territorio retinico al primissimo inizio dello stadio di neurula, cioè in neurule più giovani di quelle usate dallo Spemann, non si ha lo sviluppo del cristallino; potei così dimostrare in maniera diretta che in *Rana esculenta* è sempre il territorio retinico che determina l'abbozzo lentogeno, ma in uno stadio più giovane che nelle altre specie. Risultati simili furono poi ottenuti dal Woerdeman ⁽¹⁵⁾.

Adunque per l'abbozzo lentogeno le differenze tra specie e specie sono essenzialmente riferibili al diverso stadio nel quale vengono a coesistere sia le capacità induttrici della vescicola ottica sia la competenza lentogena dell'ectoderma. Più o meno presto viene ad aversi una dissociazione tra questi due fattori; perchè le capacità induttrici della vescicola ottica durano a lungo (negli Urodeli anche nella vita adulta), mentre la competenza lentogena dell'ectoderma è sempre di breve durata.

Si ha qualcosa di simile nell'induzione degli arti soprannumerari da stimoli abnormi? Certamente vi hanno massima importanza le variazioni della soglia della competenza arto-formativa della somatopleura; tanto più che, come si è visto, gli abbozzi röntgenirradiati di *Rana esculenta* che non inducono arti soprannumerari nella propria specie, sono capaci d'indurli in *Hyla*.

La competenza ha certamente, come risulta da molte ricerche, variazioni quantitative durante lo sviluppo. Queste variazioni hanno importanza nei miei casi? In *Bufo vulgaris* ebbi casi positivi non solo sperimentando allo stadio di bottone codale piccolissimo, ma anche allo stadio di contrazioni da poco iniziate; ed in stadi ancora più avanzati li ha ottenuti, in questo stesso Istituto, la Sig.na Dei. È sperabile che continuando su queste direttive si possa chiarire il perchè della diversa frequenza dell'induzione di arti soprannumerari nelle varie specie; per ora, l'aver trovato che in *Rana esculenta*, in un certo stadio, abbozzi röntgenirradiati sono stimolanti efficienti della somatopleura di una specie diversa (di *Hyla*) e non della propria, è un fatto interessante, il quale ricorda quanto a proposito dell'abbozzo lentogeno proprio in *Rana esculenta* era stato visto dal Filatow e, con tutt'altro genere di ricerche, da me definitivamente dimostrato.

(13) D. FILATOW, « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 105, p. 475 (1925).

(14) Esperienze riferite dal prof. G. COTRONEI (« Monit. Zool. Ital. », suppl. al vol. 45, 1934, pp. 130-131) e da me in questi « Rendiconti », ser. VI, vol. XXIII, p. 155 (1936).

(15) M. W. WOERDEMAN, « Acta neerl. Morph. norm. et path. », vol. 4, p. 91 (1951).

CONCLUSIONI.

1° Sono stati descritti in questa Nota nuovi casi di arti soprannumerari in *Hyla arborea* ed in *Discoglossus pictus*.

2° Si è ottenuta l'induzione di una gemma soprannumeraria di arto mediante trapianto di abbozzi röntgenirradiati di *Rana esculenta* sul tronco di embrione di *Hyla arborea*.

3° Viene ribadito, con maggiore documentazione di prima, che le diversità nella frequenza d'induzione di arti soprannumerari nelle varie specie esaminate è da attribuirsi a differenze nella soglia della competenza artoformativa della somatopleura.

Biologia. — *Sul metabolismo dei pigmenti carotenoidi nella dorifora delle patate* («*Leptinotarsa decemlineata*» Say)^(*). Nota di CARMINA MANUNTA e M. IDA SOLINAS, presentata^(**) dal Socio G. QUAGLIARIELLO.

Non avendo avuto negli ultimi due anni occasione di continuare le ricerche — da Manunta iniziate nel 1947 e portate avanti in collaborazione prima con G. Morittu, poi con U. Solinas per un triennio — sul coleottero delle patate e non sapendo se si avrà presto o no opportunità di riprenderle, ci decidiamo a pubblicare i risultati da noi raggiunti nello studio di questo insetto così interessante dal punto di vista biologico generale ed anche da quello dell'entomologia agraria.

RICERCHE NEL 1947. — In una precedente Nota di Manunta e Morittu⁽¹⁾ sui pigmenti carotenoidi di *Leptinotarsa decemlineata* nelle larve raccolte in natura nel luglio 1947 veniva dimostrata la presenza, oltrechè del β -carotene — in accordo con le osservazioni di Palmer e Knight⁽²⁾ — anche di un altro pigmento carotenoidale che come la xantofilla dalla fase benzénica si trasferisce in alcool metilico 90 % con una colorazione giallo-rosa e dall'alcool viene di nuovo per inacquamento ritrasferito in benzina. Questo pigmento assorbito su CaCO_3 dà una zona rossa ciclamino il cui eluato in benzina 70-80° ad una osservazione diretta allo spettroscopio mostra una larga banda sfumata con massimo verso 497 $m\mu$ (dimostrando così una certa analogia con la fenicoxantina isolata da Manunta dal grasso di un fenicottero).

(*) Dal Centro di Genetica di Pavia e dall'Istituto di Biologia e Zoologia generale dell'Università di Sassari.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) C. MANUNTA e G. MORITTU, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. IV, fasc. 1, 1948.

(2) PALMER e KNIGHT, « J. Biol. Chem. », 59, 443 (1924).

Questo pigmento che impartisce alle soluzioni benzeniche una tonalità rosata fu dosato come licopene, poichè non permetteva l'uso della soluzione di azobenzolo che serve di confronto per le soluzioni di xantofille estratte da vegetali o anche da altro materiale secondo il metodo di Kuhn e Brockmann. Nei 150 individui che sono stati esaminati nel 1947 il pigmento totale - ad eccezione di tracce di xantofille provenienti dal cibo ingerito - è costituito da mgr. 0.60 di β -carotene e da mgr. 0.546 del secondo pigmento cui quasi certamente per la maggior parte è dovuta la colorazione intensamente rossiccia delle larve prese in esame.

RICERCHE NEL 1948. - Nel 1948 a S. Angelo Lodigiano furono raccolte in campi di patate larve di dorifore di tutte le età ed adulti dalla metà di agosto fin verso la metà di settembre. Ci è sembrato che le larve raccolte in questa località fossero assai meno rossiccie di quelle raccolte l'anno precedente altrove (B); inoltre si notò che alcuni esemplari si mostravano gialli, altri arancio. Questa nostra osservazione è anche confermata dall'esame dell'emolinfa: pungendo infatti le larve mature con un ago in corrispondenza del mesotorace e premendo lievemente, spillava da ogni individuo una piccola goccia di colore giallo intenso, giallo-arancio o arancio più intenso con riflessi color rubino a seconda che proveniva rispettivamente da una larva gialla, arancio-rosata, intensamente rossiccia. Avremmo voluto dosare comparativamente i pigmenti contenuti nelle tre categorie di esemplari, ma purtroppo le larve gialle e quelle arancio-chiaro erano in numero troppo esiguo (10-12) appena per una analisi comparata attendibile.

Le larve normalmente colorate, intensamente rosa e rossiccie, furono smistate in vari gruppi di individui a seconda del loro peso assunto ad indice dello stadio di sviluppo; ed il pigmento estratto dal loro corpo fu analizzato qualitativamente e quantitativamente, secondo il metodo precedentemente indicato. Dalle larve più grosse fu prelevato il sangue e dagli adulti le elitre e le ali ed anche il pigmento estratto da questi organi fu analizzato qualitativamente e quantitativamente, con il metodo indicato nel precedente lavoro.

Dalla tabella I che raccoglie i risultati dei valori analitici, risulta che il β -carotene va accumulandosi nel corso dello sviluppo larvale: da 0.009 mgr. per 100 larve assai giovani a mgr. 0.73 per 100 larve mature e mgr. 0.80 per 100 individui adulti. Il β -carotene oltre che nell'ipoderma si ritrova in notevole quantità anche nel sangue e nelle elitre (ad esso esclusivamente si deve la colorazione delle righe gialle delle elitre).

In quanto al secondo pigmento che indico come « endogeno » va esso pure aumentando se si fa eccezione di un dato sulle larve ancora giovani in cui è stato riscontrato solo in tracce nel corso dell'età, ma non così regolarmente come il β -carotene, giacchè ora se ne trova di più, ora di meno. Per esempio, la quantità in cento individui adulti (0.036) è pressapoco identica a quella che si rinviene nelle larve più giovani (0.037), mentre in larve molto più sviluppate se ne trovano quantità assai maggiori (0.133). Il pig-

mento è presente nell'emolinfa in quantità circa cinque volte inferiore a quella del β -carotene; invece nelle ali si riscontra in proporzioni lievemente superiori (0.042 per 100 paia mentre di β -carotene (0.034) e nelle elitre non è presente neanche in tracce.

TABELLA I.

Pigmenti carotenoidi in larve di «Leptinotarsa decemlineata» Say, raccolte a S. Angelo Lodigiano nell'agosto-settembre 1948.

Stadio svilup. parte del corpo	N. esempl.	Peso	β -carotene		Carotenoide « endogeno »	
			in mgr.	per 100 individui	in mgr. di licopene	per 100 individui
Larva corpo	124	0.8	0.011	0.009	0.047	0.037
	60	0.5	0.047	0.071	tracce	—
	66	1.45	0.037	0.060	0.044	0.061
	60	2.5	0.112	0.186	0.035	0.051
	135	9.7	0.387	0.290	0.180	0.133
	160	16	1.170	0.730	0.093	0.060
Larva emolinfa corpo . . .	3		0.235	7.800	0.047	1.600
Adulti corpo	150	22	1.200	0.800	0.054	0.036
Adulti ali (paia)	75		0.026	0.034	0.032	0.042
Adulti elitre (paia)	800		0.157	0.020	ness. tracce	—
Larve B corpo	320		1.760	0.550	0.195	0.060

Se poi confrontiamo l'unico dato ottenuto sulle dorifore raccolte nel 1947 con quelli sulle larve (a grado di sviluppo comparabile) del 1948:

larve 1947 da S. Angelo	carotene mgr	0.40	pigmento endogeno	0.260
» 1948 da S. Angelo	»	0.29	»	0.133
» 1948 da altre località (B)	»	0.55	»	0.060

constatiamo che i valori per il β -carotene divergono meno che per l'altro pigmento. Se, come suppongo, è soprattutto al secondo pigmento che si deve la tonalità rossiccia dell'ipoderma e quella rubino delle ali e del sangue, i dati confermerebbero la mia osservazione, che cioè il materiale che si trova in natura è eterogeneo. Probabilmente ci sono varie mutazioni interessanti il metabolismo dei pigmenti carotenoidi anche in questa specie di insetto come nei bachi da seta; e potrebbe risultare assai interessante lo studio del

meccanismo d'azione di queste mutazioni, analogamente a quanto è stato, fatto per *Bombyx*.

Non è da escludere però che le differenze di colorazione osservate e confermate dalle analisi possano essere dovute a metabolismo diverso nelle varie età.

Per indagare l'origine di questo secondo pigmento, poichè si sa che gli adulti, quando non hanno a disposizione piante di patate, si portano su foglie di melanzana, di pomodoro e di solanacee selvatiche – come l'erba nera e la dulcamara – sono stati analizzati, sia qualitativamente, sia quantitativamente, i pigmenti carotenoidi di varie solanacee (*Solanum tuberosum*, *S. melongena*, *S. nigrum*, diverse varietà di *Lycopersicum esculentum* ed alcune specie affini come *L. hirsutum*, *L. pimpinellifolium*, *L. peruvianum*). In nessuna delle specie esaminate venne riscontrato, neanche in tracce, il secondo pigmento trovato nella dorifora, ma solo carotene e xantofille con due nette bande di assorbimento. Il β -carotene estratto dalla dorifora mostra le stesse bande di quello estratto dalle foglie delle solanacee in esame.

In quanto alle xantofille è interessante notare come, nonosante le ingenti quantità presenti nella foglia, esse siano invece assenti dal corpo dell'insetto: sangue, ipoderma, elitre, ali (anche Palmer e Knight avevano fatto la stessa osservazione). Sicchè bisogna ammettere o che vi sia impermeabilità intestinale alle xantofille oppure che le xantofille, come il carotene, passino nel sangue, ma vengano poi nel sangue distrutte o modificate. Il pigmento cosiddetto « endogeno » – cioè che non deriva direttamente da passaggio nel sangue di pigmento preformato nell'alimento vegetale – potrebbe supporre derivi da alterazione, per esempio, per ossidazione, appunto delle xantofille di origine alimentare o piuttosto invece dal β -carotene; senza escludere per altro che esso possa derivare per un processo di sintesi da materiale diverso.

Secondo Russo ⁽³⁾, le uova deposte sono gialle, però man mano che l'embrione si sviluppa vanno acquistando una colorazione rossiccia. Questo fatto è, per il proseguimento delle nostre ricerche, assai importante in quanto le analisi comparate da eseguirsi sulle uova appena deposte e su quelle embrionate (a vari stadi di sviluppo) ci potrà permettere di chiarire quando e con quale meccanismo questo pigmento « endogeno » cominci a formarsi, per esempio, come un prodotto intermedio dell'ossidazione del β -carotene.

L'allevamento della dorifora in laboratorio permetterà di lavorare su materiale discretamente omogeneo e di seguire tappa per tappa le fasi varie del metabolismo dei carotenoidi durante lo sviluppo embrionale, larvale e pupale sino all'adulto (e ciò possibilmente per la prima, seconda e terza generazione onde mettere in rilievo eventuali differenze di comportamento). Così potremo arrivare a comprendere il significato di fatti come quello osservato da Busnel ⁽⁴⁾: che durante il periodo di riposo preninfale la larva

(3) G. RUSSO, *L'Italia Agricola*, n. 8, agosto 1947.

(4) R. G. BUSNELL, « Comptes Rendus Soc. biol. », 751 (1938).

di dorifora dal suo colore arancio passa in 3-8 giorni al giallo chiaro, conservando questo nuovo colore per 2-5 giorni.

TABELLA II.

*Contenuto in pigmenti di alcune solanacee
(dei generi « Solanum e Lycopersicum »).*

Specie	Carotene in mgr. % di peso secco	Xantofille in mgr. % di peso secco
<i>Solanum tuberosum</i>	33.5	17.6
<i>Solanum melongena</i>	20.38	23.42
<i>Solanum nigrum</i>	42.15	51.2
<i>Lycopersicum esculentum</i> :		
Razza Palla Oro	33.16	30.93
Razza Comet	40.93	25.8
Razza Cuor di Bue	27.73	29.92
Razza Campione	31.58	28.6
Razza Ponderosa	30.98	42.55
<i>Lycopersicum hirsutum</i>	47.7	27.8
<i>Lycopersicum pimpinellifolium</i>	33.65	51.11
<i>Lycopersicum peruvianum</i>	31.75	56.15.

Sarebbe anche assai interessante poter allevare assieme al coleottero della patata anche il suo predatore, il reduvide *Perillus bioculatus* che secondo Palmer e Knight, presenta colorazione gialla e rossa dovuta in gran parte ad accumulo nelle cellule ipodermali di carotene secondariamente assorbito. Palmer e Knight dimostrarono che nella larva di *Leptinotarsa decemlineata* il sangue è colorato in arancio intenso per carotene derivato dalla foglia, precisando anzi che nel sangue fresco del coleottero il carotene si trova in concentrazione 0,0136 %, alta cioè quanto nelle foglie verdi fresche. Secondo gli stessi AA. il *Perillus* cibandosi di adulti, larve e uova di *Leptinotarsa* riasorbe carotene dalla sua preda. Tanto nell'emittero che nel coleottero i colori gialli e rossi del tegumento sarebbero dovuti a differenze di grado di concentrazione di uno stesso pigmento (il che però sembra in contrasto con i nostri risultati).

Ora in un suo lavoro assai interessante Knight ha mostrato che la temperatura, influenzando i processi fisiologici durante la vita attiva di *Perillus*, indirettamente influenza la colorazione di questo insetto. Allevato a temperatura di 28°-35° C. dà forme incolore mentre a temperature sotto 26° C.

appaiono forme rosse e gialle. Quando è soggetto ad alte temperature l'insetto non accumula carotene nelle cellule ipodermali ed emette escreti bianchi come calce. In queste condizioni sembra che il carotene venga ossidato, fatto che Palmer ed altri hanno già altre volte messo in rilievo in animali ad intenso metabolismo. Se, però, individui bianchi di *Perillus* vengono mantenuti in un ambiente relativamente fresco (21° - 28° C.) essi emettono escreti normali, rossicci scuri, bruni o neri e nello stesso tempo incominciano ad accumulare carotene nelle cellule dell'ipoderma.

RICERCHE NEL 1949. - Riprendendo le ricerche nel 1949, nel luglio sono state raccolte nella stessa località di S. Angelo Lodigiano dorifore sia allo stato adulto che allo stato larvale (larve piuttosto vicine a maturità). Il materiale si presentava molto eterogeneo, gli adulti differendo per il colore delle ali membranose-biancastre, arancione rossastro, rubino - e le larve per il colore del corpo variavano da giallo a giallo arancione e rosso mattone più o meno intenso.

Non sappiamo se le variazioni notate siano da considerarsi dovute interamente a differenza di stadio di sviluppo o anche a differenze di natura genetica.

Bisogna tener presente che per l'adulto sono state esattamente osservate da qualche A. variazioni di colore delle elitre e delle ali membranose nel corso della vita immaginale; anzi queste variazioni sono state utilizzate per distinguere i coleotteri giovani appena metamorfosati dai più vecchi, il che può presentare notevole importanza nelle osservazioni sull'andamento delle infestioni e sugli effetti delle misure di lotta-antidorifora. Già Trouvelot aveva osservato che si possono distinguere gl'individui giovani dagli sfarfallati da tempo, non solo per il fatto che il tegumento chitinoso rimane molle durante i primi due o tre giorni - dopo i quali acquista la durezza definitiva - ma anche per il fatto che il color giallo delle elitre impiega vari giorni a raggiungere quel tono brillante che è così caratteristico dell'adulto maturo.

Dunn (1948) ⁽⁵⁾ nel cercare un metodo migliore per distinguere più dettagliatamente le dorifore secondo la loro età, si è accorto che le differenze di colore tra ali membranose degli individui appena sfarfallati e dei maturi erano assai spiccate e rimanevano distinguibili, benchè con nettezza decrescente, per circa 14 giorni. « Le ali membranose del coleottero appena schiuse sono trasparenti e sprovviste di ogni colore, mentre quelle dell'individuo maturo sono rosse fuorchè nell'apice e nel bordo anale dell'ala. Le ali rimangono scolorate per almeno 4-5 giorni dopo la schiusura, dopodichè sviluppano un color rosa che poco a poco intensifica e si diffonde nella maggior parte della lamina alare, specie lungo le nervature, d'ambo i lati, sinchè il colore rosa non è passato a un tono nettamente rosso. In media ci vogliono 14-20 giorni perchè l'intensità del colore raggiunga il livello che ha nell'adulto ». « Questo cangiamento di colore - aggiunge Dunn - è probabil-

(5) E DUNN, « Nature », vol. 162, n. 4106 (1948).

mente dovuto al carotene assorbito dal coleottero quando comincia a nutrirsi. Perciò il periodo di tempo che ci vuole perchè il colore dell'ala raggiunga la sua massima intensità varierà entro certi limiti, secondo la temperatura e la intensità dell'alimentazione».

Benchè pubblicate nel 1948 queste osservazioni preliminari — alle quali non mi consta che Dunn abbia fatto seguire la pubblicazione *in extenso* del suo lavoro — ci erano sfuggite sicchè la nostra ricerca è stata condotta indipendentemente da esse.

Pensammo utile suddividere in varie classi il materiale raccolto. Tutti gli esemplari furono conservati per alcuni giorni in alcool a 5 % e poi al 26 agosto furono iniziate le analisi, seguendo il metodo già precedentemente descritto.

Come nel materiale precedentemente analizzato, anche in questo, accanto a grandi quantità di β -carotene, si è riscontrato pigmento « endogeno » in quantità varianti nelle varie classi. Il numero degli esemplari è stato determinato e così pure il peso, dopo allontanamento dell'alcool diluito.

TABELLA III.

Pigmenti carotenoidi in adulti di « Leptinotarsa decemlineata » Say, raccolti nel mese di luglio 1949 in S. Angelo Lodigiano.

Gruppo	N. indiv.	Contenuto in pigmento						
		Corpo privato di ali			Ali			
		Carotene		Pigmento endogeno	Carotene		Pigmento endogeno	
		in mgr.	per 100 indiv.		in mgr.	per 100 indiv.	in mgr.	per 100 indiv.
Ali bianche	148	0.231	0.156	—	0.033	0.022	—	—
Ali arancione-rosse .	148	0.140	0.093	tracce	0.034	0.023	0.078	0.054
Ali rosso-rubino . .	68	0.058	0.085	tracce	0.019	0.027	0.102	0.148

I dati riassunti nella tabella III giustificano la classificazione fatta ad occhio, anzi mettono bene in risalto la differenza tra gl'individui ad ali rubino e quelli ad ali arancio: nelle ali di questi ultimi si riscontra già minore contenuto in β -carotene che in pigmento « endogeno », ma nelle ali di quelli la sproporzione è ancora maggiore.

Negli individui ad ali bianche poi il contenuto in pigmento « endogeno » è nullo e non solo nelle ali, ma anche nel corpo.

Del resto anche nel corpo degli insetti delle altre due categorie il pigmento « endogeno » si ritrova solo in tracce come se esso si formasse proprio nelle ali o, più probabilmente, migrasse elettivamente là. Altra osservazione

molto interessante è che la quantità di β -carotene - che nelle lamine alari si mantiene costante a un livello assai basso - nel corpo va abbassandosi colla età, come se avvenisse una migrazione progressiva dal corpo alle lamine alari di una quantità precedentemente accumulata (nello stadio larvale) con trasformazione in pigmento « endogeno ».

È innegabile dunque la presenza di differenze dovute all'età dell'individuo. Ci sono, oltre a queste, differenze di carattere ereditario ?

TABELLA IV.

Pigmenti carotenoidi in larve di « Leptinotarsa decemlineata » Say, raccolti in S. Angelo Ledigiano nel luglio-agosto 1949.

Gruppo	N. indiv.	Peso in gr.	Conten. in pigmento		pigmento endogeno	
			Carotene		in mgr. licopene	per 100 indiv.
			in mgr.	per 100 individ.		
11/7 Gialle	230	29.5	0.47	0.2043	—	—
11/7 arancione-rosso	254	27.5	0.439	0.1728	0.0312	0.0122
11/7 rosso mattone	119	12	0.493	0.4142	0.0390	0.0327
17/8 rosso mattone intenso .	150	16	0.355	0.2366	0.0936	0.0624
17/8 rosso-mattone intenso .	41	5.7	0.141	0.3439	0.0390	0.0951

La tabella IV che riassume i dati raccolti su larve presso a poco ugualmente avanzate nello sviluppo classificate in varie categorie a seconda del colore, mostra che varia in esse la quantità di pigmenti, anche di β -carotene, ma soprattutto di pigmento « endogeno ». Di questo non v'è traccia negli individui gialli, sale a discrete quantità negli arancio-rossastri e a quantità più elevate nei rosso-mattone più o meno intensi.

Potrebbe darsi che nelle popolazioni di dorifora liberamente viventi in natura ci fossero differenze razziali anche a riguardo del metabolismo dei carotenoidi come certo per molti altri caratteri. Ma solo esperienze di allevamento (che permettano osservazioni dettagliate lungo tutto lo sviluppo e il prelevamento per l'analisi di larve esattamente coetanee), di selezione e di incrocio potranno permettere di precisare queste eventuali differenze razziali.

Quello che si può concludere per ora è che dei pigmenti che colorano il corpo larvale e imaginale della dorifora uno, il β -carotene, deriva tal quale dai tessuti della pianta nutrice; un altro non trova riscontro nelle parti verdi della pianta di patata, pomodoro e altre solanacee: è quello che abbiamo indicato come « endogeno », benchè secondo ogni probabilità derivi da

trasformazione di altro pigmento presente nella pianta nutrice: probabilmente dello stesso β -carotene e non della xantofilla cui l'intestino della dorifora non sarebbe permeabile.

Potrebbe pensarsi che questo assorbimento preferenziale del β -carotene, sia in rapporto con la sua natura di provitamina A. La vitamina A nella dorifora, e in altre specie di insetti, potrebbe essere necessaria, per esempio, durante le fasi di sviluppo embrionale. Gli insetti accumulerebbero β -carotene per tenerlo, nelle uova, a disposizione della nuova generazione ⁽⁶⁾.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Straniero Élie-Joseph Cartan

Letta (*) dal Socio UGO AMALDI

ÉLIE-JOSEPH CARTAN, accademico linceo dal 1927, si è spento a Parigi il 6 maggio dell'anno scorso. Era nato il 9 aprile 1869 in un piccolo borgo del Delfinato – Dolomieu – da modesti artigiani, dei quali, anche giunto al sommo della rinomanza, amava rievocare « l'esempio quotidiano della fatica alacramente affrontata, del lavoro gioiosamente compiuto ». L'ingegno precocissimo, già rivelatosi nelle scuole primarie del villaggio nativo, era apparso addirittura eccezionale nei collegi di provincia, in cui aveva percorso gli studi secondari, fino all'ammissione all'« École Normale Supérieure » di Parigi; e, in quella celebre Scuola, Maestri e condiscipoli si erano trovati ben presto concordi nel presagire il cammino luminoso, cui Egli era destinato nel campo della ricerca scientifica.

Tuttavia gli inizi della Sua carriera accademica furono piuttosto lenti e faticosi e la Sua opera matematica, pur affermatasi, fin dalle prime realizzazioni, in contributi oggi considerati classici, non trovò – forse per i suoi caratteri di ardita originalità – quella immediata risonanza, che le era dovuta. Dottore in Scienze nel 1894, « maître de conférences » per quasi un decennio – prima a Montpellier, poi a Lyon –, professore nel 1903 alla Facoltà di Nancy, aveva già toccato la quarantina, quando, per tornare dalla provincia a Parigi, dovette riadattarsi all'ufficio di « maître de conférences »; e solo tre anni più

(6) A questo proposito ci pare utile notare come recentemente da un unico esemplare di *Mantis religiosa* dall'abito di un delicatissimo verde pisello si è estratto e dosato quantitativamente mgr. 0,0235 di β -carotene. Tutto il pigmento verde pisello si estrae in acetone, si trasferisce da esso per inacquamento in benzina, restando dopo il trattamento con metanolo 90 %, sia prima che dopo la saponificazione, tutto nella fase benzenica; cromatografato in idrossido di calcio dà un bell'anello giallo rosa eluibile con benzina. Allo spettroscopio l'eluato mostra le due nitide bande a 451-483 m μ del β -carotene. L'esemplare prima dell'analisi è stato privato dell'apparato intestinale.

(*) Nella seduta del 14 giugno 1952.

tardi, nel 1912, ebbe finalmente una cattedra alla Sorbona, in virtù di un rapporto sulla Sua opera scientifica dovuto al Poincaré, che, oramai sopraffatto dal male, che doveva qualche settimana dopo condurlo alla tomba, vi aveva dedicato l'ultima sua fatica.

In quel grande centro culturale il Cartan esplicò una fervida e feconda attività di Maestro e i molteplici Suoi corsi, redatti da Lui stesso o da discepoli, costituiscono altrettante opere celebri⁽¹⁾, che segnano le mete successivamente raggiunte nelle Sue indagini personali, perseguite per oltre un cinquantennio con sorprendente ricchezza di iniziative, con inesausta genialità di vedute generali e di metodi deduttivi, secondo indirizzi via via più larghi ed elevati, ma l'uno all'altro connessi; in guisa che a chi oggi le ripercorra, nella loro progressiva evoluzione, sembrano rispondere ad un vasto programma, unitariamente concepito e meditatamente preordinato. Esse sono tutte dominate da una sistematica visione gruppale della Matematica e dei suoi problemi; e, nella loro fase iniziale, si riconnettono direttamente alla classica teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni, creata dal Lie; ma fin da allora vi si rivelano quella fervida fantasia costruttiva e quella spontanea e sicura autonomia di pensiero, per cui il Cartan, in ogni momento della sua attività di ricercatore, fu tratto a ripensare e rielaborare problemi, metodi, risultati da punti di vista tipicamente personali.

Nella Tesi di dottorato (1894), riprendendo *ex novo* sul problema della struttura dei gruppi continui finiti di trasformazioni le ricerche del Killing, indubbiamente ricche di idee felici e di fortunate congetture, ma lacunose e, in larga parte, insufficientemente giustificate, non solo riuscì a porre su solide basi e a sviluppare sistematicamente la teoria generale fino alla classificazione dei tipi di strutture semplici già abbozzata dal Killing, ma pervenne a risultati completamente nuovi e profondamente significativi, quale, ad esempio, la determinazione - per ogni struttura semplice - dello spazio di minima dimensione, in cui essa è realizzabile mediante un gruppo lineare omogeneo.

Su questo stesso ordine di problemi il Cartan doveva poi tornare a più riprese. Così dapprima quei medesimi metodi algebrici, che con mirabile virtuosità concettuale ed algoritmica aveva applicato all'analisi delle strutture dei gruppi continui finiti, furono da Lui adattati allo studio approfondito di quei sistemi di numeri complessi a quante si vogliono unità, che, sotto il nome di « algebre », dovevano più tardi formare l'oggetto di tutta una vasta corrente d'indagini, sviluppatasi prevalentemente nei paesi anglosassoni. Poi riuscì a classificare i tipi di strutture semplici nel campo reale, risolvendo con ciò un problema, di cui vari anni dopo poté ravvisare gli stretti rapporti con una

(1) *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann, 1922; *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, Gauthier-Villars, 1928; 2^e éd. revue et augmentée, 1946; *Leçons sur la Géométrie projective complexe*, ibidem, 1931; *Leçons sur la Théorie des espaces à connexion projective*, ibidem, 1937; *La Théorie des Groupes finis et continus et la Géométrie différentielle, traitées par la méthode du repère mobile*, ibidem, 1937; *Leçons sur la Théorie des spineurs*, I-II, Paris, Hermann, 1938; *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, ibidem, 1945.

importante questione di Geometria riemanniana; e fin dal 1913, precorrendo i tempi, recò un contributo di fondamentale importanza alla teoria generale dei tensori con la determinazione e classificazione di quelle rappresentazioni lineari di tutti i tipi di gruppi continui finiti semplici, che qualche decennio più tardi hanno trovato la loro naturale applicazione negli sviluppi teorici della Fisica atomica. In particolare, fin da allora, scoperse e studiò, sotto la forma matematica più generale, quegli enti analitici, che poi i Fisici sono stati condotti a introdurre, con ufficio essenziale, nelle loro schematizzazioni dei fenomeni atomici sotto il nome di « spinori ».

Ma già durante il corso di queste varie indagini, che in qualche modo si riconnettevano a sviluppi preesistenti, il Cartan si era venuto orientando verso quegli indirizzi, in cui più nettamente si dovevano affermare l'originalità e la potenza inventiva del Suo pensiero. In una singolarissima Nota del 1896 – sui due tipi di invarianti integrali (nel senso del Lie) che, rispetto al gruppo dei moti rigidi, si presentano nello spazio ordinario, secondo che come elemento generatore vi si assume il piano o la retta – Egli appariva già in possesso di quel « Calcolo delle forme differenziali a moltiplicazione esterna », che, nei suoi prodromi, si può far risalire al Grassmann, al Frobenius, al Darboux, al Poincaré e, come ebbe a notare recentemente B. Segre, al Volterra, ma che soltanto ad opera del Cartan ha raggiunto un assetto organico definitivo e ha mostrato la mirabile sua adattabilità a svariati tipi di questioni e la sua eccezionale fecondità.

In un primo tempo il Cartan applicò questo Suo calcolo a rielaborare e completare gli sviluppi classici sul « problema del Pfaff »; e di qui, con ardita estensione, passò ad una indagine sistematica dei problemi d'integrazione dei più generali sistemi di equazioni alle derivate parziali con l'esplicito proposito di fondarne una teoria, in cui intervenissero esclusivamente concetti ed operazioni invarianti rispetto ad ogni cambiamento delle variabili, tanto dipendenti quanto indipendenti. Da tale intento fu indotto a sostituire all'uso delle derivate parziali quello dei differenziali, che hanno un significato intrinseco, e, conseguentemente, a considerare i sistemi di equazioni alle derivate parziali sotto la forma di sistemi di equazioni ai differenziali totali o « sistemi pfaffiani ». Per venne così, per l'integrazione di tali sistemi, ad una teoria assolutamente nuova nella posizione dei problemi e nei procedimenti deduttivi – di profondo contenuto geometrico – che Lo condusse nel modo più naturale a formulare e risolvere problemi, prima di Lui neppur prospettati, sui sistemi dotati di caratteristiche sia nel senso del Cauchy che in quello del Monge. Con un passo ulteriore sulla via così aperta affrontò per i sistemi pfaffiani il « problema generale dell'equivalenza » rispetto ad un qualsiasi gruppo continuo di trasformazioni, che già il Lie, con tutt'altri mezzi, aveva discusso per i sistemi a derivate parziali sotto la loro forma tradizionale; ma le deduzioni e le conclusioni del Cartan risultano, soprattutto ai fini delle applicazioni geometriche, più espressive e più feconde di conseguenze. In particolare il Cartan ne trasse, quasi si direbbe per via sperimentale, la constatazione – tanto inattesa da costituire una vera e fondamentale scoperta – che ogni pos-

sibile gruppo continuo nel senso del Lie (cioè definibile per mezzo di equazioni differenziali) si può caratterizzare come la famiglia di tutte e sole le trasformazioni, che ammettono un certo numero finito di pfaffiani invarianti o - se si vuole - di invarianti integrali curvilinei, costituenti la base di un insieme lineare, che, rispetto alla differenziazione esterna, risulta *chiuso* od *aperto*, secondo che il gruppo considerato è finito o infinito (cioè dipende da un numero finito di parametri o da funzioni arbitrarie).

Movendo da questa nuova caratterizzazione dei gruppi continui e traendo profitto dalle proprietà da lui stesso precedentemente stabilite per i sistemi pfaffiani in involuzione, il Cartan costruì dai fondamenti, per la struttura dei gruppi continui, sia finiti che infiniti, una teoria generale del tutto indipendente, per il caso dei gruppi finiti, dagli sviluppi classici del Lie, che, come essenzialmente legati al numero finito delle dimensioni dell'insieme lineare delle trasformazioni infinitesime, non si potevano in alcun modo estendere ai gruppi infiniti; e subito illustrò la vasta portata di quella Sua teoria, discutendo e risolvendo per i gruppi infiniti i problemi strutturali tipici, quali la costruzione di tutti gli omomorfi di un gruppo di prefissata struttura, la determinazione di tutti i sottogruppi di un dato gruppo e, infine, vincendo difficoltà sin allora considerate insormontabili, la classificazione di tutti i tipi di gruppi continui infiniti *semplici*, transitivi e intransitivi.

In quel Suo approfondimento delle relazioni di omomorfismo e isomorfismo poté mettere in luce le particolari e insospettite difficoltà, che per i gruppi continui infiniti, in confronto con quelli finiti, si presentano nella caratterizzazione e nell'uso di tali relazioni (ad esempio, nella costruzione delle serie normali di sottogruppi di un gruppo dato) e assodò il fatto, altrettanto espressivo quanto riposto, che, mentre ogni gruppo continuo finito è, come già aveva rilevato il Lie, isomorfo ad un gruppo transitivo, esistono gruppi continui infiniti, che si possono dire intransitivi strutturalmente, nel senso che posseggono invarianti non eliminabili per isomorfismo.

Nel campo dei gruppi continui finiti le vedute, i metodi, i risultati strutturali del Cartan, innestandosi sul corpo di dottrine del Lie, che, circoscritte all'ambito infinitesimale, erano apparse, ormai da qualche decennio, definitive e concluse, ne hanno rivelato nuovi aspetti, e nuove possibilità di sviluppo, che il Cartan ha approfondito in tutta una serie di ricerche fondamentali, dirette soprattutto a indagare come dalle proprietà locali di un gruppo si possa risalire alle sue proprietà integrali, cioè inerenti all'intero suo campo di esistenza. In particolare, da questo punto di vista globale, ha sottoposto ad una profonda analisi critica i tre classici teoremi fondamentali del Lie, pervenendo per primo a stabilire, in modo logicamente ineccepibile, il reciproco « in grande » del terzo, cioè l'esistenza di un gruppo continuo finito di trasformazioni per ogni possibile struttura assegnata a priori. E, più oltre ancora, in questo medesimo indirizzo, ha potuto assegnare nel 1938 una dimostrazione di sorprendente ingegnosità per il teorema - rimasto in sospeso per un cinquantennio e stabilito poco prima dal russo Ado - sull'isomorfismo di ogni gruppo continuo finito ad un gruppo lineare omogeneo.

La ragione profonda della singolare fecondità della teoria strutturale del Cartan fu da Lui ravvisata, in base ad una geniale interpretazione geometrico-cinematica, nel fatto che essa generalizza ad un gruppo continuo finito qualsiasi la teoria del triedro mobile per il gruppo degli spostamenti rigidi nello spazio ordinario, di cui il Darboux aveva fatto un uso così suggestivo e redditizio nella Geometria differenziale delle curve e delle superficie; e il Cartan, con altrettanta genialità, ha applicato quel suo metodo del riferimento variabile, per un qualsiasi gruppo continuo finito, ai problemi di deformabilità e applicabilità di ogni possibile ordine, per varietà quali si vogliono, in spazi ad un qualsiasi numero di dimensioni e dotati di un qualsiasi gruppo fondamentale assegnato (spazi euclidei e non-euclidei, spazi affini, proiettivi, conformi).

Ma anche fuori degli indirizzi strettamente gruppali il Cartan doveva trarre dalla Sua teoria della struttura l'impulso ad altri ordini di ricerche. Si è accennato come codesta teoria si regga essenzialmente sulla considerazione degli invarianti integrali curvilinei, caratteristici di ogni singolo gruppo. Di qui Egli fu condotto ad affrontare lo studio degli invarianti integrali nelle condizioni di più larga generalità. In un celebre corso del 1921 riprese e rielaborò dai fondamenti, col sussidio specificamente adeguato del Suo Calcolo delle forme differenziali esterne, la teoria degli invarianti integrali della Meccanica celeste, fondata dal Poincaré, e, assegnando alla variabile indipendente (cioè, in quel caso speciale, al tempo) il medesimo ufficio che alle variabili dipendenti, pervenne, per la nozione stessa di invariante integrale di un sistema differenziale qualsiasi, ad una accezione più larga e completa di quella tradizionale, che ne ha reso pressochè intuitive le proprietà fondamentali e caratteristiche e che, soprattutto nel caso meccanico, si è rivelata più adatta alle schematizzazioni fisiche. In particolare il Cartan ne ha tratto un « principio di conservazione del tensore quantità di moto-energia », che Gli ha consentito di pervenire, per via esclusivamente concettuale e senza alcun ricorso a sviluppi algoritmici, ad una formulazione delle leggi della Meccanica analitica indipendente da ogni riferimento particolare dello spazio-tempo.

Si possono qui ravvisare i primi riflessi dei nuovi orientamenti speculativi, che, nella progressiva evoluzione del pensiero del Cartan, furono determinati dalla teoria della Relatività generale; e tutti gli sviluppi ulteriori della Sua attività si ricollegano, direttamente o indirettamente, ai problemi matematici posti da quella teoria: problemi analitici e critici – sull'esistenza e l'ambiguità degli integrali delle classiche equazioni gravitazionali dell'Einstein – e, soprattutto, problemi sintetici e costruttivi – sugli spazi atti a fornire modelli dell'Universo in base ad una geometrizzazione dei fenomeni fisici. È in quest'ultimo ordine di questioni che il Cartan ha recato i Suoi apporti – sotto qualche aspetto – più geniali e caratteristici. Sulla base della interpretazione geometrico-cinematica delle Sue equazioni di struttura dei gruppi continui e traverso una Sua originale rielaborazione della Geometria delle varietà curve riemanniane, del parallelismo del Levi-Civita e della conseguente teoria delle connessioni, Egli è assurto ad una vasta sintesi, che, pur riconnettendosi alle idee kleiniane del Programma di Erlangen, ne trascende gli schemi e ne amplia

in modo essenziale il campo di applicabilità. È ben noto come gli spazi riemanniani e, a più forte ragione, quelli del Weyl e dell'Eddington, su cui la Relatività aveva richiamato l'interesse dei fisici e dei matematici, sfuggissero, per le loro caratteristiche geometriche, alla classificazione degli spazi organizzabili geometricamente, secondo il Klein, mediante un gruppo fondamentale di trasformazioni. Orbene, il Cartan è riuscito a ricondurre anche codesti spazi anomali sotto il dominio della teoria dei gruppi, come casi particolari di una nuova, vastissima specie di spazi, da Lui detti *spazi generalizzati* o *non olonomi*. Uno spazio non olonomo è da Lui concepito come una varietà continua di elementi spaziali infinitesimi, in ciascuno dei quali vige una geometria kleiniana di assegnato gruppo fondamentale, mentre questi elementi si trovano l'uno all'altro raccordati in virtù di due leggi, di cui l'una assegna l'espressione analitica della distanza di due punti infinitamente vicini, l'altra definisce il confronto angolare delle direzioni uscenti da codesti due punti; e queste due leggi sono a priori arbitrarie sotto la sola condizione che nell'intorno di ciascun punto si conservino quelle stesse proprietà formali, che valgono nella geometria dotata del gruppo fondamentale considerato. Un tale spazio, che ha, dunque, nell'infinitesimo i caratteri di un ben determinato spazio kleiniano, li perde quando sia considerato « in grande »; e il suo divario dal corrispondente spazio a gruppo fondamentale risulta, in qualche modo, misurato da certi due invarianti differenziali, che il Cartan designa coi nomi di *curvatura* e di *torsione*. Da questo punto di vista i classici spazi riemanniani non sono che gli spazi euclidei generalizzati a torsione nulla, mentre quelli del Weyl sono caratterizzabili come spazi generalizzati pur essi privi di torsione, ma aventi come gruppo fondamentale nell'infinitesimo il gruppo delle similitudini; e il Cartan riconobbe fin dal 1922 che, per contrapposto, generalizzando gli spazi euclidei sotto l'ipotesi dell'annullarsi identico della curvatura, anziché della torsione, si è condotti agli spazi riemanniani dotati di parallelismo assoluto, che poi l'Einstein doveva riscoprire indipendentemente nel 1928 in un suo saggio di teoria unitaria del campo gravitazionale ed elettromagnetico.

Nell'austera Sua obiettività il Cartan credette di dover osservare che nella vasta molteplicità di spazi non olonomi, che si possono senza sforzo costruire e caratterizzare a priori, una gran parte sembrano costituire, almeno per il momento, semplici curiosità matematiche; ma P. Langevin rilevò la potenza di suggestione, che quelle geometrie generalizzate potranno esercitare sui teorici nella Fisica nei loro sforzi di schematizzazione dell'Universo; e, d'altra parte, tutta l'opera del Cartan, nell'ultimo ventennio della sua attività, sta a dimostrare come quella più generale nozione di spazio, in svariati ordini di problemi, anche analitici, suggerisca interpretazioni geometriche feconde di risultati del tutto nuovi e spesso inattesi. La stessa Geometria degli spazi riemanniani, rielaborata dal Cartan alla luce delle Sue vedute, ne risultò rinnovata nel suo contenuto sintetico, alleggerita nel suo apparato formale; e quelle medesime vedute generali trovarono un'applicazione particolarmente suggestiva nella cosiddetta *Geometria dei gruppi continui finiti*,

cioè nello studio di quegli spazi i cui elementi generatori sono le trasformazioni di un gruppo continuo finito. Il Cartan ha mostrato che questi spazi, per sè amorfi, si possono organizzare sotto un certo aspetto come spazi non olonomi affini a curvatura nulla, cioè a parallelismo assoluto, e da un altro punto di vista come spazi non olonomi, ancora affini, ma privi, invece, di torsione; e ciascuna di queste geometrizzazioni è valsa a mettere in luce le ragioni profonde di svariati risultati classici della teoria dei gruppi.

L'apporto caratteristico e, in un certo senso, culminante dell'ultimo periodo dell'attività del Cartan è dato da un ricco e complesso insieme di ricerche sugli spazi da Lui detti *simmetrici*, cioè sugli spazi riemanniani, la cui curvatura si conserva per trasporto parallelo. È tutta una organica e originalissima teoria, il cui interesse è dato non soltanto dalla costruzione di nuovi spazi, che generalizzano quelli non euclidei, ma anche dai molteplici e suggestivi suoi riflessi sulla Geometria riemanniana, sui fondamenti della Geometria proiettiva, sulla teoria stessa dei gruppi, di cui costituisce una delle più brillanti e feconde applicazioni geometriche.

Si conclude così l'opera del Cartan, in cui rifulgono le doti sovrane del Suo genio matematico: l'originalità nella posizione dei problemi, l'attitudine a cogliere l'essenza concettuale di ogni metodo analitico, la sorprendente fantasia inventiva e, soprattutto, quella visione dinamica della Scienza, per cui, come già fu rilevato da altri, gli apporti del Cartan non si sono mai irrigiditi negli schemi di dottrine in sè concluse, ma sempre si sono concretati in movimenti d'idee vivi e vitali, destinati ad esercitare, anche in futuro, un potente influsso di impulsi e di suggestioni in vasti campi della Matematica.

Dalla rievocazione di quell'altezza di pensiero chi ebbe la ventura di avvicinarLo non sa dissociare il ricordo indelebile delle affascinanti Sue note umane, soprattutto della luce di limpida ed austera nobiltà morale, che traspariva da ogni Suo atteggiamento e da ogni Sua manifestazione; e alla Sua memoria non si può forse rendere omaggio più degno che parafrasando le parole, che, nell'ora più oscura della diaspora degli intellettuali europei, uno dei discepoli indirizzava al Maestro dall'esilio: In tanta tragedia spirituale « sentivamo il bisogno che non si spegnesse in noi la fede che fosse ancora possibile una vita tutta dedicata alla Scienza, senza debolezze e senza compromessi. Voi ce ne avete dato, ogni giorno, la certezza ».

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio U. Amaldi commemora Élie Cartan e il Presidente si congratula con l'oratore per le dotte ed elevate parole con le quali egli ha illustrato la vita e le opere del grande Matematico scomparso, che l'Accademia si onora di avere annoverato tra i suoi più illustri Soci Stranieri.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente presenta il fascicolo n. 4 (aprile 1952) dei Rendiconti e il Quaderno n. 27 dei « Problemi attuali di Scienza e di Cultura », contenente il testo delle discussioni su « Gli antibiotici dal punto di vista chimico, naturalistico e farmacologico ».

I sottoindicati Soci prendono nell'ordine la parola per presentare e offrire in omaggio opere all'Accademia:

Il Socio Chiarugi presenta l'VIII volume (in due parti) di Webbia « Raccolta di scritti botanici editi dall'Istituto Botanico dell'Università di Firenze », contenente diciannove Memorie di illustri scienziati italiani e stranieri alcune delle quali, come ad esempio due lavori del compianto Socio Emilio Chiovenda, postume. Il prof. Chiarugi pone in particolare evidenza il « Thesaurus Beccarianus » del prof. C. G. G. J. Van Steenis, Direttore della Fondazione « Flora Malesiana » di Leida, che illustra la grande importanza della collezione botanica sulla flora malesiana raccolta dall'esploratore Odoardo Beccari e ricorda poi una luusinghamiera recensione del prof. Walter Robyns, Direttore dell'Istituto Botanico di Bruxelles, sul lavoro di Rodolfo Pichi Sermolli, pubblicato dall'Accademia nel volume VII della « Missione di Studi al Lago Tana ».

Il Socio Armellini presenta la seconda edizione del suo volume su « I fondamenti scientifici dell'astronomia », che espone le basi fondamentali di questa scienza con il massimo rigore scientifico, ma nello stesso tempo con chiarezza e brevità. A detta opera seguirà prossimamente un altro volume sui « Fondamenti scientifici dell'astrofisica », attualmente in corso di stampa.

Il Socio G. Levi presenta il testo francese del volume I dell'opera di Archimede Busacca dal titolo « Biomicroscopie et histopatologie de l'oeil », ricordando che detto volume, corredato da magnifiche tavole a colori, tratta della congiuntiva e della cornea, dedicando una parte importante alla trattazione della patologia generale dell'occhio e allo studio delle lesioni elementari.

Il Socio Fabiani presenta il suo « Trattato di Geologia » che egli ha redatto affinché gli allievi delle Università e tutti coloro che, per ragioni

professionali o a scopo culturale, si interessano di geologia, potessero attingere a un libro italiano aggiornato. Detto trattato, che riassume nove lustri di attività di docente e di studioso, tiene conto sopra tutto delle necessità degli studenti universitari, svolgendo ampiamente particolari argomenti sia nel corso della trattazione sia, specialmente, in due appendici delle quali la prima riguarda la struttura della regione italiana dalle Alpi alla Sicilia e la seconda è dedicata alla geologia, alla ricerca, alla produzione e alla distribuzione del petrolio, argomenti questi di grande importanza, nel momento attuale, per l'Italia. L'Autore ha inoltre molto curato la parte illustrativa per la quale si è servito il più possibile di materiale iconografico originale.

Il Socio Rondoni presenta il volume del Collega Rodolfo Margaria dal titolo: « Principi di chimica e fisico-chimica fisiologica » (VII edizione), mettendo in evidenza che si tratta di opera eccellente per concisione e chiarezza, che espone la vasta materia con perfetto aggiornamento e con indirizzo opportunissimo e fecondo per la formazione dei medici e dei biologi. Il libro del Margaria costituisce un sicuro arricchimento della letteratura italiana nel campo medico-biologico.

Il Socio Grandi presenta la sua opera « Introduzione allo studio della entomologia » in due volumi, osservando che il citato trattato riunisce, espone in forma sintetica ed elementare, le principali conoscenze, attualmente in nostro dominio, sull'organizzazione, lo sviluppo e le abitudini degli insetti ed è destinato ai naturalisti italiani ed a tutti coloro che desiderano rendersi conto di alcune delle manifestazioni più grandiose e ignorate della vita.

Il Socio Dore presenta il III volume degli « Atti » della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Bologna, contenente 39 Memorie tra le quali una postuma di Emanuele Foà.

Il Socio Sansone presenta la III edizione dei suoi « Sviluppi in serie di funzioni ortogonali » che costituiscono la parte seconda del volume di G. Vitali e dello stesso Sansone dal titolo: « Moderna teoria delle funzioni di variabile reale » e osserva che la nuova edizione presenta la trattazione di alcune questioni che, senza alterare la fisionomia del volume, la rendono più completa e sempre più utile allo studioso.

Il Segretario Accademico presenta quindi le opere inviate in omaggio mettendo in particolare evidenza una pubblicazione dal titolo « Zur Geschichte und Vissenschaftlichen Leistung der Deutschen Akademie der Naturforscher », edita in occasione del 3° centenario dell'Accademia Leopoldina, il testo della relazione tenuta dal Socio A. Russo, Presidente dell'Accademia Gioenia di Catania per l'inaugurazione del CXXVIII anno della fondazione dell'Accademia stessa, il volume I (fascicolo II) dell'opera « *Conspetus florum angolensis* » di A. W. Exell e F. A. Mendonça, una pubblicazione di S. Sargent Vischer, edita dall'Accademia delle Scienze dell'Indiana, dal titolo « *Indiana Scientists* » e il volumetto « *Prospecting for uranium in Canada* » del Servizio Geologico Canadese.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato, consegnato all'Accademia dal notaio dott. Guglielmo Tanteri per conto dei dottori Umberto Bellotta e Salvatore Onorato, contenente, come da indicazione sul plico stesso, una nota di biologia. Come da altra annotazione sul plico, lo stesso potrà essere aperto a richiesta degli autori, Salvatore Onorato e Umberto Bellotta, sia unitamente che disgiuntamente.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia conservato nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Pensa, Clementi, Nobile, Armellini, Mineo, Picone, Semerano (a nome del Collega Roncato), Cotronei, Rostagni, Quilico, Rolla, Silva e Bonino.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

NOBILE V. - Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari.

CECCARELLI M., DALLAPORTA N., MERLIN M. e ROSTAGNI A. - Un nuovo esemplare di Mesone (pres. dal Corrisp. A. ROSTAGNI).

ANDRISANO R. e TUNDO A. - Spettri U. V. di alcuni derivati furil-etilenici (pres. dal Socio G. B. BONINO).

CIMINO M. - La spedizione scientifica dell'Osservatorio Astronomico di Roma a Khartoum (Sudan) per l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Risultati generali delle osservazioni (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

FALCONE G. e PONTIERI G. - Sulla liberazione di nucleotidi da cellule batteriche per azione degli alcool (pres. dal Corrisp. L. CALIFANO).

FERRO R. - Sulle leghe dell'Uranio coll'Antimonio (pres. dal Socio L. ROLLA).

GIANNUZZI M. A. - Orbita di δ Cygni (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

IANDELLI A. - Sugli arseniuri di Uranio (pres. dal Socio L. ROLLA).

MANGINI A. e DAL MONTE D. - Ricerche sui pirazoli (pres. dal Socio G. B. BONINO).

PUCCI C. - Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali. Nota I (pres. dal Socio M. PICONE).

PUCCI C. - Teoremi di esistenza e di unicità per equazioni lineari a derivate parziali. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

SPERONI G. e PINO P. - Momenti elettrici di acidi isossazolcarbossilici. Nota II (pres. dal Corrisp. A. QUILICO).

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Colonnetti fa ai Colleghi la seguente comunicazione:

« Il Consiglio Nazionale delle Ricerche ha recentemente presa una iniziativa che io mi faccio un dovere di comunicarVi, anche perchè per la migliore realizzazione di essa il Consiglio pensa di poter fare assegnamento su la Vostra autorevole collaborazione.

« Si tratta di rendere possibile ad un certo numero di universitarii altamente qualificati di dedicarsi intieramente allo studio ed alla ricerca liberandoli, almeno temporaneamente, da tutte o parte delle loro funzioni didattiche, nonchè da quelle altre attività non strettamente scientifiche a cui spesso essi son costretti a dedicarsi per ragioni che alla scienza sono del tutto estranee.

« A tal fine avremmo deciso di chiedere al Ministro della Pubblica Istruzione di voler comandare presso il Consiglio qualche professore universitario che desideri dedicare tutta la sua attività alla ricerca scientifica, sia direttamente, sia indirettamente con insegnamenti specializzati o con particolari missioni all'estero.

« Il comando dovrebbe avere la durata di un triennio ed essere eventualmente rinnovabile.

« Il Consiglio delle Ricerche prenderà a suo carico l'onere del rimborso all'amministrazione di provenienza dello stipendio e di tutte le competenze accessorie di cui i beneficiarii del comando fruiscono all'atto del comando stesso.

« Corrisponderà inoltre al professore comandato un assegno personale annuo in corrispettivo dell'impegno che questi dovrà assumere di non svolgere, durante il periodo del comando, alcuna attività di carattere didattico, professionale o politico, all'infuori di quella di ricercatore alle dipendenze del Consiglio.

« Il professore comandato dovrà anzi obbligarsi a riversare al Consiglio i compensi di qualsiasi genere che egli ricevesse per le sue prestazioni occasionali durante il periodo del comando, eccezion fatta soltanto per i proventi di diritti di autore o di sfruttamento di brevetti.

« Il Consiglio metterà a disposizione del professore comandato una dotazione annua, da stabilirsi caso per caso, a titolo di finanziamento del suo programma di lavoro, e comprendente le spese per l'acquisto delle necessarie apparecchiature, le spese per la sperimentazione, nonchè quelle relative ai compensi per i collaboratori, che noi intendiamo siano essi pure messi in grado di dedicarsi intieramente al lavoro scientifico, abbandonando ogni altra attività sia didattica che professionale.

« Resta il problema della scelta degli uomini a cui una tale privilegiata sistemazione può venire utilmente offerta; ed è problema di cui non ci nascondiamo le difficoltà né l'estrema delicatezza. Ed è precisamente a proposito di questo problema che il Consiglio mi ha autorizzato a chiedere la collaborazione di questa illustre Accademia.

« Determinate ogni anno le materie ed i settori di ricerca ai quali intende provvedere, il Consiglio Nazionale delle Ricerche si propone di defe-

rire alla Classe di Scienze matematiche, fisiche e naturali dell'Accademia la designazione, per ciascun comando, di una terna di candidati, nell'ambito della quale provvederebbe poi a fare le sue proposte al Ministro.

«Mi è grato dirVi che Sua Eccellenza il Ministro Segni, da me tempestivamente informato, mi ha dichiarato di approvare e di gradire vivamente questa progettata collaborazione tra il Suo Ministero, il Consiglio delle Ricerche e l'Accademia Nazionale dei Lincei.

«Consentitemi poi anche di aggiungere che egual gradimento mi era stato manifestato dal nostro compianto Presidente, quando io, visitandolo durante la sua ultima malattia, lo avevo come di dovere messo al corrente di questa iniziativa.

«Per parte mia oso sperare che l'Accademia vorrà considerare questo nostro divisamento come un doveroso e deferente riconoscimento del suo alto, incontrastato prestigio, e vorrà consentire ad assumersi questo compito particolarmente delicato di giudice supremo nella scelta e designazione degli uomini più meritevoli e degni.

«L'intervento dell'Accademia nella forma da noi auspicata varrà non soltanto a dare al Ministro e al Consiglio la migliore garanzia di serietà, di imparzialità e di competenza nella difficile scelta, ma anche a conferire al provvedimento un eccezionale prestigio ed ai prescelti un onore a cui essi saranno certamente sensibili».

Il Socio Boaga comunica che presso la sede dell'O.E.C.E. a Parigi nel I semestre di quest'anno è stato istituito il Gruppo Internazionale di Lavoro (n. 7) relativo a studi ed esperienze nel campo della fotogrammetria. Hanno aderito i seguenti Paesi: Olanda, Svizzera, Francia, Belgio, Italia, Austria, Germania, Inghilterra e Canada. Su proposta del Delegato francese la Presidenza del Gruppo venne affidata all'Italia (Boaga) e la Vice Presidenza, su proposta dell'Italia al Belgio (Verlaine). Il Gruppo si è riunito più volte a Parigi ed ha concluso in questi giorni i suoi lavori con la proposta di istituzione di un Ente Internazionale per la Cooperazione agli studi fotogrammetrici. Il Socio Boaga mette in evidenza l'importanza di questa cooperazione internazionale più volte auspicata, ed è certo che essa porterà nuovi ed apprezzati contributi al problema della restituzione fotogrammetrica, con particolare riguardo alla triangolazione spaziale.

Il Socio Abetti comunica che dal 4 al 13 settembre avrà luogo a Roma l'VIII Assemblea dell'Unione Astronomica Internazionale, trenta anni dopo la I Assemblea dell'Unione Astronomica, Geodetica e Geofisica, che venne tenuta all'Accademia dei Lincei. Questa VIII Assemblea avrà luogo presso il Consiglio Nazionale delle Ricerche che è l'organo aderente alle unioni scientifiche internazionali. Subito dopo, dal 14 al 19 settembre, avrà luogo, all'Accademia dei Lincei, l'XI Convegno Volta, che si svolgerà quest'anno sui problemi della fisica solare. Una ventina di astrofisici di varie nazioni hanno accettato l'invito dell'Accademia; il programma del Convegno sarà prossimamente pubblicato a cura dell'Ufficio Convegni Volta.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 14 giugno 1952

- ARMELLINI Giuseppe. — *I fondamenti scientifici della astronomia*. 2ª ed. riveduta ed ampliata. Milano, Ulrico Hoepli, 1952. Pp. XIV-345, in-8º, con figg.
- Atti della Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Bologna. Vol. III, 1950.
- BIANCO Beppe. — *Esperienze e concetti originali di fisiologia dell'uomo*. I e II Quaderno. Borgo S. Dalmazzo, Istituto Grafico Bertello, 1952.
- BUSACCA Archimede. — *Biomicroscopie et histopatologie de l'oeil*. Vol. I. *Généralités-Conjonctive cornée*. Texte français traduit de l'original italien par M.me R. M. Lodyginsky-de Salis. Zürich, Schweizer Druck und Verlagshaus, 1952. Pp. XII-480, in-8º, con figg. e tavv.
- CZEKANOWSKI Jan. — *Carte anthropologique de la Pologne et des pays limitrophes*. Estr. da « Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres ». S. B., Sciences Naturelles, 1950.
- *Przyczynki antropologiczne do zagadnienia stosunków słowiańsko-germańskich*. Estr. da « Przeglądu Zachodniego », 1951, n. 5-6.
- DEUTSCHE AKADEMIE DER NATURFORSCHER « LEOPOLDINA ». — *Zur Geschichte und wissenschaftlichen Leistung der Deutschen Akademie der Naturforscher*. Halle, 1952, Pp. 91, in-8º, con figg.
- EXELL A. W. e MENDONÇA F. A. — *Conspectus Florae Angolensis*. Vol. I, fasc. II: *Malvaceae-Aquifoliaceae*. Lisboa, Ministerio do Ultramar, 1951. Pp. 246, in-8º, con tavv.
- FABIANI Ramiro. — *Trattato di geologia*. Roma, 1952. Pp. 741, in-8º, con figg.
- GEOLOGICAL SURVEY OF CANADA. RADIO-ACTIVITY DIVISION. — *Prospecting for Uranium in Canada*. Ottawa, E. Cloutier, 1952. Pp. V-167, in-16º.
- GRANDI Guido. — *Introduzione allo studio della entomologia*. Bologna, Ed. Agricole, 1951, Voll. 2, in 4º, con figg.
- HADJISSARANTOS Char. — *Ai Arachnai tes Attikis*. Diatribè epì Didaktoriai ypoblètheisa eis tèn Physikomathematikèn Scholèn tou Panepistèmiou Athènon. Athènai, Emm. D. Alexios, 1950. Pp. 132, in-8º, con figg.
- *Sur une cas d'Araignée gynandromorphe*. Estr. da « Praktika », vol. XXIV, 1944, decembre.
- HOARE Cecil A. — Vedi: MACKINNON Doris L. and HOARE Cecil A.
- LODYGENSKY-DE SALIS R. M. — Vedi: BUSACCA Archimede.
- MACKINNON Doris L. and HOARE Cecil A. — *Clifford Dobell (1886-1949)*. In memoriam. Estr. da « Parasitology », vol. XLII, 1952, nn. 1-2.
- MARGARIA Rodolfo. — *Principi di chimica e fisico-chimica fisiologica*. 7ª ed. Milano, Casa Ed. Ambrosiana, 1952. Pp. XVI-671, in-8º.
- MENDONÇA F. A. — Vedi: EXELL A. W. e MENDONÇA F. A.
- MÖNCH G. C. — *Das Institut für Angewandte Physik*. (II. *Physikalisches Institut der Universität Halle (Aufbau und Ausbau)* 1945-1950. Halle (Saale), Martin Luther Universität, 1951. Pp. VII-52, in-8º, con figg.
- MUSEU NACIONAL. RIO DE JANEIRO. — *João Batista de Lacerda*. Comemoração do centenário de nascimento. 1846-1946. Rio de Janeiro, 1951, Pp. 129, in-8º, con tavv.
- RUSSO Achille. — *Relazione nella inaugurazione del CXXVIII anno della fondazione dell'Accademia Gioenia (1952)*. Estr. da « Bollettino delle sedute della Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. IV, vol. II, 19.
- SANSONE Giovanni. — Vedi: VITALI Giuseppe e SANSONE Giovanni.
- SOCIÉTÉ NEUCHÂTELOISE DE GÉOGRAPHIE. — *Bibliographie de la géologie du Canton*

- de Neuchâtel. Première partie. Auteurs et anonymes.* Neuchâtel, Bibliothèque de la Ville, 1951. Pp. 37, in-4°.
- VISHER Stephen Sargent. — *Indiana scientists. A biographical directory and an analysis...* Indianapolis, The Indiana Academy of Science, 1951. Pp. 286, in-8°.
- VITALI Giuseppe e SANSONE Giovanni. — *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.* 3ª ed. Parte II: Giovanni SANSONE. Bologna, Zanichelli, 1952. Pp. VII-614, in-8°.
- Webbia.* Raccolta di scritti botanici edita dall'Istituto Botanico dell'Università di Firenze. Vol. VIII, 1951-52.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

ERRATA CORRIGE

Fasc. I, pag. 76, riga 9 dal basso

errata: EJ

corrigere: $\frac{J}{J_0}$;

fasc. 3, pag. 277, riga 7-8 dal basso

errata: l'autosoluzione

corrigere: la funzione.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

- ALIBRANDI A. Dell'azione di alte dosi di nicotinamide sul sistema nervoso centrale, 178.
- Sul significato della disposizione verso l'epilessia sperimentale riflessa, 337.
- e ALIBRANDI G. — Sul meccanismo del riflesso condizionato della secrezione salivare, 102.
- ALIBRANDI G., vedi ALIBRANDI A.
- ALOISI M., vedi BONETTI E.
- AMALDI U., Commemorazione del Socio Straniero Élie-Joseph Cartan, 767.
- ARRIGO L. e MORANDO G., Dati sulle proprietà biologiche del paraossipropiofenone (H 365), 316.
- ASCENZI A., vedi BONETTI E.

B

- BAFFONI G. M., La rigenerazione della coda e gli effetti reattivi delle cellule di Mauthner in Anfibi anuri ed urodeli, 189.
- vedi STEFANELLI A.
- BAJADA E., L'equazione $\phi = f(x, y, z, q)$ e l'unicità, 163.
- BALDASSARRI M., Una condizione per l'esistenza di unisecanti, 390.
- Le involuzioni ∞^d dello S_h e le loro proiezioni, 530.
- BARBATELLI R., Determinazione del passo del micrometro in declinazione del cerchio meridiano Repsold. Nota II, 84.
- BARBUTI U., Sulla stabilità delle soluzioni per la equazione: $x'' + B(x)x = 0$, 170.
- BELOFF-CHAIN A., vedi BOVET D.
- BIocca E., Ricerche sistematiche su alcune specie del genere *Ancylostoma* (Dubini, 1843): *Ancylostoma braziliense* (de Faria, 1910) e *Ancylostoma ceylanicum* (Looss, 1911). Nota I, 185.
- Ricerche sistematiche su alcune specie del genere *Ancylostoma* (Dubini, 1843). *Ancylostoma duodenale* (Dubini, 1843)

- e *Ancylostoma paraduodenale* Biocca, 1951. Nota II, 334.
- BIRINDELLI C., Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili in un prescritto campo semplicemente connesso del piano, 518.
- BONETTI E., MERUCCI P., ASCENZI A. e ALOISI M., Modificazioni nelle proteine contrattili muscolari del coniglio in corso di avitaminosi E. — IV. Azione dell'ATP sulle quantità estratte e sulle proprietà ottiche delle soluzioni proteiche, 350.
- BOVET D., BOVET-NITTI F., CHAIN E. B. e BELOFF-CHAIN A., Contributi allo studio farmacologico e biochimico del metabolismo intermedio. — Azione degli acidi grassi, degli alcol e degli aldeidi sull'intestino isolato ed esaurito di coniglio con particolare riguardo alla risposta acetilcolinica. Nota II, 44.
- BOVET-NITTI F., vedi BOVET D.
- BUFFA P., Sulla presenza di acido citrico nelle calcificazioni patologiche, 356.
- Relazione tra pressione osmotica del sangue e sudorazione nel coma insulinico, 454.

C

- CACCIOPOLI R., Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati. Nota I, 3.
- Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati. Nota II, 137.
- Misura e integrazione sulle varietà parametriche. Nota I, 219.
- Misura e integrazione sulle varietà parametriche. Nota II, 365.
- Misura e integrazione sulle varietà parametriche. Nota III, 629.
- CAFIERO F., Sulle famiglie di funzioni additive d'insieme, uniformemente continue, 155.
- CAGLIOTI V., SARTORI G. e SILVESTRONI P., Polarografia dei cianuri complessi di nichel, 486.

- CALIFANO L., Azione dei raggi ultravioletti sulla liberazione da calore di nucleotidi da cellule batteriche, 30.
- Denaturazione proteica e separazione da calore di nucleotidi dalle cellule batteriche, 37.
- CALIGO D., Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota I, 76.
- Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota II, 277.
- CARDANI C., vedi QUILICO A.
- e PIOZZI F., Una nuova sintesi della cinodantina, 719.
- CAROBBI G. e CIPRIANI C., Ralstonite e bisolfato sodico (matteuccite) fra i prodotti delle fumarole vesuviane, 23.
- CASTELNUOVO G., vedi PENSO G.
- CENNAMO F., Diffrazione di raggi X nella naftalina allo stato solido ed allo stato liquido, 294.
- CEVOLANI M., vedi PETRALIA S.
- CHAIN E. B., vedi BOVET D.
- CHIORBOLI P., Considerazioni critiche su tabelle caratteristiche degli spettri Raman di derivati carbonilici del Furano, Tiofene e Pirrolo, 92.
- Considerazioni comparative sugli spettri Raman dell'*N*-acetilpirrolo e dell' α -acetilpirrolo, 588.
- Considerazioni quantomeccaniche intorno ad alcuni derivati carbonilici del pirrolo, 713.
- e DRUSIANI A. M., Sullo spettro Raman della 2-tiofenaldeide, 309.
- CIPRIANI C., vedi CAROBBI G.
- CLEMENTI A., Sull'ipersecrezione enterica dei lipidi durante l'iperlipidemia sperimentale, 660.
- COLACEVICH A., Risultati preliminari relativi allo spettro della corona esterna ottenuti nell'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952, 559.
- COLOMBO G., Ulteriori osservazioni sulla biologia e sulla genetica dell'«*Anacridium aegyptium*» L. (Orthoptera), 203.
- CONTI R., Sul problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma $z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(i)})$. Nota I, 61.
- Sul problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma $z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(i)})$. Nota II, 151.

- CONTI S., Scoperta di una fauna pigmea nella dolomia norica della Val Solda (Nota preliminare), 325.
- CORRENTI V., Sulla disposizione delle trabecole dell'osso dell'anca in relazione alla loro morfodinamica. (Studio radiologico), 618.
- Osservazioni morfologiche sull'osso dell'anca e sul bacino secondo un nuovo piano di orientamento, 729.
- CREPAX P., Studio comparativo delle proteine del muscolo scheletrico di Coniglio nell'avitaminosi E e nell'inanizione cronica, 439.

D

- D'AMATO F., Rapporti fra costituzione chimica e attività mutagena nelle acridine. Dati riassuntivi, 612.
- DE GIORGI E., Ricerca dell'estremo di un cosiddetto funzionale quadratico, 256.
- Sulla sommabilità delle funzioni assolutamente integrabili, 507.
- DEMANGEOT J., Sur la continuité de la surface villafranchienne du Tibre à l'Adriatique, 175.
- DESIO A., Qualche nuovo dato sul Glaciale della Valle Brembana e della Valle Seriana in Lombardia, 20.
- Movimenti orogenici quaternari nella Pianura Padana, 658.
- DI MAGGIO F., GOMZA A., THOMAS W. E. e SALVADORI M. G., Instabilità laterale di travi inflesse e compresse, 524.
- DRUSIANI A. M., vedi CHIORBOLI P.

E

- EMILIANI F. e PELLIZZER R., Studio morfologico ed ottico della simonellite, 724.

F

- FANTAPPIÈ L., Caratterizzazione analitica delle grandezze della meccanica quantica 285.
- Determinazione di tutte le grandezze fisiche possibili in un universo quantico, 553.
- FERRETTI B., Su di una classe di equazioni operatoriali, 473.
- FILOGAMO G. e TORRE M., Relazioni tra volume delle cellule nervose e lunghezza e spessore delle fibre nervose, 207.

- FILOGAMO G. e VIGLIANI F., Numero e spessore delle fibre mieliniche destinate a muscoli resi funzionalmente inattivi, 600.
- FINZI B., Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono. Nota I, 378.
- Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono. Nota II, 477.
- FRANCINI E., Influenza delle foglie sulla sessualità dei fiori di olivo, 330.
- Determinazione dei coni e sessualità in « *Pinus halepensis* » Mill, 428.
- FUBINI S., Sull'equivalenza di due definizioni della matrice S, 298.

G

- GAETA F., Complementi alla teoria delle varietà algebriche V_{r-2} di residuale finito in S_r . Nota I, 270.
- Caratterizzazione delle curve origini di una catena di resti minimali. Nota II, 387.
- GALLARATI D., Sulle superficie del quinto ordine dotate di punti tripli, 70.
- GALLI M., Le deformazioni relativistiche di un cilindro rotante. Nota I, 86.
- Le deformazioni relativistiche di un cilindro rotante. Nota II, 569.
- GAMBA A., Sui caratteri delle rappresentazioni del gruppo simmetrico, 167.
- GAUDIANO A., vedi PENSO G.
- GHERARDELLI F., Osservazioni sul gruppo dei punti $(k+1)$ -pli di una g_n^k sopra una curva algebrica, 398.
- GHIGI E. e MIRONE P., Ricerche preliminari sullo spettro ultrarosso della marrubina e di alcuni prodotti da essa ottenibili, 97.
- GIULIANO L., Sull'unicità della soluzione per una classe di equazioni differenziali alle derivate parziali, paraboliche, non lineari, 260.
- GOMZA A., vedi DI MAGGIO F.
- GRIGGIO L., vedi LANZA P.
- GROSS W., Sul calcolo della capacità elettrostatica di un conduttore, 496.

L

- LANZA P. e GRIGGIO L., Riduzione polarografica del trifenilclorometano, 688.
- LEONE V., Effetti di trattamento con urea su espianti ventrali di gastrule di « *Rana esculenta* » L., 195.

- LIBERTI A. e PAPÉE E., Studio spettrofotometrico di alcuni alogenuri tetracoordinati del cobalto bivalente, 697.

M

- MACHNE X. e TONINI G., Modificazioni dell'ecg differenziale di Emys orbicularis sotto l'influenza dell'allungamento passivo del miocardio, 344.
- — Modificazioni del potenziale di lesione del miocardio sottoposto allo stiramento, 436.
- MAJORANA Q., Nuove considerazioni cinematiche sulla relatività speciale, 245.
- Spazio e tempo, 481.
- MALATESTA L. e SACCO A., Niehelfcarbonyl-fosfiti alchilici, 101.
- — Cromaesacarbilammine. Nota preliminare, 308.
- MANGINI A., MONTANARI F. e PASSERINI R., Ricerche sui benzimidazoli: spettri di assorbimento e proprietà cromoformiche, 411.
- — Effetti sterici e ponte d'idrogeno nella serie dei benzimidazoli, 595.
- MANUNTA C. e SOLINAS M. I., Sul metabolismo dei pigmenti carotenoidi nella doria delle patate (« *Leptinotarsa decemlineata* » Say), 759.
- MANUNTA G., Azione del benzoato di estradiolo sulla sopravvivenza dei ratti maschi tiro-paratiroidectomizzati, 104.
- Inibizione della lattazione per opera del p-ossipropiofenone, 444.
- MARRÉ E., PROFUMO P., Blocco da cianuro dell'effetto stimolatore auxinico sulla sintesi dell'amido in stomi isolati, 122.
- — Sensibilità alla luce dell'effetto stimolatore auxinico sulla sintesi d'amido in stomi isolati, 181.
- MARUSSI A., Determinazione dell'angolo fra la tangente in un estremo e la corrispondente sezione normale contenente l'altro estremo, per un arco finito di geodetica su di una superficie qualunque, 566.
- MARZIANI M., Sulla propagazione del fronte d'onda nei mezzi dispersivi, 683.
- MAXIA C., Ulteriori dati stratigrafici e paleontologici sul Mesozoico di Castiglione (Rieti), 322.
- MAZZI V., Nuove osservazioni intorno alle cellule basofile nell'ipofisi del Tritone cretato, 116.

MAZZI V., Caratteri secretori e nervosi delle cellule del nucleo magnocellulare preottico nei Teleostei, 347.

— Rilievi e considerazioni sugli effetti della interruzione dei rapporti vascolari e nervosi fra ipotalamo ed ipofisi del maschio del Tritone cretato, 605.

MERUCCI P., vedi BONETTI E.

MINEO C., Teoria idrostatica delle configurazioni d'equilibrio dei pianeti fluidi rotanti e teoria di Stokes nel caso particolare della Terra, 635.

MINGANTI A., Ricerche citologiche sugli ibridi di Ascidie, 125.

MIRONE P., vedi GHIGI E.

MIRONE P. e VAMPIRIM., Sullo spettro ultrarosso tra 2,7 e 5μ di alcune sostanze contenenti il gruppo imminico, 405.

— Spettro ultrarosso e costituzione del 3,5-dimetilpirazolo, 583.

MONTANARI F., vedi MANGINI A.

MONTINI T., PONTREMOLI S., Azione della bile sull'assorbimento di emulsioni di olio di cocco in ansa alla Thiry Vella di cane normale spancreato, 127.

MORANDO G., vedi ARRIGO L.

MORET V., vedi PITTONI A.

MORI L., vedi SPERONI G.

MUSCIA C., Studio di una lente elettronica con il metodo W. K. B., 575.

N

NICOLAUS R., vedi PANIZZI L.

NOLLET L., Sopra la serie di Severi d'una superficie algebrica, 273.

O

ORTALI V., vedi PENSO G.

ORTOLANI G., Risultati sulla distribuzione dei territori presuntivi degli organi nel germe di Ascidie allo stadio VIII, determinati con le marche, al carbone, 199.

P

PALUMBI G., Nuovi dati e nuove concezioni sulla innervazione pressorecetttrice, 738.

PANIZZI L., e NICOLAUS R., Ricerche sulle melanine. - I. Sulla melanina di seppia, 420.

PAPÉE E., vedi LIBERTI A.

PASSERINI R., vedi MANGINI A.

PASTORI M., Sulle equazioni del campo elettromagnetico nell'ultima teoria di Einstein, 302.

PELLIZZER R., vedi EMILIANI F.

PENSO G., CASTELNUOVO G., GAUDIANO A., PRINCIVALLE M., VELLA L. e ZAMPIERI A., Un nuovo «Mycobacterium» patogeno: «Mycobacterium minetti» n. sp. Nota preliminare, 108.

— Il «Mycobacterium phlei» (Lehmann e Neumann 1899, pro parte). Nota preliminare, 180.

PERRI T., Variazioni della competenza artroformativa negli Anfibi Annuri, 753.

PETRALIA S. e CEVOLANI M., Propagazione di ultrasuoni in sistemi di liquidi parzialmente miscibili, 674.

PIOZZI F., vedi QUILICO A.

PIRONE P., vedi CHIGI E.

PITTONI A. e MORET V., La riduzione polarografica dell'acido fumarico, 456.

— La riduzione polarografica dell'acido fumarico in presenza di fosfati, 741.

PONTREMOLI S., vedi MONTINI T.

PRINCIVALLE M., vedi PENSO G.

PROFUMO P., vedi MARRÉ E.

Q

QUILICO A., CARDANI C., PIOZZI F. e SCRIVANI P., I pigmenti del «Deuterophoma tra-cheiphila», 650.

R

RANZI S., Ricerche per uno studio della determinazione embrionale al livello molecolare, 449.

RICCERI G., Un nuovo enzima capace di ossidare l'acido urico nel fegato di «Emys europaea»: l'uricossidasi, 746.

RICHARD U., Sulla rappresentazione asintotica degli estremi delle soluzioni di equazioni differenziali lineari del 2° ordine, 382.

RIGHINI G., Lo spettro della corona solare nell'eclissi del 25 febbraio 1952, 563.

— Lo spettro di una protuberanza quiescente, 670.

RIZZA G. B., Estensione della formula integrale di Cauchy alle algebre complesse dotate di modulo e commutative, 667.

ROTH L., Sulle V_3 algebriche generate da congruenze di curve, 66.

— Alcune V_3 irrazionali a generi nulli, 265.

ROTH L., Sulle V_3 algebriche che contengono un sistema lineare di superficie di genere lineare $\rho^{(2)} \leq 1$, 401.

S

SACCO A., vedi MALATESTA L.

SALVADORI M. G., vedi DI MAGGIO F.

SARTORI G., vedi CAGLIOTI V.

SCORZA DRAGONI G., Una applicazione della quasicontinuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile, 55.

SCRIVANI P., vedi QUILICO A.

SEGRE B., Alcune applicazioni del calcolo esterno, 234.

— Una proprietà caratteristica in grande delle curve giacenti su di una quadrica, 374.

SILVA G., Sulla determinazione pratica dei coefficienti di un polinomio di funzioni sferiche, 643.

SILVESTRONI P., vedi CAGLIOTI V.

SOLINAS M. I., vedi MANUNTA C.

SPADOLINI I., Sulla validità della regola del «Tutto o Niente» nel cuore. Di una nuova concezione sul meccanismo della contrazione cardiaca in rapporto alla costituzione del miocardio, 59.

— Sul processo di ripolarizzazione nel muscolo cardiaco, 251.

SPADOLINI L., L'azione della procaina e del curaro sulla sincronizzazione dell'eccitamento nel muscolo cardiaco. Contributo allo studio delle risposte contrattili di tipo graduato, 338.

SPERONI G. e MORI L., Momenti elettrici di acidi isossazolcarbossilici. Nota I, 704.

STEFANELLI A., e BAFFONI G. M., Il nucleo nei fenomeni della determinazione e del

differenziamento della cellula di Mauthner dei Teleostei («Brachydanio rerio»), 110.

STORCHI E., Piccole oscillazioni dell'acqua contenuta da pareti piane, 544.

T

TERRANA E., Sulla eliminazione di taluni errori nelle misure angolari, 290.

THOMAS W. E., vedi DI MAGGIO F.

TIBILETTI C., Piani tripli e piani quadrupli con la stessa curva di diramazione, 537.

TONINI G., vedi MACHNE X.

TORRE M., vedi FILOGAMO G.

TRICOMI F. G., Sulle derivate delle funzioni ipergeometriche confluenti rispetto ai parametri, 227.

V

VALLAURI G., Determinazione sperimentale della forza magnetomotrice esercitata da una corrente di spostamento dielettrico, 17.

— Commemorazione del Socio Ugo Bordoni, 463.

VAMPIRI M., vedi MIRONE P.

VELLA L., vedi PENSO G.

VIGLIANI F., vedi FILOGAMO G.

VIOLA T., Su una classe di problemi non regolari di calcolo delle variazioni, attinenti all'equazione $\Delta_2^* u = 0$, 511.

VOLPATO M., Sulla derivazione sotto il segno di integrale, 146.

Z

ZAGAR F., Sulla espansione dell'Universo. Nota I, 12.

— Sulla espansione dell'Universo. Nota II, 239.

ZAMPIERI A., vedi PENSO G.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi matematica. — L'equazione $\phi = f(x, y, z, q)$ e l'unicità. BAJADA E., 163.

— Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili in un prescritto campo semplicemente connesso del piano. BIRINDELLI C., 518.

— Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati. Nota I. CACCIOPOLI R., 3.

— Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati. Nota II. CACCIOPOLI R., 137.

— Misura e integrazione sulle varietà parametriche. Nota I. CACCIOPOLI R., 219.

— Misura e integrazione sulle varietà parametriche. Nota II. CACCIOPOLI R., 365.

— Misura e integrazione sulle varietà parametriche. Nota III. CACCIOPOLI R., 629.

— Sulle famiglie di funzioni additive d'insieme, uniformemente continue. CAFFIERO E., 155.

— Sul problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma $z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(i)})$. Nota I. CONTI R., 61.

— Sul problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma $z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(i)})$. Nota II. CONTI R., 151.

— Sulla sommabilità delle funzioni assolutamente integrabili DE GIORGI E., 507.

— Su di una classe di equazioni operatoriali. FERRETTI B., 473.

— Sui caratteri delle rappresentazioni del gruppo simmetrico. GAMBA A., 167.

— Sull'unicità della soluzione per una classe di equazioni differenziali alle derivate parziali, paraboliche, non lineari. GIULIANO L., 260.

— Sulla rappresentazione asintotica degli estremi delle soluzioni di equazioni differenziali lineari del 2° ordine. RICHARD U., 382.

— Sulle derivate delle funzioni ipergeometriche confluenti rispetto ai parametri. TRICOMI F. G., 227.

— Su una classe di problemi non regolari di calcolo delle variazioni, attinenti all'equazione $\Delta_2^* u = 0$. VIOLA T., 511.

— Sulla derivazione sotto il segno di integrale. VOLPATO M., 146.

Anatomia. — Relazioni tra volume delle cellule nervose e lunghezza e spessore delle fibre nervose. FILOGAMO G. e TORRE M., 207.

— Numero e spessore delle fibre mieliniche destinate a muscoli resi funzionalmente inattivi. FILOGAMO G. e VIGLIANI F., 600.

— Nuovi dati e nuove concezioni sulla innervazione pressorecetttrice. PALUMBI G., 738.

Antropologia. — Sulla disposizione delle trabecole dell'osso dell'anca in relazione alla loro morfodinamica. (Studio radiologico). CORRENTI V., 618.

— Osservazioni morfologiche sull'osso dell'anca e sul bacino secondo un nuovo piano di orientamento. CORRENTI V., 729.

Astronomia. — Determinazione del passo del micrometro in declinazione del cerchio meridiano Repsold. Nota II. BARBATELLI R., 84.

— Risultati preliminari relativi allo spettro della corona esterna ottenuti nell'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. COLACEVICH A., 559.

— Lo spettro della corona solare nell'eclisse del 25 febbraio 1952. RIGHINI G., 563.

— Lo spettro di una protuberanza quiescente. RIGHINI G., 670.

B

Biochimica. — La riduzione polarografica dell'acido fumarico. PITTONI A. e MORET V., 456.

— La riduzione polarografica dell'acido fumarico in presenza di fosfati. PITTONI A. e MORET V., 741.

— Un nuovo enzima capace di ossidare l'acido urico nel fegato di « Emys europaea »: l'uricossidasi. RICCERI G., 746.

Biologia. — La rigenerazione della coda e gli effetti reattivi delle cellule di Mauthner in Anfibi anuri ed urodeli. BAFFONI G. M., 189.

— Modificazioni nelle proteine contrattili muscolari del coniglio in corso di avitaminosi E. — IV. Azione dell'ATP sulle quantità estratte e sulle proprietà ottiche delle soluzioni proteiche. BONETTI E., MERUCCI P., ASCENZI A. e ALOISI M., 350.

— Sulla presenza di acido citrico nelle calcificazioni patologiche. BUFFA P., 356.

— Relazioni tra pressione osmotica del sangue e sudorazione nel coma insulinico. BUFFA P., 454.

— Effetti di trattamento con urea su espianti ventrali di gastrule di « Rana esculenta ». L. LEONE V., 195.

— Sul metabolismo dei pigmenti carotenoidi nella dorifora delle patate (« Leptinotarsa decemlineata » Say). MANUNTA C. e SOLINAS M. I., 759.

— Blocco da cianuro dell'effetto stimolatore auxinico sulla sintesi dell'amido in stomi isolati. MARRÈ E., PROFUMO P., 122.

— Sensibilità alla luce dell'effetto stimolatore auxinico sulla sintesi d'amido in stomi isolati. MARRÈ E. e PROFUMO P., 181.

— Nuove osservazioni intorno alle cellule basofile nell'ipofisi del Tritone crestato. MAZZI V., 116.

— Caratteri secretori e nervosi delle cellule del nucleo magnocellulare preottico nei Teleostei. MAZZI V., 347.

— Rilievi e considerazioni sugli effetti della interruzione dei rapporti vascolari e nervosi fra ipotalamo ed ipofisi del maschio del Tritone crestato. MAZZI V., 605.

— Ricerche citologiche sugli ibridi di Ascidie. MINGANTI A., 125.

— Ricerche per uno studio della determinazione embrionale al livello molecolare. RANZI S., 449.

— Il nucleo nei fenomeni della determinazione e del differenziamento della cellula di Mauthner dei Teleostei (« Brachydanio rerio »). STEFANELLI A., e BAFFONI G. M., 110.

Biologia generale. — Variazioni della competenza arto-formativa negli Anfibi Anuri. PERRI T., 753.

Botanica. — Influenza delle foglie sulla sessualità dei fiori di olivo. FRANCINI E., 330.

— Determinazione dei coni e sessualità in « Pinus halepensis » Mill. FRANCINI E., 428.

C

Calcolo delle variazioni. — Ricerca dell'estremo di un cosiddetto funzionale quadratico. DE GIORGI E., 256.

Calcolo numerico. — Sul calcolo della capacità elettrostatica di un conduttore. GROSS W., 496.

Chimica. — Polarografia dei cianuri complessi di nichel. CAGLIOTI V., SARTORI G. e SILVESTRONI P., 486.

— Considerazioni comparative sugli spettri Raman dell'N-acetilpirrolo e dell' α -acetilpirrolo. CHIORBOLI P., 588.

— Riduzione polarografica del trifenilclorometano. LANZA P. e GRIGGIO L., 688.

— Studio spettrofotometrico di alcuni alogenuri tetracoordinati del cobalto bivalente. LIBERTI A. e PAPÉE E., 697.

— Effetti sterici e ponte d'idrogeno nella serie dei benzimidazoli. MANGINI A. e MONTANARI F., 595.

— Ricerche sui benzimidazoli: spettri di assorbimento e proprietà cromoforiche. MANGINI A., MONTANARI F. e PASSERINI R., 411.

— Sullo spettro ultrarosso tra 2,7 e 5 μ di alcune sostanze contenenti il gruppo imminico. MIRONE P. e VAMPIRI M., 405.

— Spettro ultrarosso e costituzione del 3,5-dimetilpirazolo. MIRONE P. e VAMPIRI M., 583.

— Momenti elettrici di acidi isossazolcarbossilici. Nota I. SPÈRONI G. e MORI L., 704.

Chimica biologica. — Dati sulle proprietà biologiche del paraossipropiofenone (H 365). ARRIGO L. e MORANDO G., 316.

Chimica delle muffe. — I pigmenti del « *Deuterothoma tracheiphila* ». QUILICO A., CARDANI C., PIOZZI F. e SCRIVANI P. 650.

Chimica fisica. — Considerazioni quantomeccaniche intorno ad alcuni derivati carbonilici del pirrolo. CHIORBOLI P., 713.

Chimica inorganica. — Nichelcarbonilfosfiti alchilici. MALATESTA L. e SACCO A., 101.

Chimica organica. — Una nuova sintesi della cinodontina. CARDANI C. e PIOZZI F., 719.

— Considerazioni critiche su talune caratteristiche degli spettri Raman di derivati carbonilici del Furano, Tiofene e Pirrolo. CHIORBOLI P., 92.

— Sullo Spettro Raman della 2-tiofenaldeide. CHIORBOLI P. e DRUSIANI A. M., 309.

— Ricerche preliminari sullo spettro ultrarosso della marrubina e di alcuni prodotti da essa ottenibili. GHIGI E. e MIRONE P., 97.

— Cromaesacarbilammine. Nota preliminare. MALATESTA L. e SACCO A., 308.

— Ricerche sulle melanine. — I. Sulla melanina di seppia. PANIZZI L. e NICOLAUS R., 420.

Commemorazioni. — Commemorazione del Socio Straniero Elie-Joseph Cartan, AMALDI U., 767.

— Commemorazione del Socio Ugo Bordoni. VALLAURI G., 463.

Comunicazioni varie; 133, 212, 361, 469, 625, 777.

Cosmogonia. — Sulla espansione dell'Universo. Nota I. ZAGAR F., 12.

— Sulla espansione dell'Universo. Nota II. ZAGAR F., 239.

E

Embriologia. — Risultati sulla distribuzione dei territori presuntivi degli organi nel germe di *Ascidie* allo stadio VIII, determinati con le marche al carbone. ORTOLANI G., 199.

Equazioni differenziali. — Sulla stabilità delle soluzioni per la equazione: $x'' + B(z)x = 0$. BARBUTI U., 170.

F

Farmacologia. — Contributi allo studio farmacologico e biochimico del metabolismo intermedio. — Azione degli acidi

grassi, degli alcol e degli aldeidi sull'intestino isolato ed esaurito di coniglio con particolare riguardo alla risposta acetilcolinica. Nota II. BOVET D., BOVET-NITTI F., CHAIN E. B. e BELOFF-CHAIN A., 44.

Fisica. — Diffrazione di raggi X nella naffalina allo stato solido ed allo stato liquido. CENNAMO F., 294.

— Sull'equivalenza di due definizioni della matrice. S. FUBINI, S., 298.

— Le deformazioni relativistiche di un cilindro rotante. Nota I. GALLI M., 86.

— Le deformazioni relativistiche di un cilindro rotante. Nota II. GALLI M., 569.

— Nuove considerazioni cinematiche sulla relatività speciale. MAJORANA Q., 245.

— Spazio e tempo. MAJORANA Q., 481.

— Studio di una lente elettronica con il metodo W. K. B. MUSCIA C., 575.

— Propagazione di ultrasuoni in sistemi di liquidi parzialmente miscibili. PETRALIA S. e CEVOLANI M., 674.

— Determinazione sperimentale della forza magnetomotrice esercitata da una corrente di spostamento dielettrico. VALLAURI G., 17.

Fisica matematica. — Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono. Nota I. FINZI B., 378.

— Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono. Nota II. FINZI B., 477.

— Sulla propagazione del fronte d'onda nei mezzi dispersivi. MARZIANI M., 683.

— Sulle equazioni del campo elettromagnetico nell'ultima teoria di Einstein. PASTORI M., 302.

Fisiologia. — Dell'azione di alte dosi di nicotinamide sul sistema nervoso centrale. ALIBRANDI A., 178.

— Sul significato della disposizione verso l'epilessia sperimentale riflessa. ALIBRANDI A., 337.

— Sul meccanismo del riflesso condizionato della secrezione salivare. ALIBRANDI A. e ALIBRANDI G., 102.

— Sull'ipersecrezione enterica dei lipidi durante l'iperlipidemia sperimentale. CLEMENTI A., 660.

— Studio comparativo delle proteine del muscolo scheletrico di Coniglio nell'avitaminosi E e nell'inanizione cronica. CREPAX P., 439.

- Modificazioni dell'ecg differenziale di Emys orbicularis sotto l'influenza dell'allungamento passivo del miocardio. MACHNE X, e TONINI G., 344.
- Modificazioni del potenziale di lesione del miocardio sottoposto allo stiramento MACHNE X, e TONINI G., 436.
- Azione del benzoato di estradiolo sulla sopravvivenza dei ratti maschi tiro-paratiroidectomizzati. MANUNTA G., 104.
- Inibizione della lattazione per opera del p-ossipropiofenone. MANUNTA G., 444.
- Sulla validità della regola del « Tutto o Niente » nel cuore. Di una nuova concezione sul meccanismo della contrazione cardiaca in rapporto alla costituzione del miocardio. SPADOLINI I., 50.
- Sul processo di ripolarizzazione nel muscolo cardiaco. SPADOLINI L., 251.
- L'azione della procaina e del curaro sulla sincronizzazione dell'eccitamento nel muscolo cardiaco. Contributo allo studio delle risposte contrattili di tipo graduato. SPADOLINI L., 338.
- Le involuzioni ∞^d dello S_k e le loro proiezioni. BALDASSARRI M., 530.
- Sulle superficie del quinto ordine dotate di punti tripli. GALLARATI D., 70.
- Osservazioni sul gruppo dei punti $(k+1)$ -pli di una g_n^k sopra una curva algebrica, GHERARDELLI F., 398.
- Sulle V_3 algebriche generate da congruenze di curve. ROTH L., 66.
- Alcune V_3 irrazionali a generi nulli. ROTH L., 265.
- Sulle V_3 algebriche che contengono un sistema lineare di superficie di genere lineare $p^{(1)} \leq 1$. ROTH L., 401.
- Alcune applicazioni del calcolo esterno. SEGRE B., 234.
- Una proprietà caratteristica in grande delle curve giacenti su di una quadrica. SEGRE B., 374.
- Piani tripli e piani quadrupli con la stessa curva di diramazione. TIBILETTI C., 537.

Geometria algebrica. — Complementi alla teoria delle varietà algebriche $V_{r-1,2}$ di residuale finito in S_r . Nota I. GAETA F., 270.

- Caratterizzazione delle curve origini di una catena di resti minimali. Nota II. GAETA F., 387.
- Sopra la serie di Severi d'una superficie algebrica. NOLLET L., 273.

M

Matematica. — Estensione della formula integrale di Cauchy alle algebre complesse dotate di modulo e commutative. RIZZA G. B., 667.

- Una applicazione della quasicontinuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile. SCORZA DRAGONI G., 55.

Meccanica. — Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota I. CALIGO D., 76.

- Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota II. CALIGO D., 277.

— Teoria idrostatica delle configurazioni d'equilibrio dei pianeti fluidi rotanti e teoria di Stokes nel caso particolare della Terra. MINEO C., 635.

- Piccole oscillazioni dell'acqua contenuta da pareti piane. STORCHI E., 544

- G**
- Genetica.** — Rapporti fra costituzione chimica e attività mutagena nelle acridine. Dati riassuntivi. D'AMATO F., 612.
- Geodesia.** — Determinazione dell'angolo fra la tangente in un estremo e la corrispondente sezione normale contenente l'altro estremo, per un arco finito di geodetica su di una superficie qualunque. MARUSSI A., 566.
- Sulla determinazione pratica dei coefficienti di un polinomio di funzioni sferiche. SILVA G., 643.
 - Sulla eliminazione di taluni errori nelle misure angolari. TERRANA E., 290.
- Geologia.** — Sur la continuité de la surface villafranchienne du Tibre à l'Adriatique. DEMANGEOT J., 175.
- Qualche nuovo dato sul Glaciale della Valle Brembana e della Valle Seriana in Lombardia. DESIO A., 20.
 - Movimenti orogenici quaternari nella Pianura Padana. DESIO A., 658.
 - Ulteriori dati stratigrafici e paleontologici sul Mesozoico di Castiglione (Rieti). MAXIA C., 322.
- Geometria.** — Una condizione per l'esistenza di unisecanti. BALDASSARRI M., 390.

Meccanica quantica. — Caratterizzazione analitica delle grandezze della meccanica quantica. FANTAPPIÈ L., 285.

— Determinazione di tutte le grandezze fisiche possibili in un universo quantico. FANTAPPIÈ L., 553.

Microbiologia. — Azione dei raggi ultravioletti sulla liberazione da calore di nucleotidi da cellule batteriche. CALIFANO L., 30.

— Denaturazione proteica e separazione da calore di nucleotidi dalle cellule batteriche. CALIFANO L., 37.

— Un nuovo «Mycobacterium» patogeno: «Mycobacterium Minetti» n. sp. Nota preliminare PENSO G., CASTELNUOVO G., GAUDIANO A., PRINCIVALLE M., VELLA L. e ZAMPIERI A., 108.

— Il «Mycobacterium phlei» (Lehmann e Neumann 1899, pro parte). Nota preliminare. PENSO G., ORTALI V., GAUDIANO A., PRINCIVALLE M., VELLA L. e ZAMPIERI A., 180.

Mineralogia. — Ralstonite e bisolfato sodico (matteuccite) fra i prodotti delle fumarole vesuviane. CAROBBI G. e CIPRIANI C., 23.

— Studio morfologico ed ottico della simonellite. EMILIANI F. e PELLIZZER R., 724.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, 135, 218, 363, 472, 628, 779.

P

Personale accademico, 132, 211, 468, 624, 774.

Plichi suggellati, 132, 469, 624, 776.

Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei, 213.

Presentazione di libri, 133, 212, 362, 469, 627, 774.

Presentazione di Note e Memorie, 134, 213, 361, 470, 625, 776.

R

Relazioni di Commissioni, 135, 362, 471.

S

Scienza dell'alimentazione. — Azione della bile sull'assorbimento di emulsioni di olio di cocco in ansa alla Thiry Vella di cane normale e spancreato. MONTINI T., e PONTREMOLI S., 127.

Scienza delle costruzioni. — Instabilità laterale di travi inflesse e compresse. DI MAGGIO F., GOMZA A., THOMAS W. E. e SALVADORI M. G., 524.

Stratigrafia. — Scoperta di una fauna pigmea nella dolomia norica della Val Solda. Nota preliminare. CONTI S., 325.

Z

Zoologia. — Ricerche sistematiche su alcune specie del genere *Ancylostoma* (Dubini, 1843): *Ancylostoma braziliense* (de Faria, 1910) e *Ancylostoma ceylanicum* (Looss, 1911). Nota I. BIOCCA E., 185.

— Ricerche sistematiche su alcune specie del genere *Ancylstoma* (Dubini, 1843): *Ancylostoma duodenale* (Dubini, 1843) e *Ancylostoma paraduodenale* Biocca, 1951. Nota II. BIOCCA E., 334.

— Ulteriori osservazioni sulla biologia e sulla genetica dell'«*Anacridium aegyptium*» L. (Orthoptera). COLOMBO G., 203.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO I.

GENNAIO 1952.

NOTE DI SOCI

CACCIOPPOLI R., Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati. Nota I	Pag. 3
ZAGAR F., Sulla espansione dell'Universo. Nota I.	12
VALLAURI G., Determinazione sperimentale della forza magnetomotrice esercitata da una corrente di spostamento dielettrico	17
DESIO A., Qualche nuovo dato sul Glaciale della Valle Brembana e della Valle Seriana in Lombardia	20
CAROBBI G. e CIPRIANI C., Ralstonite e bisolfato sodico (matteuccite) fra i prodotti delle fumarole vesuviane (pres. dal Socio G. Carobbi)	23
CALIFANO L., Azione dei raggi ultravioletti sulla liberazione da calore di nucleotidi da cellule batteriche	30
CALIFANO L., Denaturazione proteica e separazione da calore di nucleotidi dalle cellule batteriche	37
BOVET D., BOVET-NITTI F., CHAIN E. B. e BELOFF CHAIN A., Contributi allo studio farmacologico e biochimico del metabolismo intermedio. - Azione degli acidi grassi, degli alcol e degli aldeidi sull'intestino isolato ed esaurito di coniglio con par- ticolare riguardo alla risposta acetilcolinica. Nota II (pres. dal Socio E. B. Chain)	44
SPADOLINI I., Sulla validità della regola del «Tutto o Niente» nel cuore. Di una nuova concezione sul meccanismo della contrazione cardiaca in rapporto alla costituzione del miocardio	50

NOTE PRESENTATE DA SOCI

SCORZA DRAGONI G., Una applicazione della quasicontinuità semiregolare delle fun- zioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile (pres. dal Corresp. A. Tonolo)	Pag. 55
CONTI R., Sul problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma $z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(i)})$. Nota I (pres. dal Corresp. G. Sansone) .	61
ROTH L., Sulle V_3 algebriche generate da congruenze di curve (pres. dal Corresp. B. Segre)	66
GALLARATI D., Sulle superficie del quinto ordine dotate di punti tripli (pres. dal Corresp. B. Segre)	70
CALIGO D., Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota I (pres. dal Socio G. Krall)	76
BARBATELLI R., Determinazione del passo del micrometro in declinazione del cerchio meridiano Repsold. Nota II (pres. dal Socio L. Carnera)	84

GALLI M., Le deformazioni relativistiche di un cilindro rotante. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>L. Tieri</i>)	Pag. 86
CHIORBOLI P., Considerazioni critiche su talune caratteristiche degli spettri Raman di derivati carbonilici del Furano, Tiofene e Pirrolo (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	92
GHIGI E. e MIRONE P., Ricerche preliminari sullo spettro ultrarosso della marrubina e di alcuni prodotti da essa ottenibili (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	97
MALATESTA L. e SACCO A., Nichelcarbonilfosfiti alchilici (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	101
ALIBRANDI A. e ALIBRANDI G., Sul meccanismo del riflesso condizionato della secrezione salivare (pres. dal Socio <i>C. Ciaccio</i>)	102
MANUNTA G., Azione del benzoato di estradiolo sulla sopravvivenza dei ratti maschi tiro-paratiroidectomizzati (pres. dal Socio <i>G. Levi</i>)	104
PENSO G., CASTELNUOVO G., GAUDIANO A., PRINCIVALLE M., VELLA L. e ZAMPIERI A., Un nuovo «Mycobacterium» patogeno: «Mycobacterium minetti» n. sp. (pres. dal Socio <i>D. Marotta</i>)	108
STEFANELLI A., BAFFONI G. M., Il nucleo nei fenomeni della determinazione e del differenziamento della cellula di Mauthner dei Teleostei («Brachydanio rerio») (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	110
MAZZI V., Nuove osservazioni intorno alle cellule basofile nell'ipofisi del Tritone cre-stato (pres. dal Socio <i>N. Beccari</i>)	116
MARRÈ E., PROFUMO P., Blocco da cianuro dell'effetto stimolatore auxinico sulla sintesi dell'amido in stomi isolati (pres. dal Corrisp. <i>E. Remotti</i>)	122
MINGANTI A., Ricerche citologiche sugli ibridi di Ascidie (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	125
MONTINI T., PONTREMOLI S., Azione della bile sull'assorbimento di emulsioni di olio di cocco in ansa alla Thiry Vella di cane normale e spancreato (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>)	127
Personale accademico	132
Plichi suggellati	132
Comunicazioni varie	133
Presentazione di libri	133
Presentazione di Note e Memorie	134
Relazioni di Commissioni	135
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 1° gennaio 1952	135

FASCICOLO 2.

FEBBRAIO 1952.

NOTE DI SOCI

CACCIOPPOLI R., Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati. Nota II	Pag. 137
---	----------

NOTE PRESENTATE DA SOCI

VOLPATO M., Sulla derivazione sotto il segno di integrale (pres. dal Corrisp. <i>A. Tonolo</i>)	Pag. 146
CONTI R., Sul problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma $z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(i)})$. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i>)	151
CAFIERO F., Sulle famiglie di funzioni additive d'insieme, uniformemente continue (pres. dal Corrisp. <i>R. Caccioppoli</i>)	155

BAJADA E., L'equazione $p = f(x, y, z, q)$ e l'unicità (pres. dal Corrisp. G. Sansone)	Pag. 163
GAMBA A., Sui caratteri delle rappresentazioni del gruppo simmetrico (pres. dal Socio U. Amaldi)	167
BARBUTI U., Sulla stabilità delle soluzioni per la equazione: $x'' + B(t)x = 0$ (pres. dal Corrisp. G. Sansone)	170
DEMANGEOT J., Sur la continuité de la surface villafranchienne du Tibre à l'Adriatique (pres. dal Socio R. Fabiani)	175
ALIBRANDI A., Dell'azione di alte dosi di nicotinamide sul sistema nervoso centrale (pres. dal Socio C. Ciaccio)	178
PENSO G., ORTALI V., GAUDIANO A., PRINCIVALLE M., VELLA L. e ZAMPIERI A., Il «Mycobacterium phlei» (Lehmann e Neumann 1899, pro parte). Nota preliminare (pres. dal Socio D. Marotta)	180
MARRÈ E. e PROFUMO P., Sensibilità alla luce dell'effetto stimolatore auxinico sulla sintesi d'amido in stomi isolati (pres. dal Corrisp. E. Remotti)	181
BIOCCA E., Ricerche sistematiche su alcune specie del genere Ancylostoma (Dubini, 1843): Ancylostoma braziliense (de Faria, 1910) e Ancylostoma ceylanicum (Looss, 1911). Nota I (pres. dal Socio D. De Blasi)	185
BAFFONI G. M., La rigenerazione della coda e gli effetti reattivi delle cellule di Mauthner in Anfibi anuri ed urodeli (pres. dal Socio G. Cotronei)	189
LEONE V., Effetti di trattamento con urea su espianti ventrali di gastrule di «Rana esculenta» L. (pres. dal Socio S. Tonzig)	195
ORTOLANI G., Risultati sulla distribuzione dei territori presuntivi degli organi nel germe di Ascidie allo stadio VIII, determinati con le marche al carbone (pres. dal Socio G. Cotronei)	199
COLOMBO G., Ulteriori osservazioni sulla biologia e sulla genetica dell'«Anacridium aegyptium» L. (Orthoptera) (pres. dal Corrisp. U. D'Ancona)	203
FIOLOGAMO G. e TORRE M., Relazioni tra volume delle cellule nervose e lunghezza e spessore delle fibre nervose (pres. dal Socio G. Levi)	207
Personale accademico	211
Comunicazioni varie	212
Presentazione di libri	212
Presentazione di Note e Memorie	213
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei	213
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 9 febbraio 1952	218

FASCICOLO 3.

MARZO 1952.

NOTE DI SOCI

CACCIOPPOLI R., Misura e integrazione sulle varietà parametriche. Nota I	Pag. 219
TRICOMI F. G., Sulle derivate delle funzioni ipergeometriche confluenti rispetto ai parametri	227
SEGRE B., Alcune applicazioni del calcolo esterno	234
ZAGAR F., Sulla espansione dell'Universo. Nota II	239
MAJORANA Q., Nuove considerazioni cinematiche sulla relatività speciale	245
SPADOLINI I., Sul processo di ripolarizzazione nel muscolo cardiaco	251

NOTE PRESENTATE DA SOCI

DE GIORGI E., Ricerca dell'estremo di un cosiddetto funzionale quadratico (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	Pag. 256
GIULIANO L., Sull'unicità della soluzione per una classe di equazioni differenziali alle derivate parziali, paraboliche, non lineari (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i>) . . .	260
ROTH L., Alcune V_3 irrazionali a generi nulli (pres. dal Corrisp. <i>B. Segre</i>)	265
GAETA F., Complementi alla teoria delle varietà algebriche V_{r-2} di residuale finito in S_r . Nota I (pres. dal Socio <i>F. Severi</i>)	270
NOILLET L., Sopra la serie di Severi d'una superficie algebrica (pres. dal Socio <i>F. Severi</i>)	273
CALIGO D., Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Krall</i>)	277
FANTAPPIÈ L., Caratterizzazione analitica delle grandezze della meccanica quantica (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i>)	285
TERRANA E., Sulla eliminazione di taluni errori nelle misure angolari (pres. dal Cor- risp. <i>G. Boaga</i>)	290
CENNAMO F., Diffrazione di raggi X nella naftalina allo stato solido ed allo stato liquido (pres. dal Socio <i>A. Carrelli</i>)	294
FUBINI S., Sull'equivalenza di due definizioni della matrice S (pres. dal Socio <i>E. Perucca</i>)	298
PASTORI M., Sulle equazioni del campo elettromagnetico nell'ultima teoria di Einstein (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i>)	302
MALATESTA L. e SACCO A., Cromaesacarbilaminine. Nota preliminare (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	308
CHIORBOLI P. e DRUSIANI A. M., Sullo Spettro Raman della 2-tiofenaldeide (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	309
ARRIGO I. e MORANDO G., Dati sulle proprietà biologiche del paraossipropiofenone (H 365) (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>)	316
MAXIA C., Ulteriori dati stratigrafici e paleontologici sul Mesozoico di Castiglione (Rieti) (pres. dal Socio <i>R. Fabiani</i>)	322
CONTI S., Scoperta di una fauna pigmea nella dolomia norica della Val Solda (Nota preliminare) (pres. dal Socio <i>G. Rovereto</i>)	325
FRANCINI E., Influenza delle foglie sulla sessualità dei fiori di olivo (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i>)	330
BIOCCA E., Ricerche sistematiche su alcune specie del genere <i>Ancylostoma</i> (Dubini, 1843): <i>Ancylostoma duodenale</i> (Dubini, 1843) e <i>Ancylostoma paraduodenale</i> Biocca, 1951. Nota II (pres. dal Socio <i>D. De Blasi</i>)	334
ALIBRANDI A., Sul significato della disposizione verso l'epilessia sperimentale riflessa (pres. dal Socio <i>C. Ciaccio</i>)	337
SPADOLINI L., L'azione della procaina e del curaro sulla sincronizzazione dell'eccita- mento nel muscolo cardiaco. Contributo allo studio delle risposte contrattili di tipo graduato (pres. dal Corrisp. <i>I. Spadolini</i>)	338
MACHNE X. e TONINI G., Modificazioni dell'ecg differenziale di <i>Emys orbicularis</i> sotto l'influenza dell'allungamento passivo del miocardio (pres. dal Corrisp. <i>G. C. Pupilli</i>)	344
MAZZI V., Caratteri secretori e nervosi delle cellule del nucleo magnocellulare preot- tico nei Teleostei (pres. dal Socio <i>N. Beccari</i>)	347
BONETTI E., MERUCCI P., ASCENZI A. e ALOISI M., Modificazioni nelle proteine con- trattili muscolari del coniglio in corso di avitaminosi E. - IV. Azione dell'ATP sulle quantità estratte e sulle proprietà ottiche delle soluzioni proteiche (pres. dal Socio <i>G. Vernoni</i>)	350
BUFFA P., Sulla presenza di acido citrico nelle calcificazioni patologiche (pres. dal Socio <i>G. Vernoni</i>)	356

Comunicazioni varie	Pag. 361
Presentazione di Note e Memorie	361
Relazioni di Commissioni	362
Presentazione di libri	362
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'8 marzo 1952	363

FASCICOLO 4.

APRILE 1952.

NOTE DI SOCI

CACCIOPOLI R., Misura e integrazione sulle varietà parametriche. Nota II	Pag. 365
SEGRE B., Una proprietà caratteristica in grande delle curve giacenti su di una quadrica	374
FINZI B., Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono. Nota I	378

NOTE PRESENTATE DA SOCI

RICHARD U., Sulla rappresentazione asintotica degli estremi delle soluzioni di equazioni differenziali lineari del 2° ordine (pres. dal Corrisp. <i>F. G. Tricomi</i>)	Pag. 382
GAETA F., Caratterizzazione delle curve origini di una catena di resti minimali. Nota II (pres. dal Socio <i>F. Severi</i>)	387
BALDASSARRI M., Una condizione per l'esistenza di unisecanti (pres. dal Corrisp. <i>B. Segre</i>)	390
GHERARDELLI F., Osservazioni sul gruppo dei punti $(k+1)$ -pli di una g_n^k sopra una curva algebrica (pres dal Corrisp. <i>B. Segre</i>)	398
ROTH L., Sulle V_3 algebriche che contengono un sistema lineare di superficie di genere lineare $p^{(1)} \leq 1$ (pres. dal Corrisp. <i>B. Segre</i>)	401
MIRONE P. e VAMPIRI M., Sullo spettro ultrarosso tra 2,7 e 5 μ di alcune sostanze contenenti il gruppo imminico (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	405
MANGINI A., MONTANARI F. e PASSERINI R., Ricerche sui benzimidazoli: spettri di assorbimento e proprietà cromoforiche (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	411
PANIZZI L. e NICOLAUS R., Ricerche sulle melanine. — I. Sulla melanina di seppia (pres. dal Socio <i>F. Giordani</i>)	420
FRANCINI E., Determinazione dei coni e sessualità in « <i>Pinus halepensis</i> » Mill (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i>)	428
MACHNE X. e TONINI G., Modificazioni del potenziale di lesione del miocardio sottoposto allo stiramento (pres. dal Corrisp. <i>G. C. Pupilli</i>)	436
CREPAX P., Studio comparativo delle proteine del muscolo scheletrico di Coniglio nell'avitaminosi E e nell'inanizione cronica (pres. dal Corrisp. <i>G. C. Pupilli</i>)	439
MANUNTA G., Inibizione della lattazione per opera del p-ossipropiofenone (pres. dal Socio <i>G. Levi</i>)	444
RANZI S., Ricerche per uno studio della determinazione embrionale al livello molecolare (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	449
BUFFA P., Relazioni tra pressione osmotica del sangue e sudorazione nel coma insulinico (pres. dal Socio <i>G. Vernoni</i>)	454
PITTONI A. e MORET V., La riduzione polarografica dell'acido fumarico (pres. dal Corrisp. <i>A. Roncato</i>)	456

COMMEMORAZIONI

VALLAURI G., Commemorazione del Socio Ugo Bordoni	Pag. 463
Personale accademico	468
Comunicazioni varie	469
Plichi suggellati	469
Presentazione di libri	469
Presentazione di Note e Memorie	470
Relazioni di Commissioni	471
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 19 aprile 1952	472

FASCICOLO 5.

MAGGIO 1952.

NOTE DI SOCI

FERRETTI B., Su di una classe di equazioni operatoriali	Pag. 473
FINZI B., Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono. Nota II	477
MAJORANA Q., Spazio e tempo	481
CAGLIOTI V., SARTORI G. e SILVESTRONI P., Polarografia dei cianuri complessi di nichel (pres. dal Corrisp. V. Caglioti)	486

NOTE PRESENTATE DA SOCI

GROSS W., Sul calcolo della capacità elettrostatica di un conduttore (pres. dal Socio M. Picone)	Pag. 496
DE GIORGI E., Sulla sommabilità delle funzioni assolutamente integrabili (pres. dal Socio M. Picone)	507
VIOLA T., Su una classe di problemi non regolari di calcolo delle variazioni, attinenti all'equazione $\Delta_n^2 u = 0$ (pres. dal Socio M. Picone)	511
BIRINDELLI C., Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili in un prescritto campo semplicemente connesso del piano (pres. dal Socio M. Picone)	518
DI MAGGIO F., GOMZA A., THOMAS W. E. e SALVADORI M. G., Instabilità laterale di travi inflesse e compresse (pres. dal Socio M. Picone)	524
BALDASSARRI M., Le involuzioni ∞^d dello S_h e le loro proiezioni (pres. dal Corrisp. B. Segre)	530
TIBILETTI C., Piani tripli e piani quadrupli con la stessa curva di diramazione (pres. dal Corrisp. O. Chisini)	537
STORCHI E., Piccole oscillazioni dell'acqua contenuta da pareti piane (pres. dal Corrisp. B. Finzi)	544
FANTAPPIÈ L., Determinazione di tutte le grandezze fisiche possibili in un universo quantico (pres. dal Socio A. Signorini)	553
COLACEVICH A., Risultati preliminari relativi allo spettro della corona esterna ottenuti nell'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952 (pres. dal Socio G. Abetti)	559

RIGHINI G., Lo spettro della corona solare nell'eclissi del 25 febbraio 1952 (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i>)	Pag. 563
MARUSSI A., Determinazione dell'angolo fra la tangente in un estremo e la corrispondente sezione normale contenente l'altro estremo, per un arco finito di geodetica su di una superficie qualunque (pres. da Socio <i>P. Dore</i>)	566
GALLI M., Le deformazioni relativistiche di un cilindro rotante. Nota II (pres. dal Socio <i>L. Tieri</i>)	569
MUSCIA C., Studio di una lente elettronica con il metodo W. K. B. (pres. dal Corrisp. <i>E. Persico</i>)	575
MIRONE P. VAMPIRI M., Spettro ultrarosso e costituzione del 3,5-dimetilpirazolo (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	583
CHIORBOLI P., Considerazioni comparative sugli spettri Raman dell' <i>N</i> -acetilpirrolo e dell' α -acetilpirrolo (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	588
MANGINI A. e MONTANARI F., Effetti sterici e ponte d'idrogeno nella serie dei benzimidazoli (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	595
FILOGAMO G. e VIGLIANI F., Numero e spessore delle fibre mieliche destinate a muscoli resi funzionalmente inattivi (pres. dal Socio <i>G. Levi</i>)	600
MAZZI V., Rilievi e considerazioni sugli effetti della interruzione dei rapporti vascolari e nervosi fra ipotalamo ed ipofisi del maschio del Tritone crestato (pres. dal Socio <i>N. Beccari</i>)	605
D'AMATO F., Rapporti fra costituzione chimica e attività mutagena nelle acridine. Dati riassuntivi (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i>)	612
CORRENTI V., Sulla disposizione delle trabecole dell'osso dell'anca in relazione alla loro morfodinamica. (Studio radiologico) (pres. dal Socio <i>S. Sergi</i>)	618
Personale accademico	624
Plichi suggellati.	624
Presentazione di Note e Memorie.	625
Comunicazioni varie	625
Presentazione di libri	627
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 maggio 1952	628

FASCICOLO 6.

GIUGNO 1952.

NOTE DI SOCI

CACCIOPPOLI R., Misura e integrazione sulle varietà parametriche. Nota III	Pag. 629
MINEO C., Teoria idrostatica delle configurazioni d'equilibrio dei pianeti fluidi rotanti e teoria di Stokes nel caso particolare della Terra	635
SILVA G., Sulla determinazione pratica dei coefficienti di un polinomio di funzioni sferiche	643
QUILICO A., CARDANI C., PIOZZI F. e SCRIVANI P., I pigmenti del « <i>Deuterophoma tra-cheiphila</i> » (pres. dal Corrisp. <i>A. Quilico</i>)	650
DESIO A., Movimenti orogenici quaternari nella Pianura Padana	658
CLEMENTI A., Sull'ipersecrezione enterica dei lipidi durante l'iperlipidemia sperimentale	660

NOTE PRESENTATE DA SOCI

RIZZA G. B., Estensione della formula integrale di Cauchy alle algebre complesse dotate di modulo e commutative (pres. dal Socio <i>F. Severi</i>)	Pag. 667
RIGHINI G., Lo spettro di una protuberanza quiescente (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i>) . .	670
PETRALIA S. e CEVOLANI M., Propagazione di ultrasuoni in sistemi di liquidi parzialmente miscibili (pres. dal Corrisp. <i>G. Valle</i>)	674
MARZIANI M., Sulla propagazione del fronte d'onda nei mezzi dispersivi (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i>)	683
LANZA P. e GRIGGIO L., Riduzione polarografica del trifenilclorometano (pres. dal Corrisp. <i>G. Semeraro</i>)	688
LIBERTI A. e PAPÉE E., Studio spettrofotometrico di alcuni alogenuri tetracoordinati del cobalto bivalente (pres. dal Corrisp. <i>V. Caglioti</i>)	697
SPERONI G. e MORI L., Momenti elettrici di acidi isossazolcarbossilici. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>A. Quilico</i>)	704
CHIORBOLI P., Considerazioni quantomeccaniche intorno ad alcuni derivati carbonilici del pirrolo (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	713
CARDANI C. e PIOZZI F., Una nuova sintesi della cinodontina (pres. dal Corrisp. <i>A. Quilico</i>)	719
EMILIANI F. e PELLIZZER R., Studio morfologico ed ottico della simonellite (pres. dal Corrisp. <i>G. Andreatta</i>)	724
CORRENTI V., Osservazioni morfotisiologiche sull'osso dell'anca e sul bacino secondo un nuovo piano di orientamento (pres. dal Socio <i>S. Sergi</i>)	729
PALUMBI G., Nuovi dati e nuove concezioni sulla innervazione pressorectrice (presentata dal Socio <i>A. Pensa</i>)	738
PITTONI A. e MORET V., La riduzione polarografica dell'acido fumarico in presenza di fosfati (pres. dal Corrisp. <i>A. Roncato</i>)	741
RICCERI G., Un nuovo enzima capace di ossidare l'acido urico nel fegato di « <i>Emys europaea</i> »: l'uricossidasi (pres. dal Corrisp. <i>A. Clementi</i>)	746
PERRI T., Variazioni della competenza arto-formativa negli Anfibi Anuri (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	753
MANUNTA C. e SOLINAS M., Sul metabolismo dei pigmenti carotenoidi nella dorifora delle patate (« <i>Leptinotarsa decemlineata</i> » Say) (pres. dal Socio <i>G. Quagliariello</i>)	759

COMMEMORAZIONI

AMALDI U., Commemorazione del Socio Straniero Élie-Joseph Cartan.	Pag. 767
Personale accademico	774
Presentazione di libri	774
Plichi suggellati	776
Presentazione di Note e Memorie	776
Comunicazioni varie	777
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 14 giugno 1952. .	779
Indice per Autori	783
Indice per materie	788
Indici dei fascicoli	793